

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ВРАЩАЮЩИМСЯ ТЕЛОМ КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В. В. ДЕМЧЕНКО

(Москва)

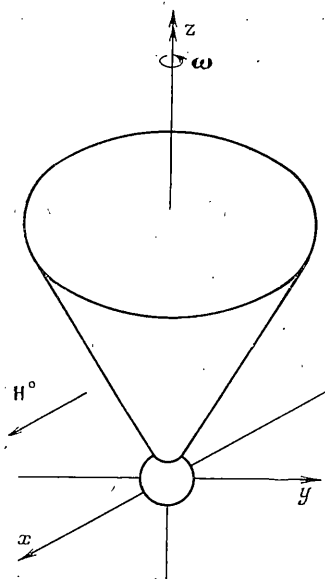
Задача об изучении распределения магнитного поля в телах, вращающихся в магнитном поле, была предметом многочисленных исследований [1-4]. Интерес к подобному рода задачам связан с интенсивным развитием современной техники и, в первую очередь, космической [6-11]. Силы и моменты магнитной природы необходимо учитывать при анализе движения искусственных спутников на околоземных орбитах, а также при полетах к планетам солнечной системы [6, 7]. Кроме того, решение подобного рода задач может представлять интерес для специалистов, работающих в области теории магнитных гироскопов, электрических машин с различными формами роторов, в установках по удержанию плазмы и при изучении волновых процессов [12-15].

Ряд работ [1, 3, 7, 8, 11, 14] посвящен нахождению распределения магнитного поля и определению момента сил в телах сферической и цилиндрической форм. При решении различного рода практических задач необходимо знать эти величины для тел более сложной формы. Впервые такая задача для тела произвольной конфигурации в наиболее общем виде поставлена в [8], где предложен численный метод решения соответствующей краевой задачи, приводящий в общем случае к сложным вычислениям.

Для ряда практических задач нет необходимости рассматривать все явления магнитной природы, а можно ограничиться таким кругом физических процессов, которые допускают получение решения в аналитическом виде, например распределение магнитного поля, обусловленное токами Фуко. В этом случае вся проблема состоит в удовлетворении граничным условиям на сложной поверхности.

В данной работе предлагается метод, учитывающий специфику такого рода задач, и в качестве примера рассматривается задача о нахождении магнитного поля внутри и вне тела конической формы со сферическим замыканием границ (фигура), вращающегося с постоянной угловой скоростью в однородном магнитном поле. Решение этой задачи позволяет в дальнейшем находить силы, моменты и другие характеристики взаимодействия, зависящие от поля.

1. Рассмотрим задачу о распределении магнитного поля в теле конической формы, вращающемся с постоянной угловой скоростью в однородном магнитном поле. Пусть тело представляет собой ограниченную область, лежащую внутри конической поверхности  $\theta = \theta_0$ , граница которой образована самой этой поверхностью и сферическими поверхностями  $r = a$  и  $r = b$  (фигура). Предполагается, что физические характеристики материала, из которого изготовлено тело, известны. Заданы угловая скорость вращения тела  $\omega$  и внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{H}_0$ .



Задача рассматривается в квазистационарном приближении. Уравнения электродинамики для области, ограниченной телом, имеют вид [1]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \tau \mathbf{j} = \mathbf{E} \quad (1.1)$$

Отсюда после преобразований получаем уравнение

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\mu \mu_0}{\tau} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.2)$$

в котором  $\tau$  — удельное электрическое сопротивление,  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества. Если для определенности считать, что в инерциальной системе поле  $\mathbf{H}_0$  направлено по оси  $x$ , то в системе вращающейся вместе с телом, поле  $\mathbf{H}_0$  в сферических координатах будет определяться соотношениями

$$H_{0r} = H_0 \sin \theta \cos(\varphi + \omega t),$$

$$H_{0\theta} = H_0 \cos \theta \cos(\omega t + \varphi), \quad H_{0\varphi} = -H_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.3)$$

Вектор  $\mathbf{H}$  будем искать в виде  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(r, \theta, \varphi) \exp(-i\omega t)$ . После подстановки  $\mathbf{H}$  в (1.2) получим векторное уравнение Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} = 0, \quad k_0^2 = i\omega \mu \mu_0 \tau^{-1} = (1+i)^2 \delta^{-2} \quad (1.4)$$

Будем в дальнейшем отмечать индексом  $\alpha$  величины, относящиеся к области, ограниченной телом, а индексом  $\beta$  — к внешней области.

