**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1977**

УДК 539.3

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(*Сумы*)

Задачи о растяжении и изгибе изотропной среды с одним или несколькими криволинейными разрезами рассматривались в [1–3]. Двоякопериодические задачи для изотропной среды с разрезами содержатся в [4–8]. В данной работе дается решение первой основной задачи теории упругости для анизотропной среды, ослабленной двоякопериодической системой групп криволинейных разрезов общего вида. Представление решений двоякопериодической задачи находится при помощи предельного перехода из соответствующих соотношений для анизотропной среды с разрезами. Строится макромодель регулярной структуры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую анизотропную среду с периодической структурой. Пусть ω_1 и ω_2($\operatorname{Im}\omega_1=0$, $\operatorname{Im}\omega_2/\omega_1>0$) — основные ее периоды. Будем предполагать, что в пределах каждого параллелограмма периодов имеется группа из k непересекающихся разрезов и эти группы конгруэнтны одна другой.

Пусть $l_j=l_{00}^j$ ($j=1, 2, \ldots, k$) — контур j-го разреза в пределах основного параллелограмма периодов, $l=l_{00}=\cup l_j$.
Область, занятую средой, обозначим через D, граница области D — совокупность всех $l_{mn}\equiv l_{00}(\operatorname{mod}\omega_1, \omega_2)$. Будем предполагать, что l_{00}^j — простые гладкие кривые Ляпунова.

Под первой основной двоякопериодической задачей для описанной структуры понимаем краевую задачу об определении напряжений в D, когда на берегах разрезов заданы одинаковые в конгруэнтных точках нагрузки $X_n^\pm(t)+iY_n^\pm(t)$, а в области D действуют средние напряжения S_1, S_2 и S_{12} (фиг. 1).

Будем считать, что нагрузки $X_n^\pm(t)+iY_n^\pm(t)$ непрерывны по Гельдеру, самоуравновешены; знак плюс относится к левому берегу при положительном направлении движения от начала разреза a_j к концу — b_j.

Известно, что напряжения в плоской анизотропной среде выражаются через аналитические функции своих аргументов $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ [9]. В условиях групповой симметрии эти функции двоякопериодичны в D.

Краевое условие для определения функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ получим, дифференцируя краевое условие первой основной задачи в форме Д. И. Шермана [10] по направлению s — касательному к l. Имеем

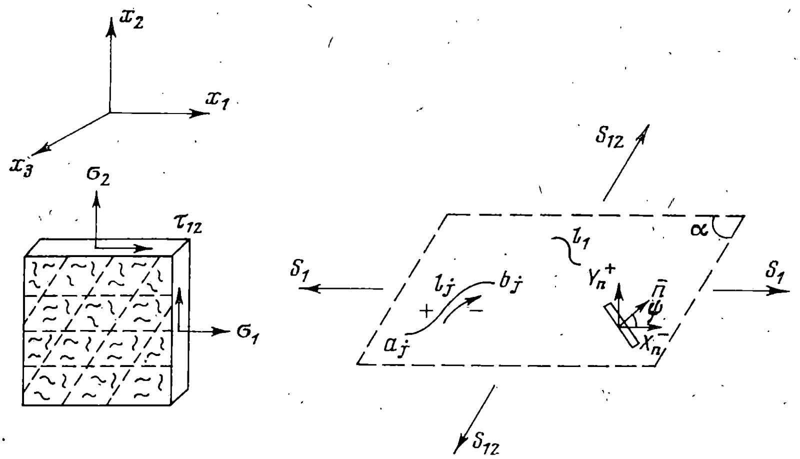
$$a(\psi)\Phi_1^\pm(t_1)+b(\psi)\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}+\Phi_2^\pm(t_2)=F^\pm(t) \qquad (1.1)$$

$$t_\nu=\operatorname{Re}t+\mu_\nu\operatorname{Im}t \quad {\scriptstyle(\nu=1,2)}, \qquad t\in l, \qquad a(\psi)=\frac{\mu_1-\bar\mu_2}{\mu_2-\bar\mu_2}\,\frac{\mu_1\cos\psi-\sin\psi}{\mu_2\cos\psi-\sin\psi}$$

$$b(\psi)=\frac{\bar\mu_1-\bar\mu_2}{\mu_2-\bar\mu_2}\,\frac{\bar\mu_1\cos\psi-\sin\psi}{\mu_2\cos\psi-\sin\psi}, \qquad F^\pm(t)=\frac{X_n^\pm(t)+\bar\mu_2Y_n^\pm(t)}{(\mu_2-\bar\mu_2)(\mu_2\cos\psi-\sin\psi)}$$

