

## ИЗГИБ ТОЛСТОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛИТЫ

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, В. А. ШАЛДЫРВАН, Г. Г. ШАЛДЫРВАН

(Донецк)

Для исследования трехмерных задач теории изгиба изотропных плит в [1, 2] был разработан асимптотический метод, основанный на использовании однородных решений [3]. Дальнейшее развитие этот метод получил в [4] при рассмотрении многосвязных плит<sup>1</sup>.

В [5, 6] был предложен метод исследования напряженного состояния плит любой толщины.

Здесь решена пространственная задача об изгибе толстой кусочно-однородной плиты. Приводятся граничные условия для разрешающих функций, через которые выражаются однородные решения [3]. Исследуется напряженное состояние вблизи поверхности раздела указанной плиты. Приводятся результаты расчетов при различных толщинах и жесткостях материала плиты. Показано, что в рассматриваемом случае теория Кирхгофа приводит к значительным погрешностям при определении поля напряжений вблизи поверхности сая.

**1. Постановка задачи и получение граничных условий для разрешающих функций.** Пусть бесконечная плита постоянной толщины  $2h$  ослаблена круговой цилиндрической полостью, в которую без предварительного натяжения вклеено или впаяно включение в виде упругой плиты из другого изотропного материала ( $\nu, \mu$  — коэффициент Пуассона и модуль сдвига для материала плиты, а  $\nu^1, \mu^1$  — для включения). При этом срединные плоскости плиты и включения продолжают друг друга, а цилиндрическая поверхность сая нормальна к срединной плоскости недеформированной плиты. Рассмотренные в совокупности плита и включение образуют кусочно-однородную плиту.

Введем безразмерную цилиндрическую систему координат  $r, \theta, \xi$  так, чтобы плоскость  $\xi=0$  совпала со срединной плоскостью рассматриваемой плиты, а ось  $o\xi$  направим вверх по геометрической оси включения ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ). Линия пересечения поверхности  $G$  со срединной плоскостью  $\xi=0$  представляет из себя окружность единичного радиуса  $\Gamma$ , которая делит плоскость комплексного переменного  $z = \xi + i\eta = re^{i\theta}$  на области  $S^- (|z| > 1)$  и  $S^+ (|z| < 1)$ .

Определим упругое равновесие кусочно-однородной плиты, считая, что плоские грани ее свободны от напряжений, а на бесконечности плита загружена равномерно распределенными изгибающими усилиями  $\sigma_\xi^\infty = P\xi$ , действующими в сечениях, перпендикулярных оси  $\xi$ .

При этом силовые характеристики отнесены к  $2\mu$ , а линейные размеры — к радиусу включения  $R$ .

Решение поставленной задачи согласно [3, 6] сводится к нахождению разрешающих функций  $F^1, B_n^1, C_p^1$  и  $F, B_n, C_p$ , характеризующих напряженно-деформированное состояние включения и плиты с полостью соответственно.

<sup>1</sup> См. также Космодамианский А. С., Ложкин В. Н., Мысовский Ю. В. Напряженное состояние многосвязных пластин средней толщины. III Всес. съезд по теорет. и прикл. механ. Аннот. докл. М., «Наука», 1968.

Указанные функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F^1 = 0, \quad \left( \nabla^2 - \frac{\gamma_p^2}{\lambda^2} \right) C_p^1 = 0, \quad \left( \nabla^2 - \frac{\delta_k^2}{\lambda^2} \right) B_k^1 = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \\ \left( \nabla^2 - \frac{\gamma_p^2}{\lambda^2} \right) C_p = 0, \quad \left( \nabla^2 - \frac{\delta_k^2}{\lambda^2} \right) B_k = 0, \quad \sin 2\gamma_p - 2\gamma_p = 0, \quad \cos \delta_k = 0 \quad \lambda = h/R \end{aligned}$$

