МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1977

УДК 539.3

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Г. Н. ПАВЛИК

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается осесимметричная статическая задача о контакте круглой плиты радиуса R с линейно-деформируемым основанием общего типа.

Предложен алгоритм решения задачи изгиба круглых плит на линейно-деформируемом основании, эффективный для широкого диапазона изменения безразмерных параметров λ и μ (λ – характерный геометрический параметр основания, μ – относительная жесткость плиты). Составлена универсальная вычислительная программа, в которой предусмотрена возможность изменения параметров λ, μ, ν (ν – коэффициент Пуассона материала плиты), модели основания, нагрузки на плиту, а также точности окончательных результатов.

В качестве примера изучена задача об изгибе круглой плиты на упругом слое.

Ранее аналогичная задача рассматривалась в [1–4]. Преимуществом данного подхода можно считать простоту и универсальность предлагаемого алгоритма, быструю его сходимость, возможность исследования по единой схеме изгиба плиты при различных способах ее нагружения и различных физико-механических свойствах основания.

1. Пусть круглая плита радиуса R лежит без трения на линейно-деформируемом основании общего типа. На плиту действует распределенная осесимметрично по верхней поверхности нормальная нагрузка $p_*(r')$. В зоне контакта (круг радиуса R) возникает реактивное давление $q_*(r')$.

Будем считать, что прогибы плиты описываются уравнением

$$D\Delta^2 w_*(r') = p_*(r') - q_*(r') \tag{1.1}$$

Граничные условия свободного края плиты имеют вид

$$\begin{gathered} D\left[\Delta w_*(r') - \frac{1-\nu}{r'}\frac{dw_*(r')}{dr'}\right]_{r'=R} = 0 \\ D\frac{d}{dr}\left[\Delta w_*(r')\right]_{r'=R} = 0, \quad D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $w_*(r')$ – прогиб плиты; D – цилиндрическая жесткость плиты; H – толщина плиты; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты.

Нормальные перемещения границы линейно-деформируемого основания от действия распределенной нагрузки $q_*(r')$ будут иметь вид

$$v_*(0,r') = \frac{1}{\theta h}\int_0^R q_*(\rho')\left[\frac{2}{\pi(r'+\rho')}K\left(\frac{2\sqrt{r'\rho'}}{r'+\rho'}\right) + F\left(\frac{r'}{h}, \frac{\rho'}{h}\right)\right]\rho' d\rho' \tag{1.3}$$

где θ – характеризует физико-механические свойства основания, h – характерный геометрический параметр, $K(e)$ – полный эллиптический интеграл, а функция $F(t,\tau)$ имеет вид

$$F(t,\tau)=\int_0^\infty [L(u)-1]J_0(tu)J_0(\tau u)\,du \qquad (1.4)$$

Функция $L(u)$, входящая в (1.4),— нечетная, непрерывная и обладает свойствами

$$L(u)=1+O(u^{-2}) \text{ при } u\to\infty; \quad L(u)=O(u^\gamma) \text{ при } u\to 0, \quad \gamma\geqslant 1$$

Условие контакта плиты с основанием запишется в форме

$$w_*(r')=v_*(0,r') \qquad (1.5)$$

К условиям (1.1)—(1.5) надо присоединить очевидное условие статики

$$\int_0^R [p(r')-q(r')]r'dr'=0 \qquad (1.6)$$

Введем безразмерные переменные и обозначения, принимая

$$r'=rR,\ \rho'=\rho R,\ q_*(r')=q(r)DR^{-3},\ \lambda=hR^{-1},\ p_*(r')=p(r)DR^{-3}$$
$$w_*(r')=w(r)R, \quad \mu=\theta D^{-1}R^3$$

Для новых переменных будем иметь

$$\Delta^2 w(r)=p(r)-q(r) \qquad (1.7)$$

$$\left.\Delta w(r)-\frac{1-\nu}{r}\frac{dw(r)}{dr}\right|_{r=1}=0, \quad \frac{d}{dr}[\Delta w(r)]|_{r=1}=0 \qquad (1.8)$$

и на основании (1.5), (1.6):

$$\int_0^1 q(\rho)\left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)+F\left(\frac{r}{\lambda},\frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\rho d\rho=\lambda\mu w(r) \quad (r\leqslant 1) \qquad (1.9)$$

$$\int_0^1 [p(r)-q(r)]rdr=0 \qquad (1.10)$$

2. Поставленную выше задачу можно решить, сопрягая решения двух задач: задачу изгиба тонкой круглой плиты и контактную задачу для линейно-деформируемого основания [5].

