

К ТЕОРИИ УПРУГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. Н. АНДРЕЕВ, Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

(Новосибирск)

Построению теории многослойных оболочек, слабо сопротивляющихся деформации поперечного сдвига, посвящены работы [1-7].

В [1-4] основные уравнения теории слоистых оболочек получены на основе системы кинематических гипотез, принятых отдельно для каждого слоя. При этом подходе общий порядок системы уравнений существенно зависит от числа слоев.

В [5-7] уравнения изгиба получены на основе кинематических гипотез, принятых для всего пакета слоев в целом, но в [5] не установлена система внутренних усилий, отвечающая принятой гипотезе, а в [6, 7] не выполнены условия контакта для поперечных касательных напряжений.

Здесь на основе специальной гипотезы о распределении поперечных деформаций по толщине, справедливой для всего пакета слоев в целом, вариационным методом получены нелинейные уравнения движения многослойной оболочки, учитывающие поперечный сдвиг, и соответствующие граничные условия. Удовлетворены условия контакта и условия на граничных поверхностях. Показано, что общий порядок системы уравнений равен 12 и не зависит от числа слоев в оболочке. Указаны предельные переходы к уравнениям теории однослойных оболочек, учитывающей поперечный сдвиг, и к уравнениям теории многослойных оболочек, базирующейся на гипотезах Кирхгофа — Лява, принятых для всего сечения или его части.

Рассмотрена задача об осесимметричном изгибе двухслойной армированной замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным гидростатическим давлением. Показано, что если на «интегральных» характеристиках (прогибе, изгибающем моменте, окружном усилии) влияние сдвига оказывается несущественным, то для разрушающей нагрузки, за счет резко выраженных локальных эффектов, учет влияния сдвига является принципиальным. Разрушающие нагрузки при учете и без учета эффектов поперечного сдвига могут различаться между собой в несколько раз (от двух до пяти). Более того, показано, что при этом существенно меняется качественная картина возникновения разрушений.

1. Рассмотрим оболочку постоянной толщины h , собранную из m упругих анизотропных слоев также постоянной толщины. Введем на «нижней» граничной поверхности Ω тела оболочки систему криволинейных координат x^α . Здесь и всюду в дальнейшем греческие индексы принимают значения 1, 2. Пусть A_α — векторы основного координатного базиса; A^α — векторы взаимного базиса; $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой и соответственно второй квадратичных форм поверхности Ω ; z — нормальная координата, отсчитываемая вдоль нормали n к поверхности Ω до данной точки в теле оболочки.

Координатные векторы R_α , R_3 введенной пространственной системы координат x^α , z , нормально связанной с поверхностью Ω , имеют представление

$$R_\alpha = (a_{\alpha\lambda} - z b_{\alpha\lambda}) A_\lambda, \quad R_3 = n \quad (1.1)$$

Для компонент пространственного метрического тензора g имеем выражения

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2z b_{\alpha\beta} + z^2 b_{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta}, \quad g_{\alpha 3} = 0, \quad g_{33} = 1 \quad (1.2)$$

Дискриминанты тензоров g и a связаны соотношением

$$g = a(1 - 2Hz + Kz^2)^2 \quad (1.3)$$

где H — средняя кривизна Ω , K — гауссова кривизна Ω .

Поверхность раздела j и $(j+1)$ слоев описывается уравнением

$$z = h_j, \quad (j=1, \dots, m-1), \quad 0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m = h, \quad h_j = \text{const}$$

Предполагая, что каждый слой работает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, учитывая температурные эффекты и ограниченное сопротивление поперечному сдвигу, имеем

$$\sigma_{[k]}^{\alpha\beta} = A_{[k]}^{\alpha\beta\rho\omega} \varepsilon_{\rho\omega}^{[k]} - s_{[k]}^{\alpha\beta} \theta^{[k]} \quad (k=1, \dots, m), \quad \tau_{[k]}^{\alpha 3} = p_{[k]}^{\alpha\beta} \gamma_{\beta 3}^{[k]}, \quad \gamma_{\alpha 3}^{[k]} = q_{\alpha\beta}^{[k]} \tau_{[k]}^{\beta 3} \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.4) $\sigma_{[k]}^{\alpha\beta}$, $\tau_{[k]}^{\alpha 3}$ — контравариантные компоненты тензора напряжений в k слое; $\varepsilon_{\alpha\beta}^{[k]}$, $\varepsilon_{\alpha 3}^{[k]} = 1/2 \gamma_{\alpha 3}^{[k]}$ — ковариантные компоненты тензора деформаций; $\theta^{[k]}$ — приращение температуры.