Верхний знак в (1.1) относится к левому берегу разреза, ψ — угол между положительным направлением нормали к l в точке t и осью ox_1, μ_1 и μ_2 — характеристические числа, зависящие от упругих свойств среды [9].

Условимся ниже при обозначении кривых и областей, лежащих в аффинных плоскостях z_1 и z_2, приписывать к обозначениям их прообразов в плоскости $z=x_1+ix_2$ штрих и два штриха соответственно.



Фиг. 1

Учитывая сказанное, приходим к следующей краевой задаче. Определить регулярные двоякопериодические функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, соответственно в областях D' и D'', по краевому условию (1.1) и некоторым дополнительным условиям (о которых будет сказано в п. 3).

Представим искомые функции в виде

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'} p(t)\zeta(t_1-z_1)\,dt_1+A, \quad z_1\in D' \tag{1.2}$$

$$\Phi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l''} q(t)\zeta(t_2-z_2)\,dt_2+B, \quad z_2\in D''$$

$$t_\nu=\operatorname{Re} t+\mu_\nu \operatorname{Im} t, \quad z_\nu=\operatorname{Re} z+\mu_\nu \operatorname{Im} z \quad (\nu=1,2)$$

Здесь функции $p(t)=\{p_j(t),\ t\in l_j\}$ и $q(t)=\{q_j(t),\ t\in l_j\}$ подлежат определению (предполагаем их непрерывными по Гельдеру на (a_jb_j)); A и B — неопределенные пока константы; $\zeta(z_\nu)$ — дзета-функция Вейерштрасса, построенная на периодах $\omega_{1\nu}=\omega_1$ и $\omega_{2\nu}=\operatorname{Re}\omega_2+\mu_\nu \operatorname{Im}\omega_2$.

Из (1.2) следуют необходимые и достаточные условия двоякой периодичности функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$

$$\int_{l'} p(t)\,dt_1=0, \quad \int_{l''} q(t)\,dt_2=0 \tag{1.3}$$

Механический смысл этих равенств будет выяснен ниже.

Определим константы A и B из условия, чтобы представления (1.2) обеспечивали существование в D заданных средних напряжений S_1, S_2 и S_{12}.

Имеем, учитывая выражения для компонентов главного вектора сил, действующих вдоль произвольной дуги в D [9], и наличие в среде напряжений S_1, S_2, S_{12}

$$\operatorname{Re}[\varphi_1(z_1)+\varphi_2(z_2)]_z^{z+\omega_\nu}=P_\nu \quad (\nu=1,2) \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Re}[\mu_1\varphi_1(z_1)+\mu_2\varphi_2(z_2)]_z^{z+\omega_\nu}=P_\nu^*, \quad \varphi_\nu(z_\nu)=\int \Phi_\nu(z_\nu)\,dz_\nu$$

$$P_1=\frac{\omega_1 S_2}{2}\sin\alpha,\quad P_2=-\frac{|\omega_2|S_{12}}{2}\sin\alpha,\quad \alpha=\arg\omega_2$$

$$P_1{}^*=-\frac{\omega}{2}(S_{12}+S_2\cos\alpha),\quad P_2{}^*=\frac{|\omega_2|}{2}(S_1+S_{12}\cos\alpha)$$