Решением векторного уравнения Гельмгольца (1.4) будет функция [5]:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{r} H^\alpha) \quad (1.5)$$

где  $H^\alpha$  — решение скалярного уравнения Гельмгольца. Общее решение скалярного уравнения Гельмгольца в сферической системе координат имеет вид [3]:

$$H^\alpha = \sum_n \sum_m r^{-1/2} [A_n J_{n+1/2}(k_0 r) + B_n J_{-n-1/2}(k_0 r)] \times \\ \times [C_n^m P_n^m(\cos \theta) + D_n^m Q_n^m(\cos \theta)] [E_m \exp(im\varphi) + F_m \exp(-im\varphi)] \quad (1.6)$$

где  $A_n, B_n, C_n^m, D_n^m, E_m, F_m$  — произвольные постоянные,  $J_{\pm n \pm 1/2}(k_0 r)$  — функции Бесселя с полуцелым индексом,  $P_n^m(\cos \theta), Q_n^m(\cos \theta)$  — присоединенные функции Лежандра.

Учитывая, что для диа- и парамагнитных тел  $\mu$  близко к единице [1], будем в дальнейшем полагать  $\mu = 1$ . Требование непрерывности нормальных составляющих вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и касательных составляющих вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  на границе поверхности тела приводит к граничным условиям

$$H_r^\alpha = H_r^\beta, \quad H_\theta^\alpha = H_\theta^\beta, \quad H_\varphi^\alpha = H_\varphi^\beta \quad (1.7)$$

в которых нижние индексы обозначают проекции на оси сферической системы координат.

Для поточечного удовлетворения граничным условиям требуется разложить решение по собственным функциям краевой задачи. Если поверхность тела представляет собой совокупность участков координатных поверхностей различного типа, как в рассматриваемом случае, то задача становится достаточно сложной. Предлагается рассматривать решение, которое удовлетворяет исходной системе уравнений и граничным условиям в новом, интегральном смысле. Это означает, что граничные условия не-

будут удовлетворяться тождественно в каждой точке, а только в среднем по некоторой области.

Пусть граничная поверхность разбита на  $N$  непересекающихся областей. Тогда по каждой из  $N$  областей в целом граничные условия выполняются тождественно, но во внутренних точках этой области тождество может нарушаться. Понятно, что если выбрать размеры областей достаточно малыми, скажем  $\varepsilon$ -окрестности точек, то при стремлении  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение будет сходиться к точному, так как оно удовлетворяет исходной системе уравнений и с любой степенью точности граничным условиям. Под точным решением подразумевается решение задачи, удовлетворяющее исходной системе уравнений и граничным условиям в обычном смысле. Естественно, нужно делать разбиение на области так, чтобы в местах резкого изменения решения их было больше, а монотонного, плавного — меньше.

В рассматриваемом случае в качестве первого приближения проинтегрируем граничные условия (1.7) по всей поверхности. Если, например, из общего решения удержать только три гармоники (две для внутренней области и одну — для внешней), то в результате получим систему из трех линейных уравнений для определения трех неизвестных постоянных. При разбиении области интегрирования на большее число частей можно учитывать большее число гармоник. В пределе, таким образом, можно получить решение, сколь угодно близкое к точному.

Рассмотрим физическую картину явления. Для этого введем другую сферическую систему координат с осью  $z$ , коллинеарной  $H_0$ . Если магнитное поле, вызывающее вихревые токи, не зависит от  $\varphi$  и не имеет  $\varphi$ -составляющей, то плотность тока  $\mathbf{j}$  имеет только  $\varphi$ -составляющую [3]  $\mathbf{j} = e_\varphi j_\varphi(r, \theta, t)$ .

Это соответствует случаю, когда первоначальное поле постоянно и направлено по оси  $z$ . Из условия непрерывности нормальных составляющих вектора плотности тока на границе тела следует, что плотность вихревых токов в конической части тела будет равна нулю. Все токи будут сосредоточены в шаре радиуса  $b$ . Создаваемое этими токами магнитное поле будет препятствовать изменению магнитного потока, вызванного вращением тела. При уменьшении радиуса  $b$  плотность токов будет увеличиваться, и, когда  $b=0$ , поле, обусловленное этими токами, достигнет бесконечно большой величины в некоторой окрестности нулевой точки. Если нулевая точка не будет принадлежать телу, то поле, порождаемое вращением, будет целиком обусловлено токами смещения, что в свою очередь приводит к выводу о зависимости вторичного поля не только от физических свойств тела, но и от его формы.

Как было сказано выше, задачу о нахождении момента сил, действующего на тело, предполагается решать в два этапа: сначала определить магнитный момент, обусловленный вихревыми токами, а затем найти момент сил.