2. На поверхностях раздела $z = h_j$ поперечные компоненты тензора напряжений $\tau^{\alpha 3}$, σ^{33} , а также компоненты вектора перемещений v_α , v_3 должны удовлетворять условиям непрерывности

$$v_\alpha^{[j]} = v_\alpha^{[j+1]}, \quad v_3^{[j]} = v_3^{[j+1]} \quad (2.1)$$

$$\tau_{[j]}^{\alpha 3} = \tau_{[j+1]}^{\alpha 3}, \quad \sigma_{[j]}^{33} = \sigma_{[j+1]}^{33} \quad (2.2)$$

Пусть, кроме того, на поверхностях $z=0$, $z=h$ заданы напряжения

$$\tau^{\alpha 3} = \tau_0^{\alpha 3}, \quad \sigma^{33} = \sigma_0^{33} \quad \text{при} \quad z=0 \quad (2.3)$$

$$\tau^{\alpha 3} = \tau_h^{\alpha 3}, \quad \sigma^{33} = \sigma_h^{33} \quad \text{при} \quad z=h \quad (2.4)$$

Условия (2.1) — (2.4) можно рассматривать как дополнительные связи, наложенные на механическую систему типа многослойной оболочки.

3. Примем следующий закон распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине:

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{[k]} = \gamma_{\alpha 3}^{[k]} = q_{\alpha\beta}^{[k]} [\tau_0^{\beta 3} + zh^{-1}(\tau_h^{\beta 3} - \tau_0^{\beta 3}) + f'(z)\pi^\beta], \quad \varepsilon_{33}^{[k]} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь $\pi^\beta = \pi^\beta(x^1, x^2, t)$ — независимая кинематическая характеристика, учитывающая наличие поперечного сдвига, $f(z)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами

$$f'(0) = f'(h) = 0 \quad (3.2)$$

Используя соотношения (1.4), (3.1), находим распределение поперечных касательных напряжений по толщине оболочки

$$\tau^{\alpha 3} = \tau_0^{\alpha 3} + zh^{-1}(\tau_h^{\alpha 3} - \tau_0^{\alpha 3}) + f'(z)\pi^\alpha \quad (3.3)$$

Как видно из соотношений (3.2), (3.3), поперечные напряжения $\tau^{\alpha 3}$, будучи непрерывными функциями координаты z всюду в теле оболочки, в том числе и на поверхностях раздела $z = h_j$, принимают заданные значения на граничных поверхностях $z=0$, $z=h$; тем самым удовлетворены условия (2.2) — (2.4).

Распределение перемещений $v_\alpha^{[k]} v_3^{[k]}$ по толщине многослойного пакета, отвечающее кинематической гипотезе (3.1), задаем в виде

$$\begin{aligned} v_\alpha^{[k]} &= u_\alpha + z\eta_\alpha + \psi_\alpha^{[k]}(x^1, x^2, z, t), & v_3^{[k]} &= w(x^1, x^2, t) \\ u_\alpha &= v_\alpha|_{z=0}, & \eta_\alpha &= -w_{, \alpha} - b_\alpha^\beta u_\beta \end{aligned} \quad (3.4)$$

где индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате.

Пусть R^* — радиус-вектор деформированной оболочки. Тогда с точностью до слагаемых второго порядка малости имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\alpha^{[k]}}{\partial z} - 2zb_\alpha^\omega \frac{\partial \psi_\omega^{[k]}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (zb_\alpha^\omega \psi_\omega^{[k]}) &= 2\varepsilon_{\alpha 3}^{[k]} = R_\alpha^* \cdot R_3^* - R_\alpha \cdot n \\ &(h_{k-1} \leq z \leq h_k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из непрерывности смещений при переходе через поверхности раздела $z=h_{k-1}$ следуют начальные условия

$$\psi_\alpha^{[k]}(x^1, x^2, h_{k-1}, t) = \psi_\alpha^{[k-1]}(x^1, x^2, h_{k-1}, t), \quad \psi_\alpha^{[1]}(x^1, x^2, 0, t) = 0 \quad (k=2, \dots, m) \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.5) учет членов, содержащих множителем величины zb_α^ω , нецелесообразен. С одной стороны, неучет таких членов вносит погрешность порядка h/R по сравнению с единицей (R — минимальный из радиусов кривизн семейства кривых, проходящих через данную точку поверхности Ω). С другой стороны, правая часть $2\varepsilon_{\alpha 3}^{[k]}$ системы уравнений (3.5) содержит функцию $f(z)$, выбор которой в достаточной мере произволен, и погрешность, вносимая этим произволом, может иметь такой же порядок.

Учитывая это замечание, отбросим в уравнениях (3.5) (что будем делать и во всех последующих соотношениях, отвечающих учету поперечного сдвига) указанные слагаемые. Тогда получим

$$\partial \psi_\alpha^{[k]} / \partial z = 2\varepsilon_{\alpha 3}^{[k]} \quad (3.7)$$