Интегрируя (1.2) и учитывая свойства сигма-функций Вейерштрасса $\sigma(z)$ [11], получаем

$$\varphi_1(z_1+\omega_{k1})-\varphi_1(z_1)=A\omega_{k1}+a\delta_{k1} \tag{1.5}$$

$$\varphi_2(z_2+\omega_{k2})-\varphi_2(z_2)=B\omega_{k2}+b\delta_{k2}$$

$$\delta_{k\nu}=\zeta^*(z_\nu+\omega_{k\nu})-\zeta(z_\nu)=2\zeta\left(\frac{\omega_{k\nu}}{2}\right)\quad (k,\nu=1,2)$$

$$\omega_{1\nu}=\omega_1,\ \omega_{2\nu}=h+\mu_\nu H,\ h=\mathrm{Re}\,\omega_2,\ H=\mathrm{Im}\,\omega_2$$

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}t_1p(t)\,dt_1,\quad b=\frac{1}{2\pi i}\int_{l''}t_2q(t)\,dt_2$$

Из (1.4) и (1.5) находим необходимые комбинации постоянных A и B и условие совместности системы (1.4)

$$\mathrm{Re}(A+B)=\frac{\sigma_2}{2}-\frac{1}{\omega_1}\mathrm{Re}(a\delta_{11}+b\delta_{12}) \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Re}(\mu_1A+\mu_2B)=-\frac{\tau_{12}}{2}-\frac{1}{\omega_1}\mathrm{Re}(a\mu_1\delta_{11}+b\mu_2\delta_{12})$$

$$\mathrm{Re}(\mu_1^2A+\mu_2^2B)=\frac{\sigma_1}{2}-\frac{1}{H\omega_1}\mathrm{Re}[a\mu_1(\mu_1H\delta_{11}-2\pi i)+$$

$$+b\mu_2(\mu_2H\delta_{12}-2\pi i)],\ \tau_{12}=S_{12}+S_2\cos\alpha,\ \sigma_2=S_2\sin\alpha$$

$$\sigma_1\sin\alpha=S_1+2S_{12}\cos\alpha+S_2\cos_2\alpha,\quad \mathrm{Im}(a+b)=0 \tag{1.7}$$

В (1.6) σ_1, σ_2 и τ_{12} — средние нормальные и сдвигающие напряжение на площадках, перпендикулярных координатным осям.

Таким образом, представления (1.2) с учетом (1.3), (1.6) и (1.7) описывают класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений в D и обеспечивают существование в структуре заданных средних напряжений S_1, S_2 и S_{12}.

2. Основная система сингулярных интегральных уравнений. Переходя в (1.2) к предельным значениям и подставляя их в краевое условие (1.1) на l, после преобразований получим

$$q(t)=F_1(t)-a(\psi)p(t)-b(\psi)\overline{p(t)},\quad F_1(t)=F^+(t)-F^-(t) \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_l\overline{p(t)}\zeta(t-t_0)\,dt+\int_l\overline{p(t)}K_1(t,t_0)\,dt+$$

$$+\int_l p(t)K_2(t,t_0)\,dt+M\{p(t),t_0\}=N(t_0),\quad t_0\in l_j\quad (j=1,2,\ldots,k) \tag{2.2}$$

$$2\pi iK_1(t,t_0)=\frac{d}{dt}\ln\left\{\frac{\overline{\sigma(t_1-t_{10})\sigma(t_2-t_{20})}}{\sigma^2(t-t_0)}\right\}-\left(1-\frac{b(\psi)}{b(\psi_0)}\right)\zeta(t_2-t_{20})\frac{dt_2}{dt}$$

$$2\pi i K_2(t,t_0)=\frac{a(\varphi_0)}{b(\psi_0)}\left\{\frac{d}{dt}\ln\frac{\sigma(t_2-t_{20})}{\sigma(t_1-t_{10})}-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{a(\psi)}{a(\psi_0)}\right)\zeta(t_2-t_{20})\frac{dt_2}{dt}\right\}$$

