

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБОЛОЧЕК ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

А. В. БУЛЫГИН

(Казань)

Рассматриваются оболочки знакопеременной кривизны, соприкасающиеся с плоскостью вдоль некоторой кривой (например, изогнутая труба, тор). Свообразие их механики может быть показано чисто геометрическими средствами. Исходными являются результаты работы [1]. В ней тип напряженного состояния связывается с введенной величиной характеристики деформации, выражающейся в конечном итоге через соотношения между энергиями деформации срединной поверхности и изгиба.

Установлено, что, «если существует бесконечно малое изгибание, удовлетворяющее тангенциальным граничным условиям, то будет существовать деформация со сколь угодно большой характеристикой, удовлетворяющая всем геометрическим граничным условиям, и нагрузка, совершающая достаточно большую работу на перемещениях этого состояния, вызовет в оболочке либо моментное в целом напряженное состояние, либо состояние с краевыми эффектами весьма высокой интенсивности» [1]. Наоборот, необходимым условием существования безмоментного напряженного состояния является отсутствие подобных изгибаний или ортогональность их по отношению к внешней нагрузке. Эти выводы можно понимать шире. На любой внутренней линии имеют место внутренние упругие связи (тангенциальные и нетангенциальные), выражающие взаимодействие примыкающих к этой линии частей оболочки. Тогда, следуя логике цитированной работы, при установлении типа напряженного состояния оболочки необходимо ввести в рассмотрение более общее бесконечно малое изгибание поверхности, определенное требованием сохранения лишь тангенциальных связей между любыми элементами поверхности. Связи в направлении нормали, как и на краю поверхности, игнорируются. Такой вид изгибаний во избежание путаницы с общеустановившимся понятием будем называть квазиизгибанием. В ряде случаев (например, оболочки положительной кривизны) это обобщение не приводит к новым результатам. Однако у поверхности знакопеременной кривизны, соприкасающейся с плоскостью по некоторой кривой, такой подход обнаруживает существенные особенности.

С точки зрения теории, оболочки данного класса обладают рядом противоречивых свойств. Так, будучи формально геометрически неизменяемыми, они в силовом отношении проявляют черту, свойственную геометрически изменяемым оболочкам: пониженную жесткость, повышенную роль изгибных факторов и в технике применяются как различного рода компенсаторы деформаций. Считается также, что теорема о возможных изгибаниях в безмоментной теории для таких оболочек нарушается.

Вскрывается внутренняя природа подобного поведения оболочки и обсуждается применимость названной теоремы. Строятся асимптотические интегралы равновесия оболочки, которые являются обобщением аналогичных результатов для осесимметричного деформации тора.

1. Построим квазиизгибания поверхности, которые описываются интегралами следующих уравнений, непрерывными только по компонентам u и v :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w = 0 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w = 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) = 0$$

где w — прогиб; v, u — тангенциальные перемещения вдоль линий $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$; k_1, k_2, B, A — соответствующие кривизны и коэффициенты первой квадратичной формы.

Пусть соприкосновение поверхности с плоскостью происходит вдоль линии Γ . Совершенно очевидно, что расположенные на Γ нормали образуют развертывающуюся (цилиндрическую) поверхность. Следовательно, по определению [2] Γ будет линией главной кривизны. Поэтому отнесем срединную поверхность к линиям кривизны, а Γ определим уравнением $\beta = 0$.