Функции  $F^1, C_p^1, B_k^1$  определены в области  $S^+$ , а  $F, C_p, B_k$  — в  $S^-$ . Они должны быть найдены из условий сопряжения на боковой поверхности спая  $G$

$$\begin{aligned} (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_G + (\sigma_r^\circ + i\tau_{r\theta}^\circ)_G = (\sigma_r^1 + i\tau_{r\theta}^1)_G, \quad (\tau_{r\xi} - \tau_{r\xi}^\circ)_G = \tau_{r\xi}^1 |_G \\ (u_r + iu_\theta)_G + (u_r^\circ + iu_\theta^\circ)_G = (u_r^1 + iu_\theta^1)_G, \quad (w + w^\circ)_G = w^1 |_G \end{aligned} \quad (1.2)$$

и условий ограниченности напряжений на бесконечности.

Условия (1.2) выражают непрерывность компонент вектора перемещений и указанных напряжений при переходе через поверхность спая кусочно-однородной плиты. Величины, отмеченные градусом, относятся к сплошной однородной плите. При рассматриваемом нагружении на бесконечности для них справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_r^\circ + i\tau_{r\theta}^\circ = \frac{P}{2} \xi (1 + e^{-2i\theta}), \quad u_r^\circ + iu_\theta^\circ = \frac{P}{2} r \xi \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + e^{-2i\theta} \right) \\ w^\circ = -\frac{P}{2} \left[ \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \cos 2\theta \right) \frac{r^2}{2\lambda} + \frac{\nu \lambda \xi^2}{1+\nu} \right], \quad \sigma_r^\circ + \sigma_\theta^\circ = P\xi, \quad \sigma_\xi^\circ = \tau_{r\xi}^\circ = \tau_{\theta\xi}^\circ = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Напряжения и перемещения, возникающие во включении, выражаются через разрешающие функции по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r^1 + i\tau_{r\theta}^1 = \mu^* \left\{ \xi [2\nu_1^1 L_3 + (\nu_1^1 - 1)L_4 + i(\nu_1^1 + 1)L_5] F^1 - \xi^3 \lambda^2 \nu_2^1 L_6 * F^1 + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\xi) L_8 B_k^1 + \sum_{p=1}^{\infty} [s_p^1(\xi) + n_p^1(\xi) L_9] C_p^1 \right\} \\ \sigma_r^1 + \sigma_\theta^1 = \mu^* \left[ \xi (3\nu_1^1 - 1) \nabla^2 F^1 + \sum_{p=1}^{\infty} e_p^1(\xi) C_p^1 \right], \quad \sigma_\xi^1 = \mu^* \sum_{p=1}^{\infty} t_p^1(\xi) C_p^1 \\ \tau_{r\xi}^1 + i\tau_{\theta\xi}^1 = \mu^* \left\{ \lambda \nu_1^1 (1 - \xi^2) L_7 * F^1 + \sum_{k=0}^{\infty} i g_k(\xi) L_7 B_k^1 + \sum_{p=1}^{\infty} r_p^1(\xi) L_7 C_p^1 \right\} \\ u_r^1 + iu_\theta^1 = \xi (\nu_1^1 + 1) L_7 F^1 - \xi^3 \nu_2^1 \lambda^2 L_7 * F^1 - \sum_{k=0}^{\infty} i p_k(\xi) L_7 B_k^1 + \sum_{p=1}^{\infty} n_p^1(\xi) L_7 C_p^1 \\ w^1 = -\frac{\nu_1^1 + 1}{\lambda} F^1 - \left( \frac{\nu_1^1 - 1}{2} \xi^2 - 2\nu_1^1 \right) \nabla^2 F^1 - \sum_{p=1}^{\infty} q_p^1(\xi) C_p^1 \\ \nu_1^1 = \frac{1}{1 - 2\nu^1}, \quad \nu_2^1 = \frac{2 - \nu^1}{3(1 - 2\nu^1)}, \quad p_k(\xi) = \frac{2 \sin \delta_k \xi}{\delta_k}, \quad g_k(\xi) = -\frac{\cos \delta_k \xi}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} n_p^1(\xi) &= \lambda(\nu_1^4 s s_\xi + c s_\xi / \gamma_p + \nu_1^4 \xi c c_\xi), \quad s_p^1(\xi) = (\nu_1^4 - 1) \lambda^{-1} \gamma_p c s_\xi \\ q_p^1(\xi) &= (1 + \nu_1^4) c c_\xi - r_p^1(\xi), \quad r_p^1(\xi) = \nu_1^4 \gamma_p (s c_\xi - \xi c s_\xi) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$t_p^1(\xi) = (2 - \nu^4) (1 - \nu^4)^{-1} s_p^1(\xi) - e_p^1(\xi), \quad e_p^1(\xi) = 2s_p^1(\xi) + \gamma_p^2 \lambda^{-2} n_p^1(\xi)$$