$$M\{p(t),t_0\}=\frac{1}{\omega_1}\left[\bar{a}\bar{\delta}_{11}+a\delta_{11}\frac{a(\psi_0)}{b(\psi_0)}+\frac{b\delta_{12}}{b(\psi_0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{4\pi}{H}\frac{\mathrm{Im}(a\mu_1+b\mu_2)}{(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)(\bar{\mu}_1\cos\psi_0-\sin\psi_0)}\right],\quad F_2(t)=F^+(t)+F^-(t)$$

$$N(t_0)=\frac{\sigma_1\cos\psi_0+\tau_{12}(\bar{\mu}_2\cos\psi_0+\sin\psi_0)+\sigma_2\bar{\mu}_2\sin\psi_0}{(\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2)(\bar{\mu}_1\cos\psi_0-\sin\psi_0)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{l''}F_1(t)\zeta(t_2-t_{20})\,dt_2-\frac{F_2(t_0)}{2b(\psi_0)}$$

Имеем далее

$$[a(\psi)-a(\psi_0)]\zeta(t_2-t_{20})=C\Lambda(t,t_0)\frac{\sin(\psi_0-\psi)}{|t-t_0|}+O(|t-t_0|^2)$$

$$[b(\psi)-b(\psi_0)]\zeta(t_2-t_{20})=\bar{C}\Lambda(t,t_0)\frac{\sin(\psi-\psi_0)}{|t-t_0|}+O(|t-t_0|^2)$$

$$\Lambda(t,\ t_0)=[(\mu_2\cos\psi-\sin\psi)(\mu_2\cos\psi_0-\sin\psi_0)(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)]^{-1}$$

$$C=\frac{(\mu_1-\bar{\mu}_2)(\mu_2-\mu_1)}{\mu_2-\bar{\mu}_2},\quad t-t_0=|t-t_0|e^{i\theta}\quad {\scriptstyle (t,t_0\in l)}$$

В силу предположений относительно дуг l_j отсюда следует, что ядра K_1 и K_2 в (2.2) могут обладать лишь не более чем слабой особенностью [12].

Таким образом (2.2) представляет собой систему из k-сингулярных уравнений относительно k неизвестных функций $p_j(t)$. Непрерывность по Гельдеру функций $p_j(t)$ в любой внутренней точке l_j следует из предположений о характере нагрузки $X_n^\pm(t)+iY_n^\pm(t)$. Заметим, что в случае прямолинейных параллельных трещин или трещин, лежащих на одной прямой, $\psi=\psi_0$ и уравнение (2.2) существенно упрощается.

3. Скачок смещений. Условия однозначности смещения. Используя выражения смещений в среде через функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ [9], находим с учетом (1.2) скачки смещений Δu и Δv на l_j (a_{ik} — упругие постоянные в законе Гука [9]):

$$\Delta u(t_0)=2\,\mathrm{Re}\left\{L_1\int_{a_j}^{t_0}p(t)\,dt_1+L_2\int_{a_j}^{t_0}q(t)\,dt_2\right\}\quad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots,k)} \tag{3.1}$$

$$\Delta v(t_0)=2\,\mathrm{Re}\left\{Q_1\int_{a_j}^{t_0}p(t)\,dt_1+Q_2\int_{a_j}^{t_0}q(t)\,dt_2\right\}\quad (t_0\in l_j)$$

$$L_\nu=a_{11}\mu_\nu^2+a_{12}-a_{16}\mu_\nu,\quad Q_\nu=a_{12}\mu_\nu+\frac{a_{22}}{\mu_\nu}-a_{26}\quad {\scriptstyle (\nu=1,2)}$$

Условия однозначности смещений выражаются равенствами

$$\Delta u(b_j)=\Delta v(b_j)=0\quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,\ldots,\,k)} \tag{3.2}$$

Если главный вектор внешней нагрузки, действующей на $l=\cup l_j$, равен нулю, то условия двоякой периодичности (1.3) вытекают из условий однозначности смещений (3.2).