Все коэффициенты, характеризующие геометрию поверхности, в окрестности линии Γ можно представить в виде разложения по степеням β . Основная математическая особенность системы (1.1) обусловлена тем, что на кривой Γ обращается в нуль одна из главных кривизн $k_1 = \beta C(\alpha) + \dots$

Чтобы представить эту особенность в легко обозримом виде, введем новые неизвестные $v_+ = v/Ak_1$, $u_+ = u/A$. Тогда после учета соотношений Кодацци — Гаусса и исключения функции прогиба уравнения (1.1) можно записать в относительно простом виде

$$\beta^2 \frac{\partial v_+}{\partial \beta} = a_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} (b_1 u_+), \quad \frac{\partial u_+}{\partial \beta} = \beta a_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (b_2 v_+) \quad (1.2)$$

где предполагается, что коэффициенты a_i, b_i ($i=1, 2$) в окрестности $\beta=0$ отличны от нуля и не имеют особенностей. Последнее будет всегда иметь место, если в рассматриваемой окрестности отсутствуют точки в виде острия ($A, B \neq 0$), плоские участки, а касание линии $\beta=0$ с плоскостью имеет первый порядок ($k_2 = k_1 \neq 0$) и если, наконец, геодезическая кривизна линии Γ сохраняет свой знак ($\partial A/\partial \beta, \partial k_1/\partial \beta \neq 0$).

Сама линия $\beta=0$ является особой. На ней происходит смена типа уравнений и нарушается условие единственности решения задачи Коши для тангенциальных перемещений.

Для оболочки вращения переменные в системе (1.1) разделяются, и она сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям по переменной β , для которой точка $\beta=0$ является особой. Решения имеют вид, сходящихся в фиксированной окрестности степенных разложений, комбинирующихся с логарифмическими членами. В общем случае интегралы системы (1.1) будем искать по аналогии с обыкновенными уравнениями.

Их будет два типа

$$v_1 = \frac{1}{2} \pi \beta f(\alpha) + \sum_{n=2}^{\infty} V_n(\alpha) \beta^n, \quad u_1 = \beta^2 \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\alpha) \beta^n, \quad w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\alpha) \beta^n \quad (1.3)$$

$$v_2 = v^* \ln \beta + \sum_{n=0}^{\infty} V_n \beta^n, \quad u_2 = u^* \ln \beta + \sum_{n=0}^{\infty} U_n \beta^n, \quad w_2 = w^* \ln \beta + \sum_{n=0}^{\infty} W_n \beta^n \quad (1.4)$$

где $f(\alpha)$ — произвольная функция (будем называть ее начальной) v^*, u^*, w^* — некоторый интеграл системы (1.1) вида (1.3) соответствующей начальной функции $f_1(\alpha)$.

После подстановки выписанных выражений в исходные уравнения (1.1) и проведения процедуры разложения коэффициентов уравнений в ряды по β с последующим сравнением членов при одинаковых степенях

относительно коэффициентов V_n, U_n, W_n получается непротиворечивая система уравнений. Из них последовательно, при помощи алгебраических операций и дифференцирования вычисляются все коэффициенты разложений (1.3), (1.4).

Проанализируем полученные результаты. Первое решение (1.3) описывает обычное регулярное изгибание поверхности. Второе решение (1.4) представляет собой квазиизгибание, так как в нем функция прогиба на линии $\beta=0$ имеет логарифмическую особенность. Каждый из данных интегралов строится с точностью до одного функционального произвола. Однако возможно построение еще одного особого линейно-независимого интеграла, появление которого объясняется нарушением условия единственности решения.

Действительно, оба тангенциальных перемещения в первом решении обращаются в нуль на линии $\beta=0$. Поэтому выражение

$$[w_3, v_3, u_3] = [w_1, v_1, u_1] \operatorname{sign} \beta \quad (1.5)$$

будет интегралом системы (1.2) с точностью до еще одного функционального произвола. Причем тангенциальные компоненты будут непрерывны, но функция прогиба получает разрыв первого рода

$$w_3 = [{}^{1/2}\pi f_2(\alpha) + \dots] \operatorname{sign} \beta \quad (1.6)$$

Таким образом, в двухсторонней окрестности линии касания поверхности с плоскостью квазиизгибания строятся с точностью до трех функциональных произволов вместо обычных двух. Каждой линией данного типа вносится лишний функциональный произвол, который обуславливает повышенную геометрическую изменчивость данного класса поверхностей, тесно связанную с реализующимся типом напряженного состояния оболочек.