Интегрируя (3.6), (3.7) при $k=1, \dots, m$ и подставляя найденные функции $\psi_\alpha^{[k]}$ в соотношения (3.4), приходим к следующему закону распределения перемещений по толщине оболочки:

$$v_\alpha^{[k]} = \lambda_\alpha^{[k]} + u_\alpha + z\eta_\alpha + \mu_{\alpha\beta}^{[k]} \pi^\beta, \quad v_3^{[k]} = w(x^1, x^2, t) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^{[k]} &= \lambda_\alpha^{[k]}(x^1, x^2, z, t) = \left[\sum_{j=1}^{k-1} (h_j - h_{j-1}) q_{\alpha\beta}^{[j]} + (z - h_{k-1}) q_{\alpha\beta}^{[k]} \right] \tau_0^{\beta 3} + \\ &+ \frac{1}{2h} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (h_j^2 - h_{j-1}^2) q_{\alpha\beta}^{[j]} + (z^2 - h_{k-1}^2) q_{\alpha\beta}^{[k]} \right] (\tau_h^{\beta 3} - \tau_0^{\beta 3}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\mu_{\alpha\beta}^{[k]} = \mu_{\alpha\beta}^{[k]}(x^1, x^2, z) = \sum_{j=1}^{k-1} [f(h_j) - f(h_{j-1})] q_{\alpha\beta}^{[j]} + [f(z) - f(h_{k-1})] q_{\alpha\beta}^{[k]} \quad (3.10)$$

При одинаковых материалах слоев соотношения (3.1), (3.8) соответствуют гипотезе, учитывающей деформацию поперечного сдвига в однослойной оболочке.

Если

$$p_{[k]}^{\alpha\beta} \rightarrow \infty \quad (q_{\alpha\beta}^{[k]} \rightarrow 0) \quad (3.11)$$

то (3.1), (3.8) определяют кинематику, учитывающую поперечный сдвиг во всех слоях кроме k слоя; если в (3.11) $k=1, \dots, m$, то соотношения (3.1), (3.8) определяют кинематику, отвечающую гипотезе Кирхгофа — Лява, принятой для всего пакета слоев в целом.

Для тензора тангенциальной деформации имеем выражение

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{[k]} = \mathbf{R}_\alpha^* \cdot \mathbf{R}_\beta^* - \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta$$

Раскрывая в последнем выражении правую часть и учитывая соотношения (3.8), находим

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{[k]} = & \nabla_\alpha \lambda_\beta^{[k]} + \nabla_\beta \lambda_\alpha^{[k]} + \nabla_\alpha u_\beta - z b_\beta^\omega \nabla_\alpha u_\omega + \nabla_\beta u_\alpha - z b_\alpha^\omega \nabla_\beta u_\omega + \\ & + z (\nabla_\alpha \eta_\beta - z b_\beta^\omega \nabla_\alpha \eta_\omega) + z (\nabla_\beta \eta_\alpha - z b_\alpha^\omega \nabla_\beta \eta_\omega) + \nabla_\alpha (\mu_{\beta\omega}^{[k]} \pi^\omega) + \\ & + \nabla_\beta (\mu_{\alpha\omega}^{[k]} \pi^\omega) - 2(b_{\alpha\beta} - z b_\alpha^\omega b_{\omega\beta}) w + w_{,\alpha} w_{,\beta} + b_{\alpha\omega} b_\beta^\omega w^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

где ∇ — символ ковариантного дифференцирования на поверхности Ω . Формула (3.12) устанавливает распределение тангенциальных компонент тензора деформаций по толщине.

4. Уравнения движения и граничные условия получим из принципа возможных перемещений, согласно которому

$$\delta\Pi + \delta T = \delta E + \delta A \quad (4.1)$$

где вариация потенциальной энергии деформации $\delta\Pi$ имеет выражение

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iint_{\Omega} \int_0^h \bar{\nu} a \, dx^1 dx^2 \int_0^h (\sigma^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \tau^{\alpha 3} \delta\gamma_{\alpha 3}) \sqrt{\frac{g}{a}} \, dz = \\ = & \iint_{\Omega} \{ (-\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + b_\omega^\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\omega}) \delta u_\beta + [-b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} + \\ & + b_{\alpha\omega} b_\beta^\omega H^{\alpha\beta} w - \nabla_\beta (H^{\alpha\beta} w_{,\alpha})] \delta w + (-\nabla_\alpha S^{\alpha\beta} + Q^\beta) \delta \pi_\beta \} \bar{\nu} a \, dx^1 dx^2 + \\ & + \int_{\Gamma} \left[(T_{vi} - \sigma_i M_{vi}) \delta u_i + (T_{v\nu} + \tau_i M_{vi}) \delta u_\nu + M_{v\nu} \delta \eta_\nu + \right. \\ & \left. + \left(\nu_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} + \frac{\partial M_{vi}}{\partial s_i} + H_{iv} \frac{\partial w}{\partial s_i} + H_{v\nu} \frac{\partial w}{\partial s_\nu} \right) \delta w + S_{vi} \delta \pi_i + S_{v\nu} \delta \pi_\nu \right] ds_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$T^{\alpha\beta} = \sum_{h=1}^m \int_{h_{h-1}}^{h_h} (\sigma_{[h]}^{\alpha\beta} - z \sigma_{[h]}^{\alpha\omega} b_\omega^\beta) \sqrt{\frac{g}{a}} \, dz \quad (4.3)$$

$$M^{\alpha\beta} = \sum_{h=1}^m \int_{h_{h-1}}^{h_h} (\sigma_{[h]}^{\alpha\beta} - z \sigma_{[h]}^{\alpha\omega} b_\omega^\beta) z \sqrt{\frac{g}{a}} \, dz, \quad H^{\alpha\beta} = \sum_{h=1}^m \int_{h_{h-1}}^{h_h} \sigma_{[h]}^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g}{a}} \, dz$$