В этом случае из (1.1) и (2.1) находим

$$R=\int_{l''} F_1(t)\,dt_2=0 \tag{3.3}$$

Далее, из (2.1) и (1.1) находим

$$\int_{l''} q(t)\,dt_2=\int_{l''} F_1(t)\,dt_2+\frac{\bar\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\bar\mu_2}\int_{l'} p(t)\,dt_1+\frac{\bar\mu_2-\bar\mu_1}{\mu_2-\bar\mu_2}\int_{l'} \overline{p(t)}\,d\bar t_1$$

Отсюда с учетом (3.3) заключаем, что первое и второе равенства в (1.3) равносильны. Раскрывая условия (3.2), получаем после преобразований

$$\int_{l_j'} p_j(t)\,dt_1=\frac{1}{a_{11}\Delta}\{\mu_1\operatorname{Re}(L_2R)-\operatorname{Re}(Q_2R)\}\quad (j=1,2,\ldots,k)$$

$$\Delta=(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar\mu_2)(\mu_1-\bar\mu_1) \tag{3.4}$$

Из (3.4) непосредственно вытекает (1.3). Утверждение доказано.

Условие совместности (1.7) выполняется автоматически, если главный момент внешней нагрузки на l равен нулю. Это следует из равенства, полученного с учетом (1.1), (2.1) и (1.5)

$$\operatorname{Re}[2\pi i(a_1+b_1)]=\frac{1}{2}\int_l [x_2(X_n^+-X_n^-)-x_1(Y_n^+-Y_n^-)]\,ds+$$

$$+\operatorname{Re}\int_l\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\bar\mu_2}\bar t_2 p(t)\,dt_1-\frac{\bar\mu_2-\bar\mu_1}{\bar\mu_2-\mu_2}t_2\overline{p(t)}\,d\bar t_1\right]$$

Таким образом, основная система (2.2) в совокупности с k дополнительными условиями (3.4) полностью определяет решение $p(\mathring{t})$. Функция $q(t)$ определяется из (2.1), функции $\Phi_\nu(z_\nu)$ — по формулам (1.2).

4. Решение для изотропной среды. Оно может быть получено из соответствующих соотношений для анизотропной среды путем предельного перехода. Опуская громоздкие выкладки, приведем получающиеся при этом представления комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\Phi(z)=A-\frac{1}{2\pi i}\int_l \omega(t)\zeta(t-z)\,dt,\qquad \int_l \omega(t)\,dt=0 \tag{4.1}$$

$$\Psi(z)=B+\frac{1}{2\pi i}\int_l \overline{\omega(t)}\zeta(t-z)\,d\bar t+\frac{1}{\pi i}\int_l F_1(t)\zeta(t-z)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_l [\bar t\rho(t-z)-\rho_1(t-z)]\omega(t)\,dt$$

Здесь $\rho(z)$ — эллиптическая пе-функция Вейерштрасса [11], $\rho_1(z)$ — специальная мероморфная функция [7], $\omega(t)=\{\omega_j(t),\ t\in l_j\}$ — искомая функция на l.

Основную систему сингулярных уравнений для изотропной среды с разрезами можно получить, подставив предельные значения представлений (4.1) в соответствующее (1.1) краевое условие на l:

$$2\,\mathrm{Re}\,\Phi^{\pm}(t)-\left\{\bar{t}\frac{d}{dt}\Phi^{\pm}(t)+\Psi^{\pm}(t)\right\}e^{2i\psi}=X_n{}^{\pm}-iY_n{}^{\pm}$$

5. Макромодель структуры. Определение макромодели дано в [13]. Используя формулы для средних деформаций e_1, e_2, e_{12} и поворота фундаментальной ячейки ω:

$$\omega_1 e_1=u(z+\omega_1)-u(z),\quad \omega_1(e_{12}+\omega)=v(z+\omega_1)-v(z)$$

$$he_1+H(e_{12}-\omega)=u(z+\omega_2)-u(z),\quad He_2+h(e_{12}+\omega)=v(z+\omega_2)-v(z)$$