Введем в рассмотрение специальную систему полиномов $Q_k(r)$ ($k=0, 1, 2\ldots$), удовлетворяющих граничным условиям (1.8). При этом $Q_0(r)\equiv 1$, а полиномы $Q_k(r)$ ($k\geqslant 1$) ортонормируем следующим образом [6]:

$$\int_0^1 \Delta^2 Q_k(\rho)Q_m(\rho)\rho d\rho=\begin{cases}0 & (k\neq m)\\ 1 & (k=m)\end{cases} \qquad (2.1)$$

Заметим, что $Q_k(r)$ ($k\geqslant 1$) будут иметь вид

$$Q_k(r)=\sum_{s=0}^{k+1} l_s r^{2s+2} \qquad (2.2)$$

Коэффициенты l_s даны в таблице.

k	$s=0$	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
1	0.851819	−0.344002	0.076445	—	—
2	−0.942660	1,847518	−1.302656	0.334537	—
3	1.060218	−4.220414	6.643455	−4.561497	1.162520

Будем искать решение дифференциального уравнения в виде

$$w(r)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m Q_m(r) \tag{2.3}$$

Здесь коэффициенты b_m определяются из дифференциального уравнения (1.7) и условий (2.1) и (1.10)

$$\gamma_m b_m=\int_0^1 [p(r)-q(r)]Q_m(r)r\,dr,\quad \gamma_m=0 \text{ при } m=0,\quad \gamma_m=1 \text{ при } m\geqslant 1 \tag{2.4}$$

Учитывая линейность задачи, ищем решение интегрального уравнения (1.9) в той же форме, что и функцию прогиба

$$q(r)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m q_m(r) \tag{2.5}$$

Подставляя в интегральное уравнение (1.9) выражения (2.3) и (2.5), получим для определения $q_m(r)$ интегральные уравнения вида

$$\int_0^1 q_m(\rho)\left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)+F\left(\frac{r}{\lambda},\frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\rho\,d\rho=\lambda\mu Q_m(r)\ (r\leqslant 1)$$
$$(m=0,1,2,\ldots) \tag{2.6}$$

Для решения интегрального уравнения (2.6) при достаточно больших λ воспользуемся методом сведения его к бесконечной линейной алгебраической системе [7, 8].

Представим функцию $F(t,\tau)$ вида (1.4) в форме двойного ряда по четным полиномам Лежандра

$$F\left(\frac{r}{\lambda},\frac{\rho}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}\sum_{j=0}^{\infty} e_{kj}(\lambda)P_{2k}(\sqrt{1-r^2})P_{2j}(\sqrt{1-\rho^2}) \tag{2.7}$$

Функции $q_m(\rho)$ и $Q_m(r)$ также разложим в ряды

$$q_m(\rho)=\mu\sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(m)}\frac{P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}} \tag{2.8}$$

$$Q_m(r)=\sum_{k=0}^{\infty} R_k^{(m)}P_{2k}(\sqrt{1-r^2}),\quad R_k^{(m)}=0 \text{ при } k>m+2 \tag{2.9}$$

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Лежандра и интегралом [9]:

$$\int_0^1 J_0(bx)P_{2k}(\sqrt{1-x^2})\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2(2k)!!}\frac{1}{\sqrt{b}}J_{2k+1/2}(b)$$

получим для $e_{kj}(\lambda)$ выражение

$$e_{kj}=(4k+1)(4j+1)\frac{\pi\lambda(2k-1)!!(2j-1)!!}{2(2k)!!(2j)!!}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty[1-L(u)]J_{2k+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{2j+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\frac{du}{u} \tag{2.10}$$