$$S_{\omega}^{\alpha\omega} = \sum_{h=1}^m \int_{h_{h-1}}^{h_h} \sigma_{[h]}^{\alpha\beta} \mu_{\beta\omega}^{[h]} \sqrt{\frac{g}{a}} \, dz, \quad T^{\alpha 3} = \sum_{h=1}^m \int_{h_{h-1}}^{h_h} \tau_{[h]}^{\alpha 3} \sqrt{\frac{g}{a}} \, dz$$

$$Q_{\omega} = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\sigma_{[k]}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \mu_{\beta\omega}^{[k]} + \tau_{[k]}^{\alpha 3} f'(z) q_{\alpha\omega}^{[k]}) \sqrt{\frac{g}{a}} dz, \quad \sigma_i = b^{\omega\alpha} t_{\omega} t_{\alpha}$$

$$\tau_i = -b_{\omega\alpha} t^{\alpha} v^{\omega}$$

где v_{α} , t_{α} — ковариантные составляющие векторов единичной нормали и касательной к граничному контуру Γ ; σ_i , τ_i — нормальная кривизна и геодезическое кручение соответственно; T_{vt} , T_{vv} , ..., u_t , u_v , ... обозначают физические составляющие соответствующих тензоров и векторов в системе координат s_i , s_v , связанной с контуром Γ .

Вариация кинетической энергии δT имеет выражение

$$\delta T = \iint_{\Omega} dx^1 dx^2 \sum_{k=1}^m \rho_{[k]} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (v_{[k]}^{\alpha} \delta v_{\alpha}^{[k]} + w^{\alpha} \delta w_{\alpha}) \sqrt{g} dz =$$

$$= \iint_{\Omega} [(X^{\alpha} - b_{\omega}^{\alpha} Y^{\omega}) \delta u_{\alpha} + (I^{\alpha} + \nabla_{\alpha} Y^{\omega}) \delta w + Z^{\alpha} \delta \pi_{\alpha}] \sqrt{a} dx^1 dx^2 - \int_{\Gamma} Y_{\nu}^{\omega} \delta w ds_t \quad (4.4)$$

где точка означает частное дифференцирование по времени t , $\rho_{[k]} = \rho_{[k]}(x^1, x^2)$ — удельная плотность материала k слоя. Кроме того, в (4.4) приняты следующие обозначения:

$$X^{\alpha} = \sum_{k=1}^m \rho_{[k]} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\lambda_{[k]}^{\alpha} + u^{\alpha} + z \eta^{\alpha} + \mu_{[k]}^{\alpha\omega} \pi_{\omega}) \sqrt{\frac{g}{a}} dz \quad (4.5)$$

$$Y^{\alpha} = \sum_{k=1}^m \rho_{[k]} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\lambda_{[k]}^{\alpha} + u^{\alpha} + z \eta^{\alpha} + \mu_{[k]}^{\alpha\omega} \pi_{\omega}) z \sqrt{\frac{g}{a}} dz$$

$$Z_{\alpha} = \sum_{k=1}^m \rho_{[k]} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\lambda_{[k]}^{\beta} + u^{\beta} + z \eta^{\beta} + \mu_{[k]}^{\beta\omega} \pi_{\omega}) \mu_{\beta\alpha}^{[k]} \sqrt{\frac{g}{a}} dz$$

$$I = w \sum_{k=1}^m \rho_{[k]} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sqrt{\frac{g}{a}} dz$$

Виртуальная работа δE внешних поверхностных нагрузок имеет выражение

$$\delta E = \iint_{\Omega} [(\tau_{*}^{\alpha 3} - h b_{\omega}^{\alpha} \tau_{*}^{\omega 3} - \tau_0^{\alpha 3}) \delta u_{\alpha} + (h \nabla_{\alpha} \tau_{*}^{\alpha 3} + \sigma_{*}^{33} - \sigma_0^{33}) \delta w +$$

$$+ \tau_{\beta 3}^{\beta} \mu_{[m]}^{\beta\alpha} (h) \delta \pi_{\alpha}] \sqrt{a} dx^1 dx^2 - \int_{\Gamma} h \tau_{*}^{\nu 3} \delta w ds_t \quad (4.6)$$

$$\tau_{*}^{\alpha 3} = (1 - 2hH + Kh^2) \tau_h^{\alpha 3}, \quad \sigma_{*}^{33} = (1 - 2hH + Kh^2) \sigma_h^{33}$$

Для виртуальной работы δA сил, приложенных к граничному контуру, имеем

$$\delta A = \int_{\Gamma} \left[(T_{vt}^{\circ} - \sigma_t M_{vt}^{\circ}) \delta u_t + (T_{vv}^{\circ} + \tau_t M_{vt}^{\circ}) \delta u_v + M_{vv}^{\circ} \delta \eta_v + \right.$$

$$\left. + \left(T_{v3}^{\circ} + \frac{\partial M_{vt}^{\circ}}{\partial s_t} \right) \delta w + S_{vt}^{\circ} \delta \pi_t + S_{vv}^{\circ} \delta \pi_v \right] ds_t \quad (4.7)$$