$$c = \cos \gamma_p, \quad c_\xi = \cos \gamma_p \xi, \quad s = \sin \gamma_p, \quad s_\xi = \sin \gamma_p \xi$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad L_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad L_4 = \nabla^2 - L_3, \quad L_5 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$f_{1,m}(\sigma) = \frac{P}{2(\nu_1 + 1)} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad f_{3,m} = -\frac{P}{2} \left( \frac{\sigma}{3\nu_1 - 1} + \frac{1}{\nu_1 + 1} \frac{1}{\sigma} \right)$$

$$L_6 = L_4 - L_3, \quad L_7 = L_4 + iL_2, \quad L_8 = L_5 + \frac{i}{2} L_6, \quad L_9 = L_3 + iL_5, \quad L_j^* = L_j \nabla^2 \quad (j=1, 9)$$

Здесь  $\mu^* = \mu^1 / \mu$  — относительная жесткость включения. Для определения напряженно-деформированного состояния плиты будут справедливы формулы

$$\sigma_r^* = \sigma_r + \sigma_r^\circ, \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{r\theta} + \tau_{r\theta}^\circ, \dots, \quad w^* = w + w^\circ \quad (1.6)$$

где  $\sigma_r, \dots, w$  определяются из соотношений (1.4), если в последних опустить единицу в верхнем индексе и положить  $\mu^* = 1$ .

Таким образом, для отыскания бигармонических и метагармонических функций служит система разрешающих уравнений (1.1), общий порядок которой равен  $\nabla^{2(4+2p+2k)}$ , что требует постановки  $2(2+p+k)$  граничных условий на  $G$ . Поэтому для согласования краевых условий (1.2) с разрешающей системой уравнений (1.1) воспользуемся идеей Бубнова — Галеркина. Потребуем, чтобы невязки граничных условий (1.2) были ортогональны на отрезке  $(-1 \leq \xi \leq 1)$  полной системе функций  $\{\sin \delta_m \xi, \cos \delta_m \xi\}$ , где  $m=0, 1, \dots$ .

В результате соответствующих преобразований получим граничные условия для определения разрешающих функций. Согласно [6], их можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \kappa \varphi(\sigma) + \overline{\sigma \varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} + \kappa_m \overline{\varphi''(\sigma)} - \Omega_{1,m}(B_m, C_p) - iD_1 \sigma + D_2 - \\ & - \mu^* \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} [\kappa^1 \varphi_1(\sigma) + \overline{\sigma \varphi_1'(\sigma)} + \overline{\psi_1(\sigma)} + \kappa_m^1 \overline{\varphi_1''(\sigma)} - \Omega_{1,m}^1(B_m^1, C_p^1)] = f_{1,m}(\sigma) \\ & 8\nu_1 \operatorname{Im} \varphi'(\sigma) + \Omega_{2,m}(B_m, C_p) - \mu^* [8\nu_1^1 \operatorname{Im} \varphi_1'(\sigma) + \Omega_{2,m}^1(B_m^1, C_p^1)] + D_1(1 + \nu_1) = 0 \\ & \varphi(\sigma) + \overline{\sigma \varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} + \kappa_m \overline{\varphi''(\sigma)} - \Omega_{3,m}(B_m, C_p) - \\ & - \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} [\varphi_1(\sigma) + \overline{\sigma \varphi_1'(\sigma)} + \overline{\psi_1(\sigma)} + \kappa_m^1 \overline{\varphi_1''(\sigma)} - \Omega_{3,m}^1(B_m^1, C_p^1)] = f_{3,m}(\sigma) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\operatorname{Re}[\overline{\sigma} \varphi(\sigma) + \chi(\sigma) + \omega_m \varphi'(\sigma)] + \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp} L_{0,1} C_p -$$

