МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1977

УДК 531.55:521.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В. Н. ЖЕРМОЛЕНКО, Б. Я. ЛОКШИН

(*Москва*)

Отличительной особенностью движения в воздухе осесимметричного вращающегося оперенного летательного аппарата типа ракеты является возникновение перекрестных аэродинамических связей [1]. Наиболее существенная из них связана с эффектом типа эффекта Магнуса [2], обусловленным наличием оперения и вращения вокруг оси симметрии.

В случае стационарного обтекания возможен стационарный режим движения аппарата, устойчивость которого при различных предположениях исследовалась в ряде работ, в частности, в [3–8]. В действительности, если скорость вращения не слишком велика, обтекание аппарата может происходить нестационарным образом. Полной информации о характере такого обтекания не имеется, но можно указать диапазон, в котором изменяется угловая скорость крена. В этих условиях также требуется обеспечить устойчивость вынужденных, но уже нестационарных режимов движения.

В данной работе предлагаются два подхода к получению достаточных условий устойчивости нестационарных режимов движения аппарата. В обоих подходах особое внимание уделяется оценке коэффициента момента Магнуса и максимально допустимой угловой скорости крена.

В первом подходе используются идеи абсолютной устойчивости [9, 10], во втором — идеи технической устойчивости (устойчивости на конечном промежутке времени [11, 12]). Полученные аналитические результаты иллюстрируются примером.

1. Рассмотрим движение в воздухе осесимметричного вращающегося оперенного летательного аппарата. Необходимо, чтобы в процессе полета такого аппарата его ось симметрии достаточно хорошо отслеживала переменное направление вектора скорости центра тяжести аппарата. Такое свойство отслеживания обычно называют правильностью полета [3, 13]. Для правильности полета необходимо, чтобы в процессе движения углы атаки α и β оставались достаточно малыми. Таким образом, для обеспечения правильности полета необходима устойчивость вынужденного режима движения, вызванного управляющим воздействием.

В соответствии с общепринятой методикой [1, 3] вывода уравнений малых колебаний предположим, что при движении летательного аппарата в режиме, близком к прямолинейному горизонтальному полету, углы атаки α и β, угловые скорости ω_z и ω_y поперечных колебаний оси симметрии, а также относительное изменение скорости центра тяжести малы настолько, что можно пренебречь величинами, содержащими эти переменные в степенях выше первой. Кроме того, будем считать, что в процессе движения массовые и геометрические характеристики аппарата остаются постоянными. Предположения о характере аэродинамического воздействия на аппарат в процессе его полета в основном совпадают с общепринятым (см., например, [1–7, 13]). Ниже будут рассмотрены некоторые особенности, связанные с нестационарностью обтекания.

Введем систему координат $oxyz$ с началом в центре масс аппарата, которая колеблется вместе с осью симметрии (ось ox), но не участвует в собственном вращении вокруг оси симметрии. При указанных выше предположениях уравнения движения летательного аппарата, спроектированные на оси подвижной системы координат $oxyz$, имеют вид

$$
\begin{gathered}
v'=\left(\frac{T}{m}-g\vartheta\right)\frac{L}{v}-c_xv,\qquad \omega_x'=M_x\frac{L^2}{I_xv^2}-\omega_x\frac{v'}{v},\qquad \vartheta'=\omega_z \\
\alpha'=\omega_z-c_\alpha\alpha+c_{\alpha M}\omega_x\beta+c_\delta\delta_y+\frac{Lg}{v^2} \\
\omega_z'=I\omega_x\omega_y+m_\alpha\alpha+m_{\alpha M}\omega_x\beta-m_\omega\omega_z-m_\delta\delta_y \\
\beta'=\omega_y-c_\alpha\beta-c_{\alpha M}\omega_x\alpha+c_\delta\delta_z \\
\omega_y'=-I\omega_x\omega_z+m_\alpha\beta-m_{\alpha M}\omega_x\alpha-m_\omega\omega_y-m_\delta\delta_z
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь v – скорость центра тяжести аппарата; ω_x – безразмерная угловая скорость вращения вокруг оси симметрии, ϑ – угол тангажа; α, β – углы атаки и скольжения; ω_z, ω_y – безразмерные угловые скорости поперечных колебаний оси симметрии; L, m – характерный размер и масса аппарата; T – сила тяги; M_x – момент крена, действующий вокруг оси симметрии; $I=I_x/I_y$ – отношение осевого и поперечного (экваториального) моментов инерции; c_x, c_α, $c_{\alpha M}$ – приведенные аэродинамические коэффициенты силы лобового сопротивления, подъемной силы и силы Магнуса [1] соответственно; m_α, m_ω, $m_{\alpha M}$ – приведенные аэродинамические коэффициенты восстанавливающего момента, демпфирующего момента и момента силы Магнуса [1]; δ_y, δ_z – относительные управляющие команды в канале тангажа и канале курса соответственно; c_δ, m_δ – приведенные аэродинамические коэффициенты управляющей силы и управляющего момента. Дифференцирование проводится по безразмерному времени τ, связанному с действительным временем t дифференциальным соотношением $d\tau=vdt/L$.