Это позволяет предположить, что для обеспечения жесткости поверхности и оболочки в любом случае становится недостаточно закрепления ее при помощи одной тангенциальной связи, и этим объясняется часто имеющая место «необъяснимая» повышенная деформативность данного класса оболочек.

2. Приведем некоторые примеры. Построение квазиизгибаний двоякозамкнутого тора после разделения переменных сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя особыми точками $\beta=0, \pi$

$$\frac{dv}{d\beta} \sin \beta = v \cos \beta + mu, \quad \frac{du}{d\beta} = \frac{u \cos \beta + mv}{1/k + \sin \beta} \quad (2.1)$$

Здесь k — параметр тора (радиус сечения, поделенный на расстояние от полюса до оси тора), m — число волн вдоль параллелей.

При $m \geq 2$, повторяя выкладки п. 1, в областях, содержащих по одной особой точке, можно построить по три частных решения этих уравнений вида (1.3)–(1.5). Состыковав их в двух общих точках (например $\beta = \pm \pi/2$), получим для каждого $m \geq 2$ по два квазиизгибания — по числу особых линий. Эти результаты находятся в полном соответствии с изложенной выше теорией, по которой с каждой особой линией связано появление дополнительного произвола.

Случаи $m=0, 1$ в этом отношении — особые. При таких m часть квазиизгибаний вырождается в перемещения поверхности как жесткого целого, и остается единственное квазиизгибание, представляющее собой взаимные осевые смещения (как жестких целых) половин тора, разрешенного по особым линиям $\beta=0, \pi$

$$w = \frac{\pi}{2} \cos \beta \operatorname{sign}(\sin \beta), \quad v = \frac{\pi}{2} |\sin \beta|, \quad u=0 \quad (2.2)$$

Данная форма квазиизгибания характеризуется наличием разрыва первого рода в функции прогиба. Примером квазиизгибания с логарифмической особенностью является следующее:

$$w = 1 + \frac{1}{k} \sin \beta + \cos \beta \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad u = \left(\frac{1}{k} + \sin \beta \right) \alpha \quad (2.3)$$

$$v = -\frac{1}{k} \cos \beta + \sin \beta \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

В этом точном решении уравнений изгибаний тороидальной поверхности (с неразделенными переменными) продольные перемещения в поперечных сечениях тора следуют закону плоскости, но являются не периодическими по координате α . Такую же деформацию можно трактовать как чистый изгиб отрезка кривой трубы, происходящий за счет сплющивания ее поперечных сечений.

К числу квазиизгибаемых относятся и кривые трубы, концы которых подкреплены диафрагмами, жесткими только в своей плоскости. Для обеспечения геометрической неизменяемости поверхности в форме части тора необходимо введение дополнительной тангенциальной связи. Примерами могут служить кривая труба, концы которой заделаны абсолютно жесткими заглушками, или тороидальный купол с полностью закрепленными параллелями.

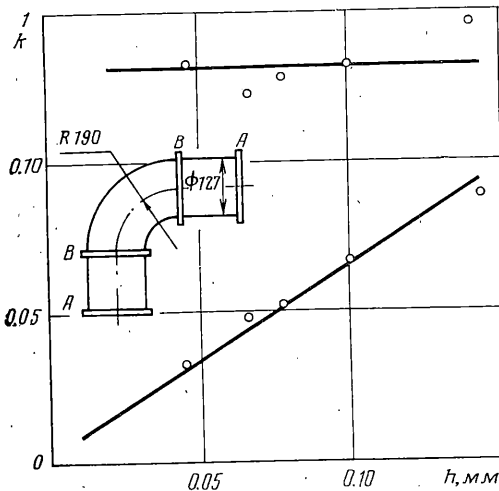
Излагаемая трактовка вопросов геометрической изменяемости позволяет по-новому взглянуть на некоторые вопросы теории. Так, представляется возможность думать, что теорема о возможных изгибаниях в безмоментной теории [3] должна быть действительной (в смяченной формулировке) и для оболочек, имеющих касание с плоскостью вдоль некоторой кривой.