$$- \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left\{ \operatorname{Re}[\overline{\sigma} \varphi_1(\sigma) + \chi_1(\sigma) + \omega_m^1 \varphi_1'(\sigma)] + \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp}^1 L_{0,1} C_p^1 \right\} = f_{4,m}(\sigma)$$

$(m=0, M+1, k=0, M, p=1, M)$

$$f_{1,m}(\sigma) = \frac{P}{2(\nu_1 - 1)} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad f_{3,m} = -\frac{P}{2} \left( \frac{\sigma}{3\nu_1 - 1} + \frac{1}{\nu_1 + 1} \frac{1}{\sigma} \right)$$

$$f_{4,m}(\sigma) = -\frac{P}{4(3\nu_1-1)} \left[ 1 + \frac{2\lambda^2\nu}{1-\nu} \left( 1 - \frac{2}{\delta_m^2} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cos 2\theta \right]$$

$$\Omega_{1,m}^1(B_m^1, C_p^1) = p_{mm}^1 (M_{5,1} + iM_{3,1}) B_m^1 + \sum_{p=1}^{\infty} [s_{mp}^1 M_{0,1} + n_{mp}^1 M_{9,1} + l_{mp}^1 M_{1,1}] C_p^1$$

$$\Omega_{2,m}^1(B_m^1, C_p^1) = g_{mm} L_{0,1} B_m^1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1+\nu_1^1}{i} l_{mp}^1 L_{1,1} C_p^1,$$

$$\Omega_{3,m}^1(B_m^1, C_p^1) = p_{mm}^1 i \sigma L_{7,1} B_m^1 - \sum_{p=1}^{\infty} n_{mp}^1 \sigma L_{7,1} C_p^1, \quad \kappa^1 = -\frac{3+\nu^1}{1-\nu^1}, \quad p_{mm}^1 = \frac{(-1)^m \delta_m}{\nu_1^1 + 1}$$

$$g_{mm} = \frac{(-1)^m \delta_m^3}{2\lambda^2}, \quad s_{mp}^1 = -\frac{\delta_m^2 \nu^1 (\gamma_p^2 - \delta_m^2)}{\lambda(1-\nu^1)} a_{mp}$$

$$\kappa_m^1 = \frac{2\lambda^2(2-\nu^1)}{1-\nu^1} \left( \frac{2}{\delta_m^2} - 1 \right), \quad a_{mp} = \frac{\cos^2 \gamma_p}{(\gamma_p^2 - \delta_m^2)^2}$$

$$n_{mp}^1 = \lambda \delta_m^2 \left( \frac{\nu^1}{1-\nu^1} \gamma_p^2 + \delta_m^2 \right) a_{mp}, \quad l_{mp}^1 = \frac{\delta_m^4 \gamma_p^2 a_{mp}}{\lambda(1-\nu^1)}$$

$$\omega_m^1 = \frac{4\lambda^2}{1-\nu^1} \left[ \nu^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta_m^2} \right) - 1 \right]$$

$$M_{l,1} \Phi = \int_0^s L_{l,1} \Phi d\sigma, \quad q_{mp}^1 = \lambda \delta_m^2 \left( -\frac{2-\nu^1}{1-\nu^1} \gamma_p^2 + \delta_m^2 \right) a_{mp}, \quad M_{1,1}^{\sim} \Phi = \int_0^s L_{1,1}^{\sim} \Phi d\sigma$$

$$L_{l,1}^{\sim} \Phi = \int_0^s i L_{l,1} \Phi ds, \quad L_{l,1} \Phi = L_l \Phi |_{\Gamma} \quad (l = \overline{1,9})$$