Из физических соображений ясно, что вихревые токи, ответственные за магнитный момент, будут сосредоточены в шаре радиуса  $b$ . Поэтому необходимо наиболее точно удовлетворить граничным условиям на сферической поверхности меньшего радиуса. С другой стороны, общее решение исходной системы уравнений записано в сферической системе координат, что позволяет точно удовлетворить граничным условиям на сферических поверхностях. Отсюда вытекает, что приближенность получаемого решения в основном будет связана с тем, что граничные условия на конической поверхности выполняются в среднем на участках, по которым ведется интегрирование. Однако это будет оказывать незначительное влияние на магнитный момент, обусловленный вихревыми токами.

Покажем, что в данной задаче всегда можно выбрать радиус меньшей сферы  $b$  так, что вклад в решение от всех гармоник, кроме первой, будет незначительным. С этой целью разобьем всю поверхность тела на  $N$  областей интегрирования и обозначим их через  $S_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). Если через  $g$  и  $f$  обозначить число гармоник, учитываемых в решении во внешней и внутренней областях соответственно, а через  $j$  число независимых граничных условий, то, очевидно,  $f+g=jN$ . Пусть  $\eta$  областей не имеют общих точек со сферической поверхностью радиуса  $b$ ,  $\lambda$  областей полностью принадлежат этой поверхности, а  $p$  областей имеют точки, как принадлежащие ей, так и не принадлежащие.

Интегрируя граничные условия (1.7) по всем указанным областям  $S_i$ , получим систему уравнений

$$GD = L \quad (1.8)$$

$$G = \begin{vmatrix} A_{11}^r & \dots & A_{1f}^r & B_{11}^r & \dots & B_{1g}^r \\ A_{11}^0 & \dots & A_{1f}^0 & B_{11}^0 & \dots & B_{1g}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1}^0 & \dots & A_{Nf}^0 & B_{N1}^0 & \dots & B_{Ng}^0 \\ A_{N1}^\varphi & \dots & A_{Nf}^\varphi & B_{N1}^\varphi & \dots & B_{Ng}^\varphi \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \\ B_1 \\ \vdots \\ B_g \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} H_1^r \\ \vdots \\ \vdots \\ H_N^\varphi \end{vmatrix}$$

$$A_{in}^r = \iint_{S_i} H_{rn}^\alpha dS, \quad B_{ik}^r = \iint_{S_i} H_{rk}^\beta dS, \quad A_{in}^0 = \iint_{S_i} H_{0n}^\alpha dS, \quad B_{ik}^0 = \iint_{S_i} H_{0k}^\beta dS$$

$$A_{in}^\varphi = \iint_{S_i} H_{\varphi n}^\alpha dS, \quad B_{ik}^\varphi = \iint_{S_i} H_{\varphi k}^\beta dS, \quad H_i^r = \iint_{S_i} H_{0r} dS$$

$$H_i^0 = \iint_{S_i} H_{00} dS, \quad H_i^\varphi = \iint_{S_i} H_{0\varphi} dS$$

где  $n$  и  $k$  обозначают порядковый номер гармоники. Для того чтобы система уравнений (1.8) была совместна, определитель матрицы  $G$  должен быть отличен от нуля. Покажем, что если решение задачи существует и единственно, то соответствующим выбором областей интегрирования и числа учитываемых гармоник можно добиться того, чтобы определитель системы был отличен от нуля.

Так как решение предполагается существующим, то оно содержится в общем решении. Пусть установлено, через какие именно гармоники представляется это решение. Разобьем поверхность, на которой задаются граничные условия, на  $N$  непересекающихся областей. В силу того, что решение удовлетворяет исходной системе уравнений и граничным условиям в каждой точке поверхности, граничные условия будут выполняться и по каждой из рассматриваемых областей в целом. Следовательно, если проинтегрировать эти условия по всем областям, покрывающим граничную поверхность, то равенство не нарушится. В силу существования и единственности решения задачи определитель получаемой системы должен быть отличен от нуля. Отсюда вытекает вывод, что соответствующим выбором гармоник общего решения и областей интегрирования всегда можно добиться того, чтобы определитель получаемой системы был отличен от нуля.