а также соотношения (1.4)—(1.6) и (3.1), получаем после преобразований

$$e_1=a_{11}\sigma_1+a_{12}\sigma_2+a_{16}\tau_{12}+\frac{4\pi a_{11}}{H\omega_1}\mathrm{Re}\,(ia\mu_1+ib\mu_2) \tag{5.1}$$

$$e_2=a_{12}\sigma_1+a_{22}\sigma_2+a_{26}\tau_{12}-\frac{4\pi a_{22}}{H\omega_1}\mathrm{Re}\left(\frac{ia}{\mu_1}+\frac{ib}{\mu_2}\right)$$

$$2e_{12}=a_{16}\sigma_1+a_{26}\sigma_2+a_{66}\tau_{12}-\frac{4\pi a_{11}}{H\omega_1}\mathrm{Re}\,(ia\mu_1{}^2+ib\mu_2{}^2)$$

Введем стандартные решения системы (2.2) $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ и соответствующие им функционалы a, b по формулам (полагаем, что берега разрезов свободны от сил)

$$p(t)=\sigma_1 p^{(1)}(t)+\sigma_2 p^{(2)}(t)+\tau_{12}p^{(3)}(t) \tag{5.2}$$

$$a=\sigma_1 a_1+\sigma_2 a_2+\tau_{12}a_3,\quad b=\sigma_1 b_1+\sigma_2 b_2+\tau_{12}b_3$$

Здесь функционалы a_i, b_i соответствуют стандартному решению $p^{(i)}(t)$, $i=1, 2, 3$.

Учитывая (5.2), получаем из (5.1) закон Гука для макромодели структуры

$$e_1=\langle a_{11}\rangle\sigma_1+\langle a_{12}\rangle\sigma_2+\langle a_{16}\rangle\tau_{12} \tag{5.3}$$

$$e_2=\langle a_{21}\rangle\sigma_1+\langle a_{22}\rangle\sigma_2+\langle a_{26}\rangle\tau_{12}$$

$$2e_{12}=\langle a_{61}\rangle\sigma_1+\langle a_{62}\rangle\sigma_2+\langle a_{66}\rangle\tau_{12}$$

$$\langle a_{11}\rangle=a_{11}\left[1+\frac{4\pi}{H\omega_1}\mathrm{Re}\,(ia_1\mu_1+ib_1\mu_2)\right],\quad \langle a_{12}\rangle=\langle a_{21}\rangle=a_{12}+\frac{4\pi a_{11}}{H\omega_1}\mathrm{Re}\,(ia_2\mu_1+ib_2\mu_2)$$

$$\langle a_{16}\rangle=\langle a_{61}\rangle=a_{16}+\frac{4\pi a_{11}}{H\omega_1}\mathrm{Re}\,(ia_3\mu_1+ib_3\mu_2),\quad \langle a_{22}\rangle=a_{22}\left[1-\frac{4\pi}{H\omega_1}\mathrm{Re}\left(\frac{ia_2}{\mu_1}+\frac{ib_2}{\mu_2}\right)\right]$$

$$\langle a_{26}\rangle=\langle a_{62}\rangle=a_{26}-\frac{4\pi a_{22}}{H\omega_1}\mathrm{Re}\left(\frac{ia_3}{\mu_1}+\frac{ib_3}{\mu_2}\right),\quad \langle a_{66}\rangle=a_{66}-\frac{4\pi a_{11}}{H\omega_1}\mathrm{Re}\,(ia_3\mu_1{}^2+ib_3\mu_2{}^2)$$

Величины $\langle a_{ik}\rangle$ представляют собой макроскопические упругие параметры структуры.

Доказательство симметрии матрицы коэффициентов $\langle a_{ik}\rangle$ проводится аналогично [13].

6. Анизотропная среда с двоякопериодической системой прямолинейных разрезов. Будем предполагать, что в пределах параллелограмма периодов имеется один разрез длиной $2L$.