Здесь  $\varphi(\sigma)$ ,  $\chi(\sigma)$  и  $\varphi_1(\sigma)$ ,  $\chi_1(\sigma)$  — граничные значения комплексных потенциалов Колосова — Мухелишвили, когда  $z$  стремится к точке  $\sigma$  контура  $\Gamma$  из  $S^-$  и  $S^+$  соответственно;  $D_1$  — действительная постоянная, определяемая из условия однозначности перемещений плиты;  $D_2$  — комплексная константа, не оказывающая влияния на напряженно-деформированное состояние плиты.

**2. Определение разрешающих функций.** Искомые функции представим в виде

$$\varphi(z) = \frac{a_1}{z}, \quad B_k(z) = Z_k^- \sin 2\theta K_2 \left( \frac{\delta_k}{\lambda} r \right) / K_2 \left( \frac{\delta_k}{\lambda} \right)$$

$$\psi(z) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_3}{z^3}, \quad \chi(z) = b_1 \ln z - \frac{b_3}{2z^2}$$

$$\varphi_1(z) = \alpha_1 z + \alpha_3 z^3 \tag{2.1}$$

$$C_p(z) = X_p^- K_0 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} r \right) / K_0 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) + Y_p^- \cos 2\theta K_2 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} r \right) / K_2 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right)$$

$$\chi_1(z) = \frac{\beta_1}{2} z^2 + \beta_1, \quad \psi_1(z) = \beta_1 z, \quad B_k^1(z) = Z_k^+ \sin 2\theta I_2 \left( \frac{\delta_k}{\lambda} r \right) / I_2 \left( \frac{\delta_k}{\lambda} \right)$$

$$C_p^1(z) = X_p^+ I_0 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} r \right) / I_0 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) + Y_p^+ \cos 2\theta I_2 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} r \right) / I_2 \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right)$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательный вид системы для определения неизвестных коэффициентов  $a_1, b_1, b_3, Z_k^-, X_p^-, Y_p^-, \alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta, Z_k^+, X_p^+, Y_p^+$ :