Сравнивая  $A_{in}^j$  и  $B_{ik}^j$ , полученные в результате интегрирования по разным областям, учитывая, что  $b \ll a$ , и принимая во внимание, что все  $A_{in}^j$  представимы в виде ряда по положительным степеням  $a$  и  $b$ , а  $B_{ik}^j$

пропорциональны  $a$  и  $b$  в отрицательных степенях, приходим к выводу, что  $A_{in}^j$  и  $H_i^j$  ( $i \in \lambda$ ) пренебрежимо малы по сравнению с  $A_{in}^j$  и  $H_i^j$  ( $i \in \eta$ ), а  $B_{in}^j$  ( $i \in \eta$ ) малы по сравнению с  $B_{in}^j$  ( $i \in \lambda$ ). Из общего вида  $B_{in}^j$  видно, что они пропорциональны  $b^{-k}$ , когда  $i \in m+p$  и  $b \ll a$ . Это означает, что  $B_{in}^j$  будут порядка  $k$  по  $b$ . Следовательно, для любого фиксированного  $k$  можно выбрать такое  $b_k$ , что для  $b < b_k$  при  $k > 1$  все  $B_k$  будут достаточно малы по сравнению с  $B_1$ . Это позволяет в дальнейшем учитывать только первую гармонику в общем решении для внешней области, предполагая, что радиус меньшей сферы выбран соответствующим образом.

Приведенный анализ показывает, что в задаче по определению момента сил можно ограничиться тем случаем, когда учитываются только три гармоники: две в решении для внутренней области и одна — для внешней.

В этом случае решение для области внутри тела будет иметь вид

$$H^\alpha = Ar^{-1/2} J_{3/2}(k_0 r) P_1^1(\cos \theta) \cos(\varphi + \omega t) + Br^{-1/2} J_{1/2}(k_0 r) P_3^1(\cos \theta) \cos(\varphi + \omega t) \quad (1.9)$$

Для области вне тела из основных уравнений электродинамики имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (1.10)$$

После преобразований получим уравнение  $\Delta \mathbf{H} = 0$ .

Решение уравнения  $\Delta \mathbf{H} = 0$  будем искать в виде

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} H^\beta + \mathbf{H}_0 \quad (1.11)$$

где через  $H^\beta$  обозначим решение скалярного уравнения Лапласа  $\Delta H^\beta = 0$ , а через  $\mathbf{H}_0$  — однородное поле внешних источников. С учетом первой гармоники функция  $H^\beta$ , удовлетворяющая условиям задачи и граничным условиям, имеет вид

$$H^\beta = Cr^{-2} \sin \theta \cos(\varphi + \omega t) \quad (1.12)$$

$C$  — произвольная постоянная.

Запишем граничные условия (1.7) по компонентам. Для области внутри тела будем иметь равенства

$$\begin{aligned} H_r^\alpha &= 2Ar^{-3/2} J_{3/2}(k_0 r) \sin \theta \cos(\varphi + \omega t) + \\ &+ 12Br^{-3/2} J_{1/2}(k_0 r) P_3^1(\cos \theta) \cos(\varphi + \omega t) \\ H_\theta^\alpha &= \frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^{1/2} J_{3/2}(k_0 r)] \cos \theta \cos(\varphi + \omega t) + \\ &+ \frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^{1/2} J_{1/2}(k_0 r)] \frac{\partial}{\partial \theta} [P_3^1(\cos \theta)] \cos(\varphi + \omega t) \\ H_\varphi^\alpha &= -\frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^{1/2} J_{3/2}(k_0 r)] \sin(\varphi + \omega t) - \\ &- \frac{B}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} [r^{1/2} J_{1/2}(k_0 r)] P_3^1(\cos \theta) \sin(\varphi + \omega t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

а для области вне тела

$$\begin{aligned} H_r^\beta &= (-2Cr^{-3} \sin \theta + H_0 \sin \theta) \cos(\varphi + \omega t) \\ H_\theta^\beta &= (Cr^{-3} \cos \theta + H_0 \cos \theta) \cos(\varphi + \omega t) \\ H_\varphi^\beta &= (-Cr^{-3} - H_0) \sin(\varphi + \omega t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Интегрируя эти соотношения по всей поверхности тела, относительно постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  приходим к системе из трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$2AA_1 + 9BB_1 + 2CC_1 = H_0 H_1, \quad \frac{1}{2}AA_2 + BB_2 + \frac{1}{4}CC_2 = H_0 H_2, \quad AA_3 + \frac{3}{4}BB_3 = H_0 H_3 \quad (1.15)$$

где  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, H_1, H_2, H_3$  — постоянные, полученные в результате интегрирования по  $S$ .