Подставляя выражения (4.2), (4.4), (4.6), (4.7) в вариационное уравнение (4.1) и приравнявая между собой множители при независимых вариациях δu_α , δw , $\delta \pi_\alpha$ ($\alpha=1, 2$) отдельно в поверхностном и контурном интегралах, приходим к системе дифференциальных уравнений движения элемента многослойной оболочки

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - b_\omega^\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\omega} - \dot{X}^{*\beta} + b_\omega^\beta Y^{*\omega} &= \tau_0^{\beta 3} - \tau_*^{\beta 3} + h b_\omega^\beta \tau_*^{\omega 3} \\ b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} - b_{\alpha\omega} b_\beta^\omega H^{\alpha\beta} w + \nabla_\beta (H^{\alpha\beta} w_{,\alpha}) - I^{**} - \nabla_\alpha Y^{*\alpha} &= \sigma_0^{33} - \sigma_*^{33} - h \nabla_\alpha \tau_*^{\alpha 3} \\ \nabla_\alpha S^{\alpha\beta} - Q^\beta - Z^{*\beta} &= -\tau_{\alpha 3}^h \mu_{[m]}^{\alpha\beta}(h) \end{aligned} \quad (4.8)$$

и соответствующей системе граничных условий

$$\begin{aligned} (R_{vi} - R_{vi}^\circ) \delta u_i &= 0, \quad (R_{vv} - R_{vv}^\circ) \delta u_v = 0, \quad (M_{vv} - M_{vv}^\circ) \delta \eta_v = 0 \quad (4.9) \\ \left[\nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} + \frac{\partial M_{vi}}{\partial s_i} + H_{iv} \frac{\partial w}{\partial s_i} + H_{vv} \frac{\partial w}{\partial s_v} - Y_v^{**} - T_{v3}^\circ - \frac{\partial M_{vi}^\circ}{\partial s_i} + h \tau_h^{v3} \right] \delta w &= 0 \\ (S_{vi} - S_{vi}^\circ) \delta \pi_i &= 0, \quad (S_{vv} - S_{vv}^\circ) \delta \pi_v = 0 \\ R_{vi} &= T_{vi} - \sigma_i M_{vi}, \quad R_{vv} = T_{vv} + \tau_i M_{vi} \end{aligned}$$

При решении динамических задач уравнения движения (4.8) и граничные условия (4.9) должны быть дополнены начальными условиями.

Система уравнений (4.8) при учете соотношений (1.4), (3.1), (3.12), (4.3), (4.5) является системой пяти нелинейных дифференциальных уравнений 12 порядка относительно функций w , u_α , π_α ($\alpha=1, 2$). Отбрасывая в соотношениях (3.12) и в соответствии с этим в уравнениях (4.8) и граничных условиях (4.9) нелинейные члены, приходим к уравнениям линейной теории слоистых оболочек.

Отметим, что первые три уравнения системы (4.8) совпадают по написанию с системой уравнений классической теории оболочек, базирующейся на гипотезе о недеформируемых нормалях. Два последних уравнения этой системы выражают равенство нулю обобщенных сил, отвечающих учету поперечных сдвиговых деформаций.

5. Рассмотрим задачу об осесимметричном изгибе круговой цилиндрической оболочки с жесткими днищами, нагруженной внутренним гидростатическим давлением интенсивности P . Будем предполагать, что оболочка собрана из m ортотропных слоев, каждый из которых армирован для определенности либо в продольном, либо в окружном направлении. Пусть R — радиус направляющей окружности, $2L$ — длина оболочки. Начало системы координат поместим в середине пролета и обозначим $x=x^1$ расстояние, отсчитываемое вдоль образующей, $\varphi=x^2$ — полярный угол.

В силу осевой симметрии нагрузки и условий закрепления уравнения равновесия (4.8) и граничные условия (4.9) принимают вид

$$\frac{dT_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 M_{xx}}{dx^2} - \frac{T_{\varphi\varphi}}{R} = -P, \quad \frac{dS_{xx}}{dx} - Q_x = 0 \quad (5.1)$$

$$u_x = \frac{dw}{dx} = \pi_x = \frac{dM_{xx}}{dx} = 0 \quad \text{при } x=0 \quad (5.2)$$

$$w = \frac{dw}{dx} = \pi_x = 0, \quad T_{xx} = \frac{1}{2} PR \quad \text{при } x=L$$

В (5.1), (5.2) T_{xx} , M_{xx} , ... обозначают физические составляющие соответствующих тензоров. Выражая T_{xx} , M_{xx} , $T_{\varphi\varphi}$, S_{xx} , Q_x через перемещения при помощи соотношений (1.4), (3.1), (3.12), (4.3) и подставляя эти