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} E_{mp} X_p^- - \mu^* \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} E_{mp} X_p^+ = 0 \\
 & \frac{b_1}{2} - \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} G_{mp} X_p^- + \mu^* \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left( \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} G_{mp} X_p^+ - \frac{\kappa_1^4 + 1}{2} \alpha_1 \right) = -\frac{1}{4(\nu_1 + 1)} \\
 & \frac{b_1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} H_{mp} X_p^- - \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left( \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} H_{mp} X_p^+ + \alpha_1 \right) = -\frac{1}{4(3\nu_1 - 1)} \quad (2.2) \\
 & \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp} X_p^- - \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left( \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp} X_p^+ + \frac{\beta}{2} + \frac{1 + \omega_m^4}{2} \alpha_1 \right) = \\
 & = -\frac{1}{8(3\nu_1 - 1)} - \frac{\lambda^2(\nu_1 - 1)}{4(3\nu_1 - 1)(\nu_1 + 1)} \left( 1 - \frac{2}{\delta_m^2} \right) \\
 & \kappa_1 a_1 + O_m Z_m^- + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} O_{mp} Y_p^- - \mu^* \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left[ 3(1 + 2\kappa_m^4) \alpha_3 + \beta_1 + O_m^4 Z_m^+ + \right. \\
 & \left. + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} O_{mp} Y_p^+ \right] = -\frac{1}{2(1 + \nu_1)} \\
 & (2\kappa_m - 1) a_1 + \Pi_m Z_m^- + b_3 + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \Pi_{mp} Y_p^- - \\
 & - \mu^* \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left[ \kappa_1^4 \alpha_3 + \Pi_m^4 Z_m^+ + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \Pi_{mp} Y_p^+ \right] = 0 \\
 & 8\nu_1 a_1 + g_{mm} Z_m^- + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} T_{mp} Y_p^- - \mu^* \left[ 24\nu_1^4 \alpha_3 + g_{mm} Z_m^+ + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} T_{mp} Y_p^+ \right] = 0 \\
 & a_1 + O_m Z_m^- + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} R_{mp} Y_p^- \quad (2.3) \\
 & - \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left[ 3(1 + 2\kappa_m^4) \alpha_3 + \beta_1 + O_m^4 Z_m^+ + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} R_{mp} Y_p^+ \right] = -\frac{1}{2(\nu_1 + 1)} \\
 & (2\kappa_m - 1) a_1 + b_3 + \Pi_m Z_m^- - \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} S_{mp} Y_p^- - \\
 & - \frac{\nu_1^4 + 1}{\nu_1 + 1} \left[ \alpha_3 + \Pi_m^4 Z_m^+ - \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} S_{mp} Y_p^+ \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\omega_m) a_1 - \frac{b_3}{2} + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} 2q_{mp} Y_p^- \\
 & - \frac{\nu_1^4+1}{\nu_1+1} \left[ (1+3\omega_m^4) \alpha_3 + \frac{\beta_1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} 2q_{mp}^4 Y_p^+ \right] = -\frac{1}{4(\nu_1+1)} \\
 & E_{mp}^1 = l_{mp}^1 P_0^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right), \quad G_{mp}^1 = l_{mp}^1 - n_{mp}^1 P_0^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) \\
 & H_{mp}^1 = n_{mp}^1 P_0^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right), \quad T_{mp}^1 = (\nu_1^4+1) l_{mp}^1 P_2^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) \\
 & O_m^1 = \frac{1}{2} P_{mm}^1 \left[ 2+P_2^+ \left( \frac{\delta_m}{\lambda} \right) \right], \quad \Pi_m^1 = \frac{1}{2} P_{mm}^1 \left[ 2-P_2^+ \left( \frac{\delta_m}{\lambda} \right) \right] \\
 & O_{mp}^1 = \frac{1}{2} l_{mp}^1 \left[ 2-P_2^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) \right] + R_{mp}^1 \\
 & R_{mp}^1 = n_{mp}^1 \left[ 2+P_2^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) \right], \quad \Pi_{mp}^1 = \frac{1}{6} l_{mp}^1 \left[ 2+P_2^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) \right] - S_{mp}^1 \\
 & S_{mp}^1 = n_{mp}^1 \left[ 2-P_2^+ \left( \frac{\gamma_p}{\lambda} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Соответствующие выражения  $O_m, \dots, S_{mp}$  получаются из (2.4), если в последних опустить верхний индекс и  $P_2^+$  заменить на  $P_2^-$ , где

$$P_n^+(\alpha r) = \frac{n}{r} + \alpha \frac{I_{n+1}(\alpha r)}{I_n(\alpha r)}, \quad P_n^-(\alpha r) = \frac{n}{r} - \alpha \frac{K_{n+1}(\alpha r)}{K_n(\alpha r)}$$

Решив систему (2.2) методом редукции, найдем приближенные значения введенных коэффициентов, а следовательно и функций (2.1).

**3. Результаты и анализ решения.** Подставляя функции (2.1) в выражения (1.4) и (1.6), получим формулы для определения напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной плиты. В частности, для вычисления напряжений вблизи поверхности спая на площадках, нормальных к этой поверхности, будем иметь

$$\frac{1}{P} (\sigma_r^* + \sigma_\theta^*)_G = \zeta [1 - 4(3\nu_1 - 1) a_1 \cos 2\theta] + 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} e_p(\zeta) (X_p^- + Y_p^- \cos 2\theta) \tag{3.1}$$