Будем считать, что рассматриваемый летательный аппарат обладает так называемой статической устойчивостью. Тогда имеем

$$
m_\alpha<0,\qquad c_\alpha>0,\qquad m_\omega>0 \tag{1.2}
$$

Если скорость центра тяжести и угловая скорость крена постоянны, то существует стационарный режим движения аппарата, в котором ось симметрии и вектор скорости центра тяжести не меняют своей ориентации (так называемый балансировочный режим [1, 4, 7, 8]):

$$
v=v^\circ,\qquad \omega_x=\omega_x^\circ,\qquad \alpha=\alpha^\circ,\qquad \beta=\beta^\circ,\qquad \omega_z=\omega_y=0 \tag{1.3}
$$

Этот балансировочный режим обеспечивается специально подобранными постоянными управлениями $\delta_y=\delta_y^\circ$, $\delta_z=\delta_z^\circ$. Значения постоянных α°, β°, δ_y°, δ_z° определяются из уравнений (1.1).

Исследование устойчивости такого стационарного движения проведено в [8], где показано, что для асимптотической устойчивости балансировочного режима необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$
\begin{gathered}
(\omega_x^\circ)^2[m_{\alpha M}^2+m_{\alpha M}(c_\alpha-m_\omega)(I-c_{\omega M})- \\
-c_\alpha m_\omega(I-c_{\alpha M})^2]<(c_\alpha+m_\omega)^2(-m_\alpha+c_\alpha m_\omega)
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Однако в реальных условиях скорость центра тяжести $v(\tau)$ и угловая скорость крена $\omega_x(\tau)$ не постоянны. Кроме того, они полностью не опре-

[1] Сюда относятся и эффекты, обусловленные наличием оперения у вращающихся вокруг оси симметрии объектов [2].

деляются первыми двумя уравнениями системы (1.1). Так, скорость центра тяжести $v(\tau)$ зависит еще и от некоторых неучтенных факторов, например, нестационарности силы тяги, случайных порывов ветра и т. д.

Поэтому будем предполагать, что известен только диапазон изменения скорости: $v_1 \leqslant v(\tau) \leqslant v_2$. А входящий во второе уравнение системы (1.1) момент крена $M_x(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \omega_x, \mathbf{R}, M, \ldots)$, вообще говоря, не имеет достаточно хорошего аналитического представления, особенно при ненулевых углах атаки. Это связано со сложным аэродинамическим взаимодействием управляющих поверхностей или газовых рулей с оперением, обеспечивающим вращение аппарата вокруг оси симметрии.

Наличие вращения по крену приводит к тому, что процесс аэродинамического обтекания стабилизаторов является существенно нестационарным. Ввиду большой сложности происходящих явлений точно рассчитать момент крена M_x или получить его аналитическое представление из экспериментов не удается. Вследствие этого второе уравнение системы (1.1) также оказывается не вполне определенным и поэтому не задает скорость крена $\omega_x(\tau)$, а позволяет определить для каждой функции $v(\tau)$ только некоторый диапазон изменения скорости крена $\omega_1 \leqslant \omega_x(\tau) \leqslant \omega_2$.

Учитывая эти обстоятельства, будем считать в дальнейшем, что известны (из эксперимента или аналитических оценок) допусимые пределы изменений угловой скорости крена

$$\omega_x^- \leqslant \omega_x(\tau) \leqslant \omega_x^+ \tag{1.5}$$

В этом случае, даже при фиксированных управляющих воздействиях происходит как бы «размазывание» балансировочного режима (1.3). Причем соответствующий вынужденный режим движения не определен однозначно. Для описания этих вынужденных режимов движения можно использовать последние четыре уравнения системы (1.1)

$$\begin{gathered}
\alpha' = \omega_z - c_\alpha \alpha + c_{\alpha M} \omega_x \beta + c_\delta \delta_y + Lg/v^2 \\
\omega_z' = I \omega_x \omega_y + m_\alpha \alpha + m_{\alpha M} \omega_x \beta - m_\omega \omega_z - m_\delta \delta_y \\
\beta' = \omega_y - c_\alpha \beta - c_{\alpha M} \omega_x \alpha + c_\delta \delta_z \\
\omega_y' = -I \omega_x \omega_z + m_\alpha \beta - m_{\alpha M} \omega_x \alpha - m_\omega \omega_y - m_\delta \delta_z
\end{gathered} \tag{1.6}$$

характеризующие малые колебания оси симметрии аппарата, считая, что $v(\tau)$ и $\omega_x(\tau)$ являются внешними воздействиями, о которых известно лишь, что они удовлетворяют ограничениям

$$v_1 \leqslant v(\tau) \leqslant v_2, \quad \omega_x^- \leqslant \omega_x(\tau) \leqslant \omega_x^+$$

Как уже говорилось, для правильности полета необходима устойчивость управляемого движения $(\alpha^\vee, \omega_z^\vee, \beta^\vee, \omega_y^\vee)$, соответствующего управляющему воздействию $(\delta_y^\vee(\tau), \delta_z^\vee(\tau))$. В общем случае это управляемое движение описывается уравнениями (1.6) с фиксированными начальными условиями: $\alpha^\vee(\tau_0) = \alpha_0$, $\omega_z^\vee(\tau_0) = \omega_{z0}$, $\beta^\vee(\tau_0) = \beta_0$, $\omega_y^\vee(\tau_0) = \omega_{y0}$.

