где Θ_0 и Ψ_0 — начальные значения углов Эйлера. При отсутствии неуравновешенностей рамок карданова подвеса ($P_1l_1=P_2l_2=0$) формулы (13), (14), (18), (19) переходят в соответствующие зависимости, полученные в работе [2].

Поступила 19 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л.* О движении свободного гироскопа при равномерном вращении основания. Изв. вузов. Приборостроение, 1963, т. 6, № 5.
2. *Ильчанинов В. П.* Влияние принудительного вращения карданова подвеса на движение астатического гироскопа Изв. вузов. Приборостроение, 1970, т. 13, № 12.
3. *Лунц Я. Л.* Ошибки гироскопических приборов. Л., «Судостроение», 1968.
4. *Смолицкий Х. Л.* Ошибки гироскопа в кардановом подвесе, находящегося на подвижном основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.

УДК 517.926; 531.15

ОБ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ПУАССОНА И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИИ

А. К. ЛАПКОВСКИЙ, В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

(*Могилев*)

Предлагается итерационный метод интегрирования обобщенных уравнений Пуассона в виде ортогональных матриц, на основе которых получена последовательность векторов истинного поворота.

Будем считать, что ориентация твердого тела определяется положением жестко связанной с телом (правой) системы координат $\Sigma_2\{\mathbf{e}_{(2)1}, \mathbf{e}_{(2)2}, \mathbf{e}_{(2)3}\}$ относительно подвижной (правой) системы $\Sigma_1\{\mathbf{e}_{(1)1}, \mathbf{e}_{(1)2}, \mathbf{e}_{(1)3}\}$. Связанный базис векторов Σ_2 выражается через базис Σ_1 при помощи собственно ортогональной матрицы $g(t)$ в форме $\Sigma_2=\Sigma_1 g$.

Если $\omega_{(\varepsilon)}$, $\varepsilon=1, 2$ — матрица угловой скорости (см. [1], стр. 107), соответствующая по правилу дуальности вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{(\varepsilon)}=\omega_{(\varepsilon)}{}^i\mathbf{e}_{(\varepsilon)i}$, $i=1, 2, 3$ системы Σ_ε, то обобщенные кинематические уравнения Пуассона (для подвижных осей) запишутся так:

$$g^{(1)}=g\omega_{(2)}-\omega_{(1)}g \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем, знак m-й производной по t отмечен буквой m вверху в скобках, т. е., например, $g^{(1)}=dg\,/\,dt$. Из кинематических соображений ясно, что решение системы (1) следует искать в виде

$$g=G_1^{-1}(t)\,g(0)\,G_2(t), \quad G_\varepsilon(0)=E, \quad G_\varepsilon^{-1}G_\varepsilon=E$$

Легко проверяется, что G_ε есть решение системы

$$C_\varepsilon^{(1)}=G_\varepsilon\omega_{(\varepsilon)} \tag{2}$$

Систему (2) для каждого ε предлагается решать методом итерации. На первом шаге ищем G_ε в виде $G_\varepsilon=A_{(\varepsilon)1}\exp\left(\omega_{(\varepsilon)}(0)t\right)$, откуда находим, что $A_{(\varepsilon)1}$ удовлетворяет системе

$$\overset{-1}{A}_{(\varepsilon)1}\overset{(1)}{A}_{(\varepsilon)1}=\exp\left(\omega_{(\varepsilon)}(0)\,t\right)\int\limits_0^t\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(\tau)\,d\tau\exp\left(-\omega_{(\varepsilon)}(0)\,t\right) \tag{3}$$

Обозначив правую часть системы (3) через $\omega_{(\varepsilon)1}(t)$, разложим $\omega_{(\varepsilon)1}(t)$ по формуле Тейлора:

$$\omega_{(\varepsilon)1}(t)=\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)\,t+\int\limits_0^t(t-\tau)\,\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(\tau)\,d\tau$$

Здесь использованы легко проверяемые равенства $\omega_{(\varepsilon)1}(0)=0$, $\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(0)=\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)$.

Решение системы (3) ищем снова в виде $A_{(\varepsilon)1}=A_{(\varepsilon)2}\exp\left(\frac{1}{2!}\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)t^2\right)$,

причем матрица $A_{(\varepsilon)2}$ удовлетворяет следующей системе:

$$\overset{-1}{A}_{(\varepsilon)2}\overset{(1)}{A}_{(\varepsilon)2}=\exp\left(\frac{1}{2!}\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)t^2\right)\int_0^t(t-\tau)\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(\tau)\,d\tau\exp\left(-\frac{1}{2!}\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)t^2\right) \tag{4}$$

Обозначив правую часть системы (4) через $\omega_{(\varepsilon)2}(t)$, разлагаем $\omega_{(\varepsilon)2}(t)$ по формуле Тейлора:

$$\omega_{(\varepsilon)2}(t)=\frac{1}{2!}\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(0)t^2+\frac{1}{2!}\int_0^t(t-\tau)^2\,\overset{(3)}{\omega}_{(\varepsilon)2}(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

Здесь использованы равенства $\omega_{(\varepsilon)2}(0)=\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)2}(0)=0$, $\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)2}(0)=\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(0)$.