Существующее ограничение сферы действия этой теоремы в отношении оболочек данного класса объясняется тем, что упущен факт существования квазиизгибаний, которые в принципе относятся к той же категории изгибаний поверхности, что и фигурирующие в условиях теоремы.

Безмоментное напряженное состояние невозможно тогда, когда существует геометрическая квазиизменяемость. Это объясняется тем, что путем соответствующей модификации квазиизгибаний методом, указанным в [1], легко строится система перемещений, удовлетворяющая всем геометрическим усло-

виям. Она будет характеризоваться малой изменяемостью и сколь угодно большой характеристикой деформации (т. е. преобладания изгиба), и на них определенные виды внешних нагрузок будут совершать немалую работу. Например, напряженное состояние тора под действием осесимметричной нагрузки будет моментным, если нагрузка на каждой половине тора содержит осевую составляющую и, следовательно, совершает работу на перемещениях вида (2.2). То же самое относится к изгибаемой по Сен-Венану кривой трубе — внешний момент будет совершать работу на перемещениях (2.3).

Иллюстрацией может служить эксперимент, описанный в [4]. Испытывались криволинейные колена с постоянной геометрией. Варьировались толщина стенки и граничные условия, которые создавались двумя парами фланцев A и B (фигура). Согласно излагаемой теории при наличии четырех фланцев оболочка является геометрически неизменяемой при отсутствии двух средних квазиизменяемой. Соответственно напряженное состояние в первом случае должно быть безмоментным, во втором — моментным. Замерялся коэффициент Кармана K (коэффициент снижения жесткости и кривой трубы по сравнению с прямой). В первом варианте он не должен зависеть от толщины стенки, во втором эта связь должна быть приближенно линейной (как в задаче Сен-Венана). Из графика видно, что предсказанные зависимости хорошо согласуются с экспериментами.



3. Рассмотрим вопрос о нахождении асимптотических интегралов моментных уравнений равновесия оболочки данного класса, которые возьмем в комплексной форме [5], приняв коэффициент Пуассона равным нулю

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \check{\sim} + i c \kappa_2 \check{\sim} &= \left(T_1^\circ + \frac{i M_2^\circ}{c} \right) \frac{1}{Eh}, & \varepsilon_2 \check{\sim} + i c \kappa_1 \check{\sim} &= \left(T_2^\circ + \frac{i M_1^\circ}{c} \right) \frac{1}{Eh} \\ 0.5 \varepsilon_3 \check{\sim} - i c \tau \check{\sim} &= \left(S^\circ - \frac{i H^\circ}{c} \right) \frac{1}{Eh}, & c &= h / \sqrt{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_1 \check{\sim}, \varepsilon_2 \check{\sim}, \varepsilon_3 \check{\sim}, \kappa_1 \check{\sim}, \kappa_2 \check{\sim}, \tau \check{\sim}$ — комплексные деформации и изменения кривизн соответственно линий $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$; $T_1^\circ, T_2^\circ, S^\circ, M_1^\circ, M_2^\circ, H^\circ$ — система статических функций. Решения будем строить в области, содержащей только одну плоскостную линию $\beta = 0$.

Предполагается, что внешняя нагрузка описывается медленно изменяющимися гладкими функциями. Поэтому допустимо использование в качестве частного интеграла уравнений безмоментного решения. Эту задачу будем считать решенной, и остается найти интегралы однородных уравнений (3.1).