выражения в уравнения (5.1), приходим к системе трех линейных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно функций w , u_x , π_x . Сведем ее к системе восьми уравнений, каждое из которых имеет первый порядок. С этой целью введем следующие безразмерные параметры и переменные:

$$\beta_j = \frac{h_j}{h} \quad (j=0, 1, \dots, m), \quad \gamma = \frac{h}{R}, \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad a_{ij}^{[k]} = E_k^c b_{ij}^{[k]} \quad (i, j=1, 2)$$

$$G_k = E_k^c t_k, \quad \frac{E_k^c}{E_1^c} = m_k, \quad \frac{E_k^c}{E_k^a} = n_k, \quad x = L\xi, \quad U_1 = \frac{T_{xx}}{Ph}, \quad w = \frac{Ph}{E_1^c} U_2$$

$$\frac{dU_2}{d\xi} = U_3, \quad u_x = \frac{PL}{E_1^c} U_4, \quad U_5 = \frac{M_{xx}}{Ph^2}, \quad U_6 = \frac{dU_5}{d\xi}, \quad \pi_x = \frac{PL}{h^3} U_7, \quad U_8 = \frac{E_1^c}{Ph^4} S_{xx}$$

Здесь E_k^c, E_k^a — модули Юнга связующего и армирующих элементов k слоя; $G_k, a_{ij}^{[k]}$ ($i, j=1, 2$) — модули поперечных сдвигов и элементы матрицы тангенциальных жесткостей k слоя.

Полагая $f(z) = z^3 - 3/2 h z^2$ и пренебрегая в выражениях для усилий и моментов членами порядка h/R по сравнению с единицей, приходим к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений осесимметричного изгиба многослойной ортотропной оболочки, которую запишем в матричной форме

$$A \frac{dU'}{d\xi} = BU + g \tag{5.3}$$

где не зависящие от ξ элементы матриц A, B и вектора g определяются формулами (нулевые элементы не выписаны)

$$A_{11}=1, \quad A_{22}=1, \quad A_{33} = -\frac{1}{2} \gamma^2 \delta^2 \sum_{h=1}^m \omega_{11h}^{(2)}, \quad A_{34} = \sum_{h=1}^m \omega_{11h}^{(1)}$$

$$A_{37} = \sum_{h=1}^m \left[-\frac{1}{2} \delta_{11h}^{(3)} + \frac{1}{4} \delta_{11h}^{(4)} + \beta_{h-1} \left(\frac{3}{2} - \beta_{h-1} \right) \delta_{11h}^{(1)} - \left(\frac{3}{2} \varepsilon_h - \chi_h \right) \omega_{11h}^{(1)} \right]$$

$$A_{43} = -\frac{1}{3} \gamma^2 \delta^2 \sum_{h=1}^m \omega_{11h}^{(3)}, \quad A_{44} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^m \omega_{11h}^{(2)}, \quad A_{47} = \sum_{h=1}^m \left[-\frac{3}{8} \delta_{11h}^{(4)} + \frac{1}{5} \delta_{11h}^{(5)} + \beta_{h-1} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \beta_{h-1} \right) \delta_{11h}^{(2)} - \left(\frac{3}{4} \varepsilon_h - \frac{1}{2} \chi_h \right) \omega_{11h}^{(2)} \right], \quad A_{55}=1$$

$$A_{63} = -\frac{1}{2} \gamma^3 \delta^2 \sum_{h=1}^m \omega_{12h}^{(2)}, \quad A_{64} = \gamma \sum_{h=1}^m \omega_{12h}^{(1)}, \quad A_{66} = -\gamma^2 \delta^2$$

$$A_{67} = \gamma \sum_{h=1}^m \left[-\frac{1}{2} \delta_{12h}^{(3)} + \frac{1}{4} \delta_{12h}^{(4)} + \beta_{h-1} \left(\frac{3}{2} - \beta_{h-1} \right) \delta_{12h}^{(1)} - \left(\frac{3}{2} \varepsilon_h - \chi_h \right) \omega_{12h}^{(1)} \right]$$

$$A_{73} = -\gamma^2 \delta^2 A_{47}, \quad A_{74} = A_{37}, \quad A_{77} = \sum_{h=1}^m \left\{ b_{11}^{[k]} \left[\beta_h m_k \left(-\frac{3}{2} \varepsilon_{h+1} + \chi_{h+1} \right)^2 - \beta_{h-1} m_k \left(-\frac{3}{2} \varepsilon_h + \chi_h \right)^2 \right] - \frac{1}{t_k m_k} \left[\frac{6}{7} \delta_{11h}^{(7)} - \frac{5}{2} \delta_{11h}^{(6)} + \frac{9}{5} \delta_{11h}^{(5)} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_{k-1} \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} \beta_{k-1} \right) \delta_{11k}^{(4)} - \beta_{k-1} (3 - 2\beta_{k-1}) \delta_{11k}^{(3)} - \left(\frac{9}{4} \varepsilon_k - \frac{3}{2} \chi_k \right) \omega_{11k}^{(4)} + \\
& \quad \left. + (3\varepsilon_k - 2\chi_k) \omega_{11k}^{(3)} \right\}, \quad A_{88} = B_{23} = B_{31} = 1, \quad B_{32} = -\gamma \sum_{k=1}^m \omega_{12k}^{(1)} \\
& B_{42} = -\frac{1}{2} \gamma \sum_{k=1}^m \omega_{12k}^{(2)}, \quad B_{45} = B_{56} = 1, \quad B_{62} = -\gamma^2 \sum_{k=1}^m \omega_{22k}^{(1)} \\
& B_{72} = -A_{67}, \quad B_{78} = 1, \quad B_{87} = \frac{9}{\gamma^2 \delta^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{t_k m_k} \left[\frac{1}{3} (\beta_k^3 - \beta_{k-1}^3) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{5} (\beta_k^5 - \beta_{k-1}^5) - \frac{1}{2} (\beta_k^4 - \beta_{k-1}^4) \right], \quad g_6 = 1, \quad \omega_{ijk}^{(l)} = b_{ij}^{[k]} m_k (\beta_k^l - \beta_{k-1}^l) \\
& \delta_{ijk}^{(l)} = \frac{b_{ij}^{[k]}}{t_k} (\beta_k^l - \beta_{k-1}^l), \quad \varepsilon_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta_j^2 - \beta_{j-1}^2}{m_j t_j}, \quad \chi_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta_j^3 - \beta_{j-1}^3}{m_j t_j}
\end{aligned}$$