С учетом разложения (5) решение системы (4) ищем в виде

$$A_{(\varepsilon)2}=A_{(\varepsilon)3}\exp\left(\frac{1}{3!}\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(0)t^3\right)$$

Продолжая этот процесс, **находим** $A_{(\varepsilon)k-1}=A_{(\varepsilon)k}\exp\left(\frac{1}{k!}\overset{(k-1)}{\omega}_{(\varepsilon)k-2}(0)t^k\right)$,

причем

$$\overset{-1}{A}_{(\varepsilon)k}\overset{(1)}{A}_{(\varepsilon)k}=\omega_{(\varepsilon)k}(t),\qquad \omega_{(\varepsilon)k}(t)=$$

$$=\exp\left(\frac{1}{k!}\overset{(k-1)}{\omega}_{(\varepsilon)k-2}(0)t^k\right)\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{k-1}\,\overset{(k)}{\omega}_{(\varepsilon)k-1}(\tau)\,d\tau\exp\left(-\frac{1}{k!}\overset{(k-1)}{\omega}_{(\varepsilon)k-2}(0)t^k\right)$$

Для дальнейшего, как и выше, применяем формулу Тейлора:

$$\omega_{(\varepsilon)k}(t)=\frac{1}{k!}\overset{(k)}{\omega}_{(\varepsilon)k-1}(0)t^k+\frac{1}{k!}\int_0^t(t-\tau)^k\,\overset{(k+1)}{\omega}_{(\varepsilon)k}(\tau)\,d\tau\qquad(k=1,2,\ldots,n,\ldots)$$

с учетом равенств $\omega_{(\varepsilon)k}(0)=\ldots=\overset{(k-1)}{\omega}_{(\varepsilon)k}(0)=0$, $\overset{(k)}{\omega}_{(\varepsilon)k}(0)=\overset{(k)}{\omega}_{(\varepsilon)k-1}(0)$.

Из выше изложенного следует, что решение $g(t)$ системы (1) представимо в виде бесконечного произведения матриц

$$g(t)=\ldots\exp\left(-\frac{1}{k!}\overset{(k-1)}{\omega}_{(1)k-2}(0)t^k\right)\ldots\exp\left(-\frac{1}{2!}\overset{(1)}{\omega}_{(1)}(0)t^2\right)\exp(-\omega_{(1)}(0)t)g(0)\times$$

$$\times\exp(\omega_{(2)}(0)t)\exp\left(\frac{1}{2!}\overset{(1)}{\omega}_{(2)}(0)t^2\right)\ldots\exp\left(\frac{1}{k!}\overset{(k-1)}{\omega}_{(2)k-2}(0)t^k\right)\ldots \tag{6}$$

Бесконечное произведение (6) сходится равномерно на некотором отрезке $t\in[0,\ \delta]$, $\delta>0$. Это следует из равномерной сходимости бесконечного произведения, построенного в [2].

Достоинством построенного решения (6) является его ортогональность на любом итерационном шаге. К недостаткам следует отнести требование высокого порядка гладкости и даже аналитичности матриц $\omega_{(\varepsilon)}(t)$. Однако предложенный метод проще в реализации, чем метод из работы [2].

Отметим, что решению (6) сопоставляется две последовательности векторов истинного поворота $\theta_{(\varepsilon)m}$, $m=1, 2, \ldots$ (см. [1], стр. 150):

$$\theta_{(\varepsilon)1}=\omega_{(\varepsilon)}(0)t, \qquad \theta_{(\varepsilon)2}=\frac{1}{2!}\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)t^2, \qquad \theta_{(\varepsilon)3}=\frac{1}{3!}\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(0)t^3=$$

$$=\frac{1}{3!}[\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)+2\omega_{(\varepsilon)}(0)\times\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)]t^3, \qquad \theta_{(\varepsilon)k+1}=\frac{1}{(k+1)!}\overset{(k)}{\omega}_{(\varepsilon)k-1}(0)t^{k+1}$$

Здесь векторы $\omega_{(\varepsilon)}(0)$, $\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)$, $\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(0)$, $\ldots$, $\overset{(k)}{\omega}_{(\varepsilon)k-1}(0)$ соответствуют по правилу дуальности матрицам $\omega_{(\varepsilon)}(0)$, $\overset{(1)}{\omega}_{(\varepsilon)}(0)$, $\overset{(2)}{\omega}_{(\varepsilon)1}(0)$, $\ldots$, $\overset{(k)}{\omega}_{(\varepsilon)k-1}(0)$.

Поступила 12 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
2. *Fer F.* Resolution de l'equation matricielle $dU/dt=pU$ par produit infini d'exponentielles matricielles. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, t. 44, No 10, p. 818–829.