Следует указать, что в данном случае безмоментные решения из-за требования регулярности на особой линии $\beta = 0$ строятся с точностью до двух, а не четырех вещественных функциональных произволов [5] (один произвол дает уравнение изгибаний, а второй — однородные безмоментные уравнения статики). Для удобства дальнейшего изложения условимся, что в частном интеграле эти произволы выбраны так, что выполняется обычное для безмоментного состояния соотношение

$$[T_1^\circ, T_2^\circ, S^\circ] \sim [w^\circ, v^\circ, u^\circ] Eh \quad (3.2)$$

Из всей совокупности интегралов однородной системы (3.1) наибольший интерес представляют те интегралы, которые связаны с квазиизгибанием поверхности. Их будем называть интегралами внутреннего краевого эффекта.

Линейно комбинируя выражение (1.4), (1.5), составим некоторое квазиизгибание $U_0 \check{\sim}$, состоящее из вещественной и мнимой частей

$$U_0 \check{\sim} [w_0 \check{\sim} Bk_2, v_0 \check{\sim}, u_0 \check{\sim}] = U_0^* [w_0^* Bk_2, v_0^*, u_0^*] + i U_0 [w_0 Bk_2, v_0, u_0] \quad (3.3)$$

которое при $\beta \rightarrow 0$ подчиняется условию

$$w_0 \check{\sim} \rightarrow (f_1(\alpha) - i f_2(\alpha)) \left(\ln \beta + i \frac{\pi}{2} \text{sign } \beta \right)$$

где $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ — произвольные, достаточно гладкие начальные функции; нулики в обозначениях введены для удобства изложения.

Отметим, что построенные квазиизгибания в областях, достаточно удаленных от особой линии, описываются регулярными функциями и могут быть приняты за асимптотический интеграл однородной системы (3.1). Однако в непосредственной окрестности особой линии это утверждение становится несостоятельным из-за имеющихся нерегулярностей квазиизгибаний.

Учитывая сказанное, на базе квазиизгибания $U_0 \check{\sim}$ построим регулярный комплексный вектор перемещений $U \check{\sim} [w \check{\sim} Bk_2, v \check{\sim}, u \check{\sim}]$, определяющий некоторую комплексную деформацию и приближенно удовлетворяющий однородной системе (3.1), а при удалении от $\beta = 0$ асимптотически выходящий на исходное квазиизгибание. Такое решение можно записать в форме интегральной свертки

$$\begin{aligned} U \check{\sim}(\alpha, \beta) &= \int_{-i}^i U_0 \check{\sim}(\alpha, \beta + \xi) \varphi(\mu \xi) d\xi, & \varphi(\mu \xi) &= \frac{\mu}{\pi} \text{Re } e(\mu \xi) \\ \mu^3(\alpha) &= \left[\frac{B^2}{c} \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \right]_{\beta=0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$e''(z) - i z e(z) = 1, \quad e(z) \sim O(1/z) \text{ при } |z| \rightarrow \infty$$

Пределы интегрирования l являются величинами порядка $O(1)$. Решения уравнения, определяющего функцию $e(z)$, приведены в [5, 6].

Можно показать, что выражающаяся через нее функция $\varphi(\mu\xi)$ обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\xi + \beta) + i \ln(\xi + \beta) \right] \left\{ \begin{array}{l} \mu\varphi''(\mu\xi) \\ -i\varphi(\mu\xi) \end{array} \right\} d\xi = e'(\mu\xi) \quad (3.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu\xi) d\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^m \varphi(\xi\mu) d\xi = 0 \quad (m=1, 2, 3) \quad (3.6)$$

При доказательстве утверждения, что выражение (3.4) является асимптотическим (при $\mu, 1/h \rightarrow \infty$) интегралом уравнений (3.1), рассматриваемую область условно поделим на следующие части: окрестность особой линии $\beta \sim O(h^{1/2})$ и отдаленная от нее область $\beta \sim O(1)$. В последнем случае доказательство производится относительно просто.