Используя разложение дзета-функции Вейерштрасса в степенной ряд [11, 7] и учитывая, что $\psi=\psi_0=\pi/2$, приводим (2.2) к уравнению

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\theta(\xi)}{\xi-\xi_0}d\xi-\int_{-1}^{1}\{K(\xi-\xi_0)\theta(\xi)+K_*(\xi-\xi_0)\overline{\theta(\xi)}\}d\xi=N(\xi_0) \qquad (6.1)$$

$$K(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}K_j\xi^{2j+1},\quad p(x)=\theta(\xi),\quad x_1=x$$

$$K_*(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\mu_2-\bar\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}K_j^*\xi^{2j+1},\quad x=\xi L,\quad x_0=\xi_0 L$$

$$K_0=\omega_1(\delta_{11}+\bar\delta_{12}),\quad K_j=q_{1,j+1}+\bar q_{2,j+1}\quad (j=1,2,\ldots)$$

$$K_0^*=\omega_1(\bar\delta_{11}-\delta_{12}),\quad K_j^*=\bar q_{1,j+1}-\bar q_{2,j+1},\quad \lambda=\frac{2L}{\omega_1},\quad 0\leqslant\lambda<1$$

$$q_{\nu,j}=\sum_{m,n}{}'\frac{1}{T_\nu^{2j}},\quad T_\nu=m+n\frac{\omega_{2\nu}}{\omega_{1\nu}}\quad (\nu=1,2)$$

$$N(\xi_0)=\frac{\tau_{12}+\mu_2\sigma_2}{\mu_1-\mu_2}+\frac{1}{2\pi i}\frac{\bar\mu_2-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\int_{-L}^{L}\overline{F_1(x)}\,\overline{\zeta_2(x-x_0)}\,dx+$$

$$+\frac{2}{H\omega_1(\mu_1-\mu_2)}\operatorname{Re}\int_{-L}^{L}x\bar\mu_2\overline{F(x)}\,dx+\frac{\bar\mu_2-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\frac{\overline{F_2(x_0)}}{2}$$

Нижний индекс при дзета-функции в правой части (6.1) указывает на то, что она построена на периодах ω_{12} и ω_{22}.

В предельном случае изотропной среды (6.1) переходит в сингулярное уравнение для изотропной среды с разрезами, полученное в [7].

Применяя к уравнению (6.1) процедуру работы [7], сведем его к системе линейных алгебраических уравнений (дополнительное условие однозначности смещений выполняется автоматически)

$$A_{k+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(C_{nk}A_n+C_{nk}^*\bar A_n)=iN_k\quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$C_{nk}=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}K_j\alpha_{jnk}.$$

$$C_{nk}^*=\frac{1}{2}\frac{\mu_2-\bar\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}K_j^*\alpha_{jnk}$$

$$N_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}N(\xi)U_k(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi$$

Здесь $N(\xi)$, K_j, K_j^* и λ определены в (6.1); величины α_{jnk} определены в [7]. Неизвестные A являются коэффициентами разложения

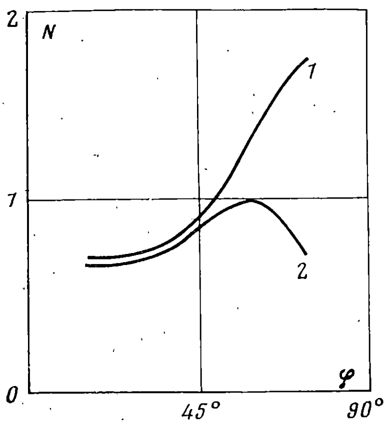
$$\theta_0(\xi)=\sqrt{1-\xi^2}\,\theta(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(\xi)$$

в ряд по полиномам Чебышева первого рода.

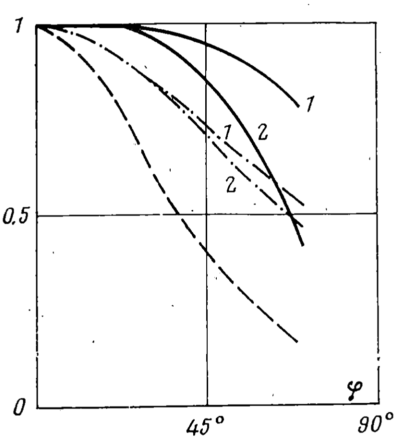
7. **Результаты расчетов.** Расчеты проводились для квадратной решетки с периодами $\omega_1=2$, $\omega_2=2i$. Материал — стеклопластик АГ-4С с параметрами $E_1=2.1\cdot10^5$ *кг/см*^{2}, $E_2=1.6\cdot10^5$ *кг/см*^{2}, $G=0.42\cdot10^2$ *кг/см*^{2}, $\nu_2=0.07$ ($\mu_1=2.128\ i$, $\mu_2=0.539\ i$). В пределах параллелограмма периодов имеется одна трещина длины $2L$ вдоль дуги эллипса