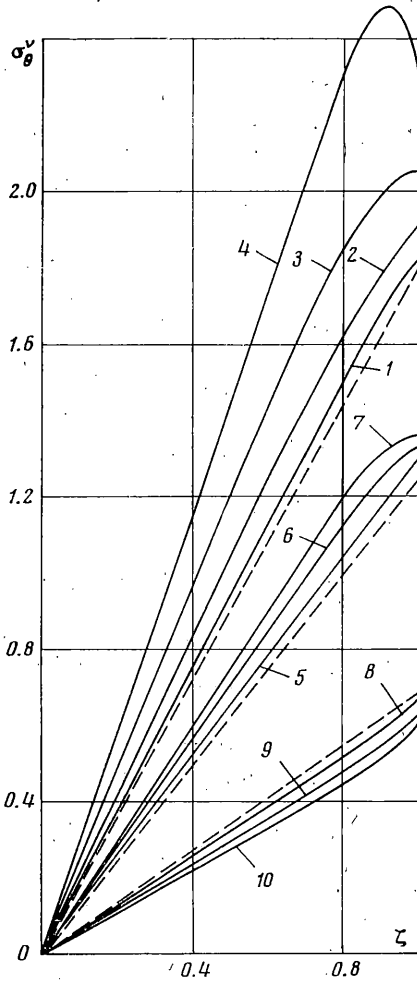
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{P} (\sigma_r^1 + \sigma_\theta^1)_G = \mu^* \left[ \zeta (3\nu_1^4 - 1) (4\alpha_1 + 12\alpha_3 \cos 2\theta) + \right. \\
 & \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} e_p^1(\zeta) (X_p^+ + Y_p^+ \cos 2\theta) \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{P} \sigma_\tau^*|_G = 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} t_p(\zeta) (X_p^- + Y_p^- \cos 2\theta)$$

$$\frac{1}{P} \sigma_\tau^1|_G = 2\mu^* \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} t_p^1(\zeta) (X_p^+ + Y_p^+ \cos 2\theta)$$

Формулы для остальных напряжений имеют аналогичный, но более громоздкий вид. Суммирование в выражениях (2.2), (2.3) и (3.1) ведется по  $\gamma_p$  из первого квадрата.

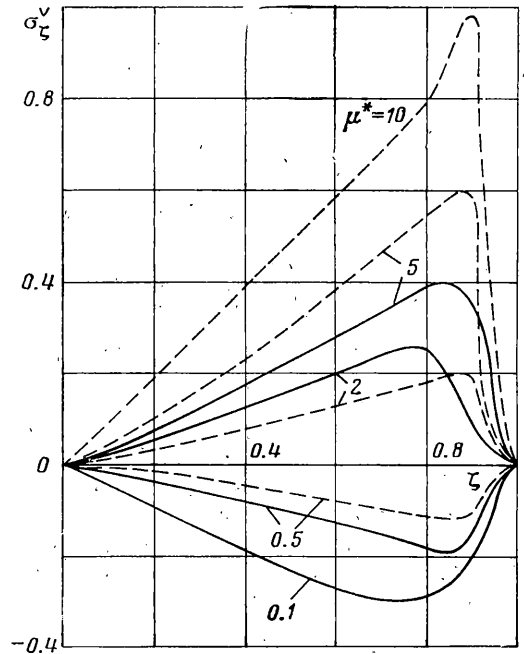
Численное исследование решения задачи осуществлено на ЭВМ. При расчетах коэффициенты Пуассона материалов плиты и включения приняты равными  $\nu = \nu_1 = 1/3$ .



Фиг. 1

Максимальный порядок каждой из систем (2.2) и (2.3) равнялся 62, что позволило удовлетворить граничным условиям (1.7) с точностью 2–5%  $P$  в широком диапазоне изменения параметров задачи  $\lambda$  и  $\mu^*$ . Напряжения вблизи  $G$  вычислены по формулам (3.1) в десяти точках по половине высоты с шагом  $\Delta\zeta = 0.1$  и с шагом  $\Delta\theta = 15^\circ$  по контуру  $\Gamma$ .