Отличительной особенностью интегрального выражения является то, что при $\mu \rightarrow \infty$ его главное значение определяется в основном окрестностью точки $\xi=0$; вклады остальных участков интегрирования из-за быстрого убывания функции $\varphi(\mu\xi)$ ($\varphi(\mu\xi) \sim \sim O(h/\beta^4)$, $\beta \sim O(1)$) асимптотически малы.

Поэтому при приближенном вычислении интегральной свертки (3.4) будет допустимой замена медленно меняющейся компоненты свертки $U_0^\vee(\alpha, \beta + \xi)$ аппроксимирующим выражением, которое хорошо описывает ее только в окрестности точки $\xi=0$. При $\beta \sim O(1)$ функция $U_0^\vee(\alpha, \beta + \xi)$ является в достаточной степени регулярной, и ее можно заменить первыми членами ряда Тейлора

$$U_0^\vee(\alpha, \beta + \xi) = U_0^\vee(\alpha, \beta) + \xi \frac{\partial U_0^\vee}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + \xi^2 R(\alpha, \beta, \xi) \quad (3.7)$$

Если подставить это выражение в (3.4) и оценить остаточный член $\xi^2 R(\alpha, \beta, \xi)$, то получим

$$U^\vee(\alpha, \beta) = U_0^\vee(\alpha, \beta) + O(h^{2/3}) \quad \text{при } \beta \sim O(1) \quad (3.8)$$

Комплексный вектор перемещений в области, удаленной от особой линии, по существу, совпадает с исходным квазиизгибанием и поэтому может быть принят за асимптотический интеграл уравнений (3.1).

Рассмотрим окрестность особой линии $\beta \sim O(h^{1/2})$. Здесь при вычислении интегральных свертки для аппроксимации вектора $U_0^\vee(\alpha, \beta + \xi)$ следует использовать разложения (1.4), (1.5), в которых в явном виде учтены нерегулярности квазиизгибаний.

Прежде чем непосредственно доказывать, что вектор $U^\vee(\alpha, \beta)$ удовлетворяет однородной системе (3.1), сделаем ряд вспомогательных вычислений. Выясним, каким деформациям срединной поверхности соответствуют системы действительных перемещений, построенные из квазиизгибаний (1.4), (1.5) при помощи операции интегральной свертки.

Выражения (1.1) для деформаций ε_i удобно представить в виде

$$\varepsilon_i = A_i(\beta) \mathbf{H}_i(\beta) \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.9)$$

где компоненты векторов A_i зависят только от геометрии поверхности, а векторов \mathbf{H}_i — лишь от перемещений. Например

$$A_1 = \left[\frac{1}{A}, \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, k_1 \right], \quad \mathbf{H}_1 = \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha}, v, w \right] \quad (3.10)$$

Зависимость A_i и \mathbf{H}_i от координаты α в записи не отражена, так как она не используется при дальнейших выкладках. Условимся векторы \mathbf{H}_i , построенные на регулярном изгибании (1.4), помечать звездочкой — \mathbf{H}_i^* . Тогда относительные деформации, соответствующие перемещениям, построенным на базе квазиизгибаний (1.4), (1.5), можно представить в виде

$$\varepsilon_i = \int_{-l}^l A_i(\beta) \mathbf{H}_i^*(\beta + \xi) \left\{ \frac{\ln(\beta + \xi)}{\pi/2 \operatorname{sign}(\beta + \xi)} \right\} \varphi(\mu \xi) d\xi + \int_{-l}^l \left(L\varphi + Q \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) d\xi \quad (3.11)$$

Как будет показано ниже, второй интеграл является асимптотически малой величиной. Поэтому временно обозначим его оценочным членом $O(h^\lambda)$, где λ — пока неопределенная величина, и сосредоточим внимание на вычислении первого интеграла.