Граничные условия для системы уравнений (5.3) имеют вид

$$\begin{aligned}
U_3 = U_4 = U_6 = U_7 = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \\
U_1 = 1/2\gamma, \quad U_2 = U_3 = U_7 = 0 \quad \text{при } \xi = 1
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Для того чтобы перейти к граничной задаче, отвечающей гипотезе Кирхгофа — Лява, необходимо в матрицах A , B вычеркнуть два последних столбца и две последних строчки; при этом в векторах U , g необходимо вычеркнуть два последних элемента. Кроме того, из граничных условий (5.4) необходимо исключить те, которые соответствуют вычеркнутым элементам (U_7).

Нетрудно проверить, что вектор

$$\begin{aligned}
V = (V_1, V_2, 0, \xi V_4, V_5, 0, 0, V_8)', \quad V_1 = \frac{1}{2\gamma}, \quad V_2 = \frac{A_{64} - 2\gamma A_{34}}{2\gamma (A_{34} B_{62} - A_{64} B_{32})} \\
V_4 = \frac{1}{A_{64}} + \frac{B_{62}}{A_{64}} V_2, \quad V_5 = A_{44} V_4 - B_{42} V_2, \quad V_8 = A_{74} V_4 - B_{72} V_2
\end{aligned}$$

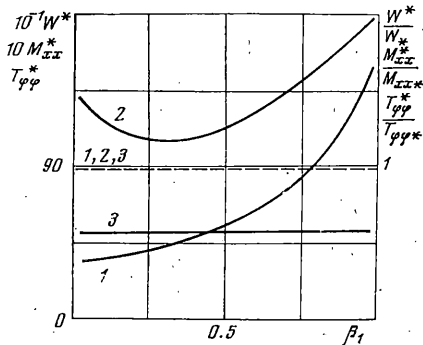
(где штрих — знак транспонирования) является частным решением системы (5.3). Далее достаточно найти общее решение однородной системы уравнений

$$dU/d\xi = A^{-1}BU = CU \tag{5.5}$$

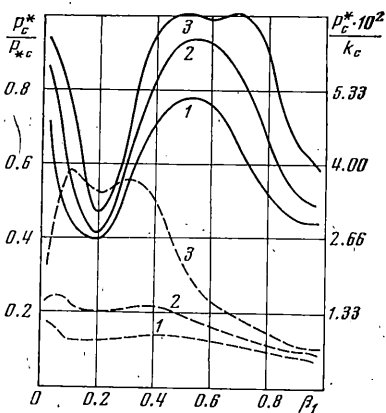
что, как известно, сводится к решению полной проблемы собственных значений для матрицы C . При численном решении этой задачи может быть использован обобщенный метод вращений [8].

В качестве численного примера решена задача изгиба и начального разрушения двухслойной оболочкой, первый слой которой армирован в продольном направлении, второй — в окружном, причем использовалась модель армированного тела, предложенная в работе [9].

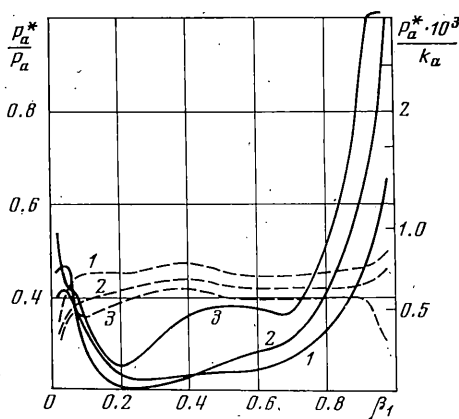
Полагалось, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{z1} = \omega_{z2} = 0.5$, где ω_h , ω_{zh} — интенсивности армирования в поверхности и в направлении толщины h слоя. Коэффициенты Пуассона всех материалов считались равными 0.3; остальные параметры имели значения $\gamma = 0.02$, $\delta = m_1 = m_2 = 1$.