$$x_1=R_1\cos\frac{\beta+1}{2}\varphi,\quad x_2=R_2\sin\frac{\beta+1}{2}\varphi.$$
$$(-1\leqslant\beta\leqslant1)$$

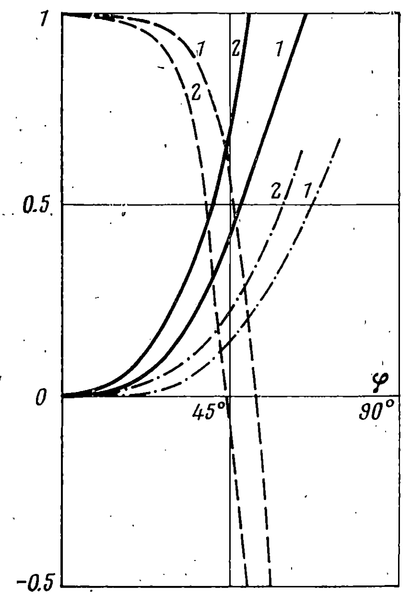
На фиг. 2. приведены графики величины (σ_n – напряжение нормального разрыва, $r=|z-c|$), $N=\sigma_n\sqrt{r/L}$ на продолжении за вершину трещины c (кривая *1* соответствует началу $c=a$, кривая *2* – концу трещины $c=b$) в функции от угла φ при $R_1=R_2=2$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\tau_{12}=0$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 даны графики эффективных макропараметров $a_{11}/\langle a_{11}\rangle$ (пунктир), $a_{22}/\langle a_{22}\rangle$ (сплошные кривые), $a_{66}/\langle a_{66}\rangle$ (штрихпунктирные кривые) в функции от угла φ.

Кривые макропараметров $\langle a_{16}\rangle/a_{11}$ (штрихпунктир), $\langle a_{26}\rangle/a_{11}$ (сплошные кривые) и $\langle a_{12}\rangle/a_{12}$ (пунктир) даны на фиг. 4. На фиг. 4 и 3 кривые *1* и *2* относятся к значениям $R_1/R_2=0.5$ и 1 соответственно ($R_2=2$). Кривые *1* и *2* для величины $a_{11}/\langle a_{11}\rangle$ практически совпадают.

Таким образом макромодель данной структуры существенно анизотропна, параметры $\langle a_{16}\rangle/a_{11}$ и $\langle a_{26}\rangle/a_{11}$ могут достигать весьма больших значений. Характерна также тенденция $\langle a_{12}\rangle/a_{12}$ к смене знака (что для однородного материала физически нереально). В структуре это явление связано с раскрытием трещины и сильным изгибом характерного элемента в своей плоскости.

Автор благодарит О. А. Письмиченко за помощь при численной реализации алгоритма.

Поступила 29 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В., Салганник Р. Л.* Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
2. *Гольдштейн Р. В., Савова Л. Н.* Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
3. *Линьков А. М., Меркулов В. А.* Задачи об изгибе пластин с разрезами. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1.
4. *Партон В. З.* Об одной оценке взаимного упрочения трещин при их шахматном расположении. ПМТФ, 1965, № 5.
5. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
6. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин в упругих телах. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
7. *Фильштинский Л. А.* Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
8. *Линьков А. М.* Интегральное уравнение плоской задачи теории упругости о двоякопериодической системе разрезов, нагруженных самоуравновешенными нагрузками. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
9. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
10. *Шерман Д. И.* К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
11. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М., «Наука», 1968.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
13. *Фильштинский Л. А.* К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.