Функции $A_i(\beta) \mathbf{H}_i^*(\beta + \xi)$ являются регулярными и в окрестности $\xi = \beta = 0$ допускают представление их в форме отрезка ряда Маклорена

$$A_i(\beta) \mathbf{H}_i^*(\beta + \xi) = A_i \mathbf{H}_i |_{\beta=\xi=0} + \beta \frac{\partial A_i \mathbf{H}_i}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\xi=0} + \xi \frac{\partial A_i \mathbf{H}_i}{\partial \xi} \Big|_{\beta=\xi=0} + R \quad (3.12)$$

где $R \sim O(\xi^2, \beta^2, \xi\beta)$ — остаточный член, который включим в оценку $O(h^\lambda)$. По определению изгибания поверхности векторы $A_i(\beta)$ и $\mathbf{H}_i^*(\beta)$ ортогональны и поэтому два первых члена в этих разложениях равны нулю.

Третий член вычисляется точно

$$\xi \frac{\partial A_i \mathbf{H}_i^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\beta=0} = \xi \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \left\{ \begin{matrix} f_1(\alpha) \\ f_2(\alpha) \end{matrix} \right\}, \quad \frac{\partial A_i \mathbf{H}_i^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\beta=0} = 0 \quad (i=2, 3)$$

Если выражения (3.13) подставить в (3.11), заменить конечные пределы интегрирования на бесконечные (с соответствующей оценкой) и учесть свойства функций φ (3.5), то получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \left\{ \begin{matrix} f_1(\alpha) \operatorname{Re} e'(\mu\beta) \\ f_2(\alpha) \operatorname{Im} e'(\mu\beta) \end{matrix} \right\} + O(h^\lambda), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = O(h^\lambda) \quad (3.14)$$

Выражение для погрешности $O(h^\lambda)$ весьма громоздко и поэтому не выписывается. Можно показать, что при $\beta \sim O(h^{1/3})$ $\lambda = 2/3$.

При вычислении кривизн будем удерживать члены, имеющие порядок не менее чем $O(h^{-2/3})$, что дает одинаковую точность определения всех членов уравнений (3.1). Перемещения, построенные из квазиизгибаний при помощи интегральной свертки, имеют порядок единицы, но могут существенно увеличиваться при дифференцировании по β ($\partial(*)/\partial\beta \sim \mu(*)$). Поэтому в выражениях для кривизн необходимо сохранить лишь вторые производные по β

$$\kappa_2 = -\frac{1}{B_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + O(h^{-1/3}), \quad \kappa_1 \sim \tau \sim O(h^{-1/3}), \quad B_0 = B_{\beta=0}$$

Для того чтобы было возможно дифференцирование под знаком интеграла, свертку для w запишем в виде

$$w = \int_{-l-\beta}^{l-\beta} \frac{B(\xi) k_2(\xi)}{B(\beta) k_2(\beta)} w_0(\xi) \varphi(\mu(\beta - \xi)) d\xi$$

Затем применяем те же приемы вычислений, что и при определении ε_i . В результате получим

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2}{B_0^2} \left\{ \begin{matrix} f_1 \ln \xi \\ f_2 \operatorname{sign} \xi \end{matrix} \right\} \varphi''(\mu(\beta - \xi)) d\xi + O(h^{-1/3}) = \\ &= \frac{\mu^2}{B_0^2} \left\{ \begin{matrix} \operatorname{Im} e'(\mu\beta) \\ \operatorname{Re} e'(\mu\beta) \end{matrix} \right\} + O(h^{-1/3}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Далее не представляет труда показать, что вектор $U(\alpha, \beta)$ в области $\beta \sim O(h^{2/3})$ является приближенным интегралом однородной системы (3.1). Для этого при помощи формул (3.14), (3.15) надо составить комплексные деформации и подставить их в уравнения (3.1), которые будут удовлетворяться с точностью до членов порядка $O(h^{2/3})$.