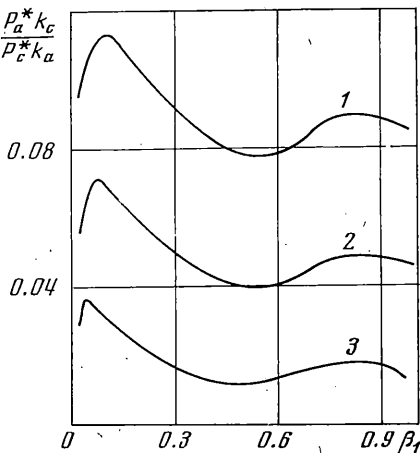
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Путем сравнения максимальных значений безразмерных прогиба W^* , изгибающего момента M_{xx}^* , окружного усилия $T_{\varphi\varphi}^*$, найденных при учете сдвига с аналогичными величинами W^* , M_{xx}^* , $T_{\varphi\varphi}^*$, найденными по классической теории, установлено, что учет сдвига оказывает несущественное влияние на указанные интегральные характеристики.

На фиг. 1 сплошными линиями приведены зависимости W^* , M_{xx}^* , $T_{\varphi\varphi}^*$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) от параметра $\beta_1 = h_1/h$, найденные с учетом сдвига при $n_1 = n_2 = 0.04$, и пунктирными линиями — отношения этих величин к аналогичным величинам, найденным по классической теории. Из фиг. 1 видно, что результаты расчета по той и другой теории отличаются не более чем на 1%.

Совершенно иной оказывается ситуация при оценке влияния учета поперечного сдвига на локальные характеристики напряженного состояния, которыми определяется, в частности, прочность слоистой конструкции. Пусть $P_c^*(P_a^*)$ обозначает нагрузку начального разрушения связующего (армирующих элементов), найденную по условию Мизеса

$$\max_{x,z} \{ \sigma_{xxc}^2(a) + \sigma_{\varphi\varphi c}^2(a) - \sigma_{xxc}(a)\sigma_{\varphi\varphi c}(a) + 3\tau_{xz c}^2(a) \} = k_{c(a)}^2 \quad (5.6)$$

(где $k_{c(a)}$ — предел текучести при растяжении связующего (с) или арматуры (a)) при учете поперечного сдвига, $P_{*c}(P_{*a})$ — ту же величину, найденную без учета сдвига из условия (5.6), в котором согласно статической гипотезе Кирхгофа напряжением τ_{xz} пренебрегается по сравнению с нормальными напряжениями.

На фиг. 2, 3 сплошными линиями изображены зависимости $P_c^*/P_{*c}(P_a^*/P_{*a})$, а пунктирными — $P_c^*/k_c(P_a^*/k_a)$ от параметра $\beta_1 = h_1/h$, найденные при $n_1 = n_2 = 0.04$,

0.02, 0.0067 (кривые 1, 2, 3 соответственно). Видно, что P_c^* может быть меньше P_{*c} более чем в два раза, а P_a^* может быть меньше P_{*a} почти в пять раз. Эти результаты указывают на принципиальную необходимость учета поперечного сдвига при оценке прочности слоистых армированных конструкций.

Отметим, что при изменении параметра β_1 происходит не только изменение положения точки начального разрушения, но может меняться и его характер. Так, для связующего при $\beta_1 < 0.9-0.95$ характерным является разрушение от осевых напряжений, при этом опасная точка располагается на поверхности $z=h$ второго слоя, в окрестности сечения $\xi=0.8$. При дальнейшем увеличении β_1 возможен переход к разрушению связующего первого слоя от окружных напряжений, при этом опасная точка располагается на поверхности $z=h_1$ в окрестности сечения $\xi=0.45$.

Для армирующих элементов при $\beta_1 < 0.9-0.95$ также характерно разрушение от осевых напряжений, при этом опасная точка располагается на поверхности $z=0$ первого слоя, в середине пролета ($\beta_1 < 0.6$) или в окрестности сечения $\xi=0.8$ ($\beta_1 > 0.6$). При дальнейшем увеличении β_1 возможен переход к разрушению армирующих элементов второго слоя от окружных напряжений с точкой начального разрушения, лежащей на поверхности $z=h_1$ в окрестности сечения $\xi=0.4$.

На фиг. 4 приведены зависимости величины $P_a^*k_c/(P_c^*k_a)$ от параметра β_1 , найденные при $n_1=n_2=0.04, 0.02, 0.0067$ (кривые 1, 2, 3). Эти зависимости позволяют при фиксированном отношении k_c/k_a выяснить, какой из элементов композиции начнет разрушаться первым.

Поступила 22 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Бологин В. В. К теории слоистых плит. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 3.
2. Григорюк Э. И., Чулков П. П. Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким наполнителем. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5.
3. Либреску Л. К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек, ч. I. Механика полимеров, 1975, № 6.
4. Новичков Ю. Н. Нелинейная теория и устойчивость толстых многослойных оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
5. Рябов А. Ф. Основные уравнения теории многослойных оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений, № 3. Киев, «Будівельник», 1965.
6. Прусаков А. П. Нелинейные уравнения изгиба пологих многослойных оболочек. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 3.
7. Терезулов А. Г. К теории многослойных анизотропных оболочек. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 6-7. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1970.
8. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М., «Наука», 1966.
9. Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин. Механика полимеров, 1972, № 5.