Эпюры безразмерных напряжений  $\sigma_0^{\sim} = \sigma_0^*/PG$  в плите для различных относительных толщин и жесткостей по слоям изображены на фиг. 1 (кривые 1–4 соответствуют



Фиг. 2

следующим значениям параметра  $\lambda$ : 0.1, 0.4, 1.4 при  $\mu^* = 0.1$ ; кривые 5, 6, 7 построены для  $\mu^* = 0.5$  при  $\lambda$ , равных 0.1, 1.4 соответственно; кривые 8, 9, 10 соответствуют  $\lambda = 0.1, 1.4$  при  $\mu^* = 2$ ). Указанные напряжения приведены в сечении  $\theta = \pi/2$ , где они принимают максимальные значения. Для сравнения пунктирными линиями показаны результаты расчетов по теории Кирхгофа.

С ростом жесткости происходит смещение максимальных напряжений, и при  $\mu^* = 5$  они сдвигаются из сечения  $\theta = \pi/2$  в сечение  $\theta = 0$ . Напряжения  $\sigma_z$  достигают максимума в сечении  $\theta = 0$ .

Анализ данных показывает, что с увеличением жесткости включения напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в нем возрастают, а  $\sigma_z$  в плите уменьшаются. При этом оказывается, что прикладная теория при  $\mu^* < 1$  занижает, а при  $\mu^* > 1$  завышает величины указанных напряжений. Это проявляется тем резче, чем больше толщина плиты. Так, например, при  $\mu^* = 0.1$  погрешность в определении напряжений  $\sigma_\theta$  в плите по теории Кирхгофа составляет ~3% при  $\lambda = 0.1$ , ~18% при  $\lambda = 1$  и ~30% при  $\lambda = 4$ ; во включениях при  $\mu^* = 2$  эти цифры следующие: ~6% при  $\lambda = 0.1$ , ~15% при  $\lambda = 1$  и ~25% при  $\lambda = 4$ .

Вычисленные погрешности показывают, что для плит, у которых  $\lambda < 0.4$ , с достаточной для инженерной практики точностью можно пользоваться теорией Кирхгофа при определении напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ .

Максимальные напряжения  $\tau_{\theta z}$  возникают в сечениях  $\theta = \pi/4$ . На фиг. 2 приведены графики изменения  $\sigma_z^* = \sigma_z^*/PG$  в плите при  $\theta = 0$ . Сплошные линии графиков соответствуют значениям  $\lambda = 4$ , а пунктирные —  $\lambda = 0.1$ .

Анализ полученных результатов показывает, что при  $\mu^* > 1$  с увеличением жесткости включения напряжения  $\sigma_z$ , которые в теории Кирхгофа принимаются равными нулю, растут и становятся соизмеримыми с  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ . Так, при  $\mu^* = 5$  они составляют около 40%  $\sigma_r$ , а при  $\mu^* = 10$  ( $\lambda = 0.1$ ) — достигают 70% от  $\sigma_r$ . С ростом  $\lambda$  (при одинаковых  $\mu^*$ ) максимальные значения  $\sigma_z$  уменьшаются.

Если  $\mu^* < 1$ , то с уменьшением жесткости включения напряжения  $\sigma_z$  возрастают с ростом толщины, но их величины составляют ~20% от  $\sigma_\theta$ . Изменение напряжений  $\sigma_z$  во включении носит аналогичный характер, но по абсолютной величине они больше, чем в плите.

Приведенные результаты свидетельствуют, что в толстых кусочно-однородных плитах возникает сложное напряженное состояние. Для его исследования вблизи поверхности сная необходимо использовать трехмерную теорию изгиба толстых плит.

Поступила 14 XII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
2. Аксентян О. К., Косолапов А. И. Некоторые задачи концентрации напряжений в толстых плитах. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
3. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2-3.
4. Ложкин В. Н. Концентрация напряжений при изгибе плиты средней толщины с эллиптическим отверстием. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 3.
5. Космодамианский О. С., Шалдырван Г. Г. Згин товстої плити з скінченим числом кругових циліндричних порожнин. Доп. АН УРСР, 1971, Сер. А, № 10.
6. Космодамианский О. С., Шалдырван Г. Г. Згин товстих плит із циліндричними включеннями. Доп. АН УРСР, 1973, Сер. А, № 2.