Таким образом, интегралы внутреннего краевого эффекта и безмоментные интегралы содержат по два вещественных произвола и, следовательно, образуют систему решений исходных уравнений (3.1) с точностью до четырех произволов, которые позволяют выполнить тангенциальные граничные условия на опорном контуре.

Чтобы удовлетворить не только тангенциальные, но и нетангенциальные граничные условия, надо обычным образом учесть простые краевые эффекты. На этом останавливаться не будем.

Интегралом внутреннего краевого эффекта можно дать простую интерпретацию. Малость величин $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \kappa_1, \tau$ означает, что приближенно выполняются соотношения полубезмоментной теории, которая весьма часто применяется при расчете кривых труб и тороидальных оболочек. Данные интегралы строятся сглаживанием нерегулярностей квазиизгибаний: разрывы вида $\ln \beta, \text{sign } \beta$ в функции прогиба порождают соответствующие деформации $\varepsilon_i \sim \text{Re } e'(\mu\beta), \text{Im } e'(\mu\beta), \kappa_2 \sim \text{Im } e'(\mu\beta), \text{Re } e'(\mu\beta)$.

Функции $e(z)$ обычно используются при решении осесимметричных и родственных с ними задач. Как видим, они сохраняют свое значение и в более общем случае, ибо изменяемость напряженного состояния по координате β получилась не зависящей от изменяемости по α (если последняя не слишком велика).

Вдали от линии $\beta=0$ интегралы внутреннего краевого эффекта имеют безмоментный характер. Но следует отметить, что их отличают значительно большие деформации по сравнению с классическим безмоментным состоянием, а именно: соотношение между усилиями и перемещениями пропорционально второй, а не первой степени толщины оболочки. Эта особенность позволяет получать определенные упрощения при решении краевых задач.

4. Рассмотрим граничные условия и их влияние на напряженное состояние оболочки. Пусть среди краевых условий имеется только одна тангенциальная связь, и оболочка является квазиизгибаемой. Это означает, что можно построить с точностью до двух функциональных произволов систему интегралов, удовлетворяющих геометрическому тангенциальному граничному условию.

Из статического граничного условия следует, что должны быть соизмеримы мембранные усилия, соответствующие безмоментному интегралу и интегралу внутреннего краевого эффекта (в точках, удаленных от особой линии). В последнем интеграле перемещения имеют порядок $O(1/h^2)$ по отношению к усилиям, а в безмоментном — только $O(1/h)$ и в данном случае являются пренебрежимо малыми. При описании напряженного состояния основное значение имеют интегралы внутреннего краевого эффекта.

Картина напряженного состояния резко меняется, если оболочка закреплена при помощи двух тангенциальных связей и является геометрически неизменяемой. Здесь становится определяющим безмоментный интеграл. Содержащиеся в нем невязки в тангенциальных граничных условиях могут быть полностью устранены при помощи произволов интегралов внутреннего краевого эффекта, но при этом вносимые ими поправки в распределение усилий (но не перемещений) будут асимптотически малыми. В такой оболочке реализуется безмоментное (в своих главных членах) напряженное состояние.

Эти соображения еще раз подтверждают высказанное выше предположение, что теорема о возможных изгибаниях поверхности справедлива и для рассмотренного класса поверхностей.

Автор глубоко признателен А. Л. Гольденвейзеру за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Геометрический критерий безмоментности напряженного состояния упругой тонкой оболочки. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1952.
3. Гольденвейзер А. Л. Теорема о возможных изгибаниях в безмоментной теории оболочек. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
4. Аксельрад Э. Л., Ильин В. П. Расчет трубопроводов. Л., «Машиностроение», 1972.
5. Черныш К. Ф. Линейная теория оболочек, ч. 1—2. Изд-во ЛГУ, 1962—1964.
6. Осипова Л. М., Тумаркин С. А. Таблицы для расчета торообразных оболочек. М., ВЦ АН СССР, 1963.