Для определения коэффициентов $R_k^{(m)}$ имеем выражение

$$R_k^{(m)}=(4k+1)\int\limits_0^1 Q_m(\rho)P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2})\frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\quad {\scriptstyle (k\leqslant m+2)} \tag{2.11}$$

Подставляя в интегральное уравнение (2.6) функции $F(t,\tau)$, $q_m(\rho)$, $Q_m(r)$ вида (2.7)–(2.9) и используя спектральное соотношение [7]:

$$\int\limits_0^1\frac{\rho P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\frac{d\rho}{r+\rho}=\frac{\pi^2[(2m-1)!!]^2}{4[(2m)!!]^2}P_{2m}(\sqrt{1-r^2}) \tag{2.12}$$

получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $S_k^{(m)}$

$$S_k^{(m)}\frac{\pi[(2k-1)!!]^2}{2[(2k)!!]^2}=R_k^{(m)}+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty S_n^{(m)}\frac{e_{kn}(\lambda)}{4n+1} \tag{2.13}$$

Система (2.13), как доказывается в [7], квазивполне регулярна при всех $0<\lambda<\infty$. Ее можно решить методом редукции.

Найдя коэффициенты $S_k^{(m)}$, для окончательного решения задачи выражение (2.5) подставляем в (2.4) и (1.10) и решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\gamma_m b_m+\sum_{s=0}^\infty b_s c_{sm}=d_m\quad {\scriptstyle (m=0,1,2,\ldots)}\quad \gamma_m=0 \text{ при } m=0,\quad \gamma_m=1 \text{ при } m\geqslant 1 \tag{2.14}$$

$$c_{sm}=\int\limits_0^1 q_s(\rho)Q_m(\rho)\rho d\rho,\quad d_m=\int\limits_0^1 p(r)Q_m(r)rdr \tag{2.15}$$

Докажем вполне регулярность системы (2.14). Для доказательства оценим величины [7]:

$$B_m=\sum_{s=0}^\infty|c_{sm}|\quad {\scriptstyle (m=0,1,2,\ldots)} \tag{2.16}$$

На основании (2.8) и (2.15) запишем

$$|c_{sm}|=\mu\left|\int\limits_0^1\sum_{n=0}^\infty S_n^{(s)}\frac{P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}}Q_m(\rho)\rho\,d\rho\right|\leqslant\mu\max_{m,\rho[0,1]}|Q_m(\rho)|N_s$$

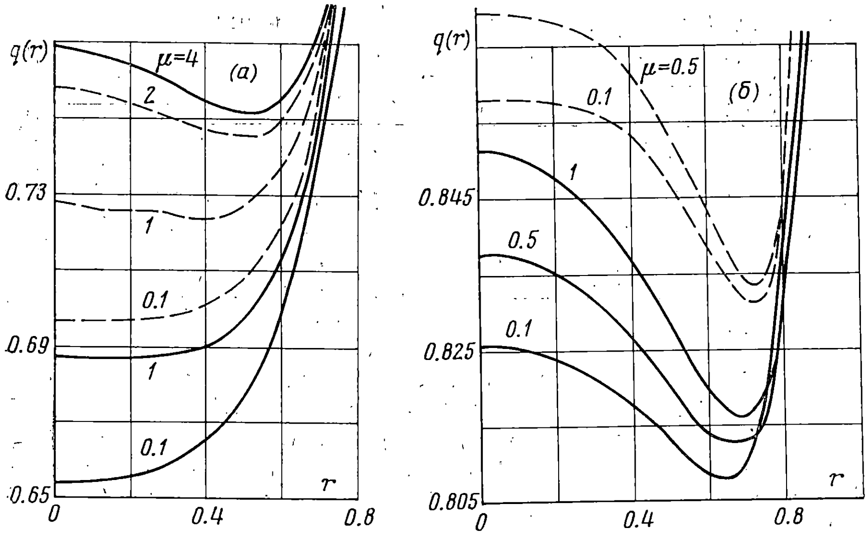
$$N_s=\int\limits_0^1\left|\sum_{n=0}^\infty S_n^{(s)}\frac{P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\right|d\rho$$

Как показывают расчеты, при $s\to\infty$ порядок убывания величин $N_s=O(a/s^{1+\alpha})$ ($\alpha>0$, $a>0$), и, следовательно, ряд (2.16) абсолютно сходится. При этом, если

$$\mu<\mu_*=\left[\max_{m,\rho[0,1]}|Q_m(\rho)|\sum_{s=0}^{\infty}N_s\right]^{-1}$$

то $B_m<1$, что и означает вполне регулярность системы (2.14).