В качестве примера рассмотрим предельный случай, когда радиус меньшей окружности  $b$  достаточно мал, а угол  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ . Из (1.15) находим  $A, B$  и  $C$

$$A = \frac{H_0(-3H_1B_3C_2 + 24H_2B_3C_1 + 36H_3B_1C_2 - 32H_3C_1B_2)}{-6A_1B_3C_2 + 12A_2B_3C_1 + 36A_3B_1C_2 - 32A_3B_2C_1}$$

$$B = \frac{H_0(-4A_1H_3C_2 + 8A_2H_3C_1 + 2A_3H_1C_2 - 16A_3H_2C_1)}{-3A_1B_3C_2 + 6A_2B_3C_1 + 18A_3B_1C_2 - 16A_3B_2C_1} \quad (1.16)$$

$$C = \frac{H_0(16A_1B_2H_3 - 12A_1B_3H_2 - 36A_2B_1H_3 + 3A_2B_3H_1 + 72A_3B_1H_2 - 8A_3B_2H_1)}{-3A_1B_3C_2 + 6A_2B_3C_1 + 18A_3B_1C_2 - 16A_3B_2C_1}$$

Считая, что  $\delta \gg a$ , получаем<sup>1</sup>

$$A = \left(\frac{\pi k_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3H_0}{2k_0^2}, \quad B = -0.794 \left(\frac{\pi k_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{H_0}{k_0^2}, \quad C = 0.148a^4 b H_0 k_0^2 \quad (1.17)$$

Этот случай часто реализуется на практике [9].

2. Определим момент сил, действующий на тело. Из решения краевой задачи видно, что в случае, когда  $b$  достаточно мало, можно ограничиться рассмотрением только одной гармоники для внешнего поля. Тогда поле вне тела имеет вид

$$\mathbf{H} = \text{grad } H^p + \mathbf{H}_0, \quad H^p = Cr^{-2} \sin \theta \cos(\varphi + \omega t) = H_0 \frac{C}{H_0} \text{grad} \left(\frac{1}{r}\right)$$

После преобразований [1] получаем

$$\mathbf{H} = \frac{C}{H_0} [3\mathbf{e}_r(\mathbf{H}_0 \mathbf{e}_r) - \mathbf{H}_0] + \mathbf{H}_0 \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{e}_r$  — орт по переменной  $r$ .

Из сравнения этого равенства с выражением для магнитного момента следует, что магнитный момент тела будет иметь вид  $C\mathbf{H}_0 H_0^{-1}$ . Магнитный момент  $\mathbf{M}_m$  системы связан с механическим моментом сил  $\mathbf{M}$  соотношением

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_m \times \mathbf{H}_0] \quad (2.2)$$

В случае, когда  $b$  достаточно мало,  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$  и  $\delta \gg a$ , проекция  $\mathbf{M}$  на ось вращения  $z$  будет равна

$$M \approx 0.15a^4 b \omega \mu_0 (H_0)^2 \tau^{-1}$$

Отметим, что использованный метод позволяет решить задачу для тела конической формы со сферическим замыканием границ. Это ни в коем

<sup>1</sup> Если  $\delta \ll a$ , то из (1.16) можно получить другой предельный случай, что соответствует скин-эффекту.

случае не ограничивает его применение и для более сложных задач, где найдено общее решение, и вся проблема состоит в удовлетворении граничным условиям на сложной поверхности. Причем задача удовлетворения граничным условиям сводится к поверхностным интегралам и решению системы линейных уравнений. Применение ЭВМ дает возможность учесть необходимое число гармоник и получить практически точный результат.

Поступила 19 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
2. Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
5. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Зонов Ю. В. К вопросу о взаимодействии спутника с магнитным полем Земли. В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 3. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 118—124.
7. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
8. Голубков В. В. Момент сил в магнитном поле. Космические исследования, 1972, т. 10, вып. 1.
9. Яншин А. М. Экспериментальное определение моментов от вихревых токов. Космические исследования, 1975, т. 13, вып. 2.
10. Микишев Г. Н., Юферов И. П. Экспериментальный метод определения коэффициента момента диссипативных сил, действующих на КА при его вращении в магнитном поле. Космические исследования, 1975, т. 13, вып. 6.
11. Halverson R. P., Cohen H. Torque on a spinning hollow sphere in a uniform magnetic field. IEEE Trans. Aerospace and Navig. Electron., 1964, vol. 11, No. 2, p. 118.
12. Лебедев Н. Н., Конторович М. И. О применении формул обращения к решению некоторых задач электродинамики. ЖЭТФ, 1939, т. 9, вып. 6.
13. Метлин В. Б. Магнитные и магнитогидродинамические опоры. М., «Энергия», 1968.
14. Урман Ю. М., Линьков Р. В. Вращающийся шар в магнитном поле. Ж. техн. физ., 1973, т. 43, вып. 12.
15. Алексин В. Ф., Романов С. С. Проникновение квазистационарных магнитных полей внутрь проводящих камер. Ж. техн. физ., 1973, т. 43, вып. 6.