Можно доказать, что для $0<\mu<\infty$ система (2.14) квазивполне регулярна, так как, согласно вычислениям, $\max\rho[0,1]|Q_m(\rho)|\to0$ при $m\to\infty$. Таким образом, систему (2.14) решаем методом редукции. После определения коэффициентов основные характеристики рассматриваемой задачи находятся по формулам (2.3) и (2.5).



Таким образом, решение задачи сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (2.13) и (2.14).

Следует заметить, что при уменьшении параметра λ количество уравнений в урезанной системе (2.13) необходимо увеличить, так как при $\lambda\to0$ ряд (2.7) расходится по линии $t=\tau$, и система становится неустойчивой.

Однако, как показывают расчеты, при $0.5<\lambda<\infty$ и $0<\mu\leqslant50$ практически точные решения обеспечиваются, если в системе (2.13) ограничиться 2–4 уравнениями, а в системе (2.14) – 3–5 уравнениями.

3. По изложенному выше алгоритму решения задачи изгиба круглых плит на линейно-деформируемом основании общего типа на языке «АЛГОЛ-60» составлена универсальная вычислительная программа. Относительная самостоятельность отдельных блоков программы дает возможность изменять модель основания, вид нагрузки $p(r)$, безразмерные параметры λ, μ, ν, а также точность окончательных результатов.

Для примера в качестве моделей упругого основания рассматривались: упругий слой конечной толщины h, лежащий без трения на жестком основании, и упругий слой, жестко соединенный с недеформируемым основанием. Функция $L(u)$ для этих задач соответственно задается в виде [7]:

$$L(u)=\frac{\operatorname{ch}2u-1}{\operatorname{sh}2u+2u},\quad L(u)=\frac{2\varkappa\operatorname{sh}2u-4u}{2\varkappa\operatorname{ch}2u+1+\varkappa^2+4u^2},\quad \varkappa=3-4\nu_1$$

где ν_1 – коэффициент Пуассона материала слоя.

Результаты расчетов контактного давления $q(r)$ при равномерно распределенной нагрузке $p(r)=1$ представлены на фигуре соответственно для случаев $\lambda=1$ (*а*) и $\lambda=0.5$ (*б*) ($\nu=1/6$, $\nu_1=0.3$, $\theta=G_1/(1-\nu_1)$, G_1 – модуль сдвига материала слоя).

Для первой задачи кривые нанесены сплошной линией, для второй – пунктирной. При других значениях λ и μ зависимости носят тот же характер.

Результаты расчетов хорошо согласуются с данными [2, 4].

Анализ кривых контактного давления показывает, что при уменьшении толщины слоя увеличивается давление в центральной зоне, резче проявляется действие внешней нагрузки, особенно для очень гибких плит.

Расчеты показывают, что при $\lambda \geqslant 6$ с погрешностью не более 3% можно рассматривать как частный случай задачу об изгибе пластины на упругом полупространстве.

Поступила 16 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пальмов В. А.* Контактная задача о пластинке, лежащей на упругом слое. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
2. *Цейтлин А. И.* Об изгибе круглой плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
3. *Попов Г. Я.* Пластинки на линейно-деформируемом основании. Прикл. механ. 1972, т. 8, вып. 3.
4. *Гребенщиков В. Н.* Об изгибе круглой плиты, лежащей на упругом слое. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 3.
5. *Александров В. М., Шацких Л. С.* Универсальная программа расчета изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
6. *Александров В. М., Ворович И. И., Солодовник М. Д.* Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
8. *Александров В. М.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.