Ввиду отсутствия полной информации о скорости центра тяжести $v(\tau)$ и угловой скорости $\omega_x(\tau)$ этот нестационарный вынужденный режим также неизвестен. Тем не менее, необходимо обеспечить его устойчивость. Для этого рассмотрим уравнения в отклонениях от управляемого движения $(\alpha^\vee, \omega_z^\vee, \beta^\vee, \omega_y^\vee)$.

В силу линейности системы (1.6) и ее аддитивности по внешним воздействиям Lg/v^2 и $\delta_y(\tau)$, $\delta_z(\tau)$ уравнения в отклонениях будут совпадать с однородной частью системы (1.6) (см. [14]), так что они могут быть представлены уравнениями в следующей векторной форме:

$$X' = A(\tau)X, \quad A(\tau) = H + K(\tau) \tag{1.7}$$

$$X = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \omega_z \\ \beta \\ \omega_y \end{Vmatrix}, \quad H = \begin{Vmatrix} -c_\alpha & 1 & 0 & 0 \\ m_\alpha & -m_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_\alpha & 1 \\ 0 & 0 & m_\alpha & -m_\omega \end{Vmatrix}, \quad K(\tau) = \omega_x(\tau) \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c_{\alpha M} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\alpha M} & I \\ -c_{\alpha M} & 0 & 0 & 0 \\ -m_{\alpha M} & -I & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Таким образом, задача исследования устойчивости управляемого движения сводится к исследованию устойчивости тривиального решения системы (1.7) при условии, что неизвестная функция $\omega_x(\tau)$ удовлетворяет ограничению (1.5).

Требование асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.7) обеспечивает, согласно свойствам линейной системы дифференциальных уравнений, устойчивость решений (α, ω_z, β, ω_y) неоднородной системы (1.6) при любых свободных членах Lg/v^2 и δ_y, δ_z.

2. Система (1.7) представляет собой линейную систему с переменными коэффициентами, зависящими от неизвестной функции времени $\omega_x(\tau)$, о которой известно лишь, что она удовлетворяет ограничению (1.5). Для решения поставленной задачи, т. е. исследования устойчивости тривиального решения системы (1.7), представляется возможным использовать методы теории абсолютной устойчивости. Из известных результатов (см., например, обзор [9]) к рассматриваемой системе можно применить только частотный критерий В. А. Якубовича [10].

На основании этого критерия условие абсолютной устойчивости системы (1.7) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad \sup_\tau |K(\tau)| \sup_{-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty} |W(i\omega)| < 1 \tag{2.1}$$

где λ_i — корни характеристического уравнения $\det[H-\lambda E]=0$ матрицы H, а $W(\lambda)=[H-\lambda E]^{-1}$. Под модулем матрицы в (2.1) понимается корень квадратный из суммы квадратов модулей элементов.

Характеристическое уравнение матрицы H имеет вид $\Delta^2=0$, где $\Delta = \lambda^2+\lambda(c_\alpha+m_\omega)-m_\alpha+c_\alpha m_\omega$. Характеристические корни определяются по формулам

$$\lambda_1=\lambda_2=-{}^1/_2\{c_\alpha+m_\omega+[(c_\alpha-m_\omega)^2+4m_\alpha]^{1/2}\}$$

$$\lambda_3=\lambda_4=-{}^1/_2\{c_\alpha+m_\omega-[(c_\alpha-m_\omega)^2+4m_\alpha]^{1/2}\}$$

Нетрудно заметить, что в силу неравенств (1.2) первое условие в (2.1) выполнено. Вычислим верхние грани модулей матриц, содержащихся во втором неравенстве (2.1). Вместо этого неравенства можно рассмотреть равносильное ему неравенство

$$(\sup_\tau |K(\tau)|)^2 (\sup_{-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty} |W(i\omega)|)^2 < 1 \tag{2.2}$$

Согласно определению модуля матрицы имеем

$$|K(\tau)| = [2\omega_x^2(\tau)(I^2+c_{\alpha M}^2+m_{\alpha M}^2)]^{1/2}$$

$$|W(i\omega)| = \left[\frac{2(1+m_\alpha^2+c_\alpha^2+m_\omega^2+2\omega^2)}{\omega^2(c_\alpha+m_\omega)^2+(\omega^2+m_\alpha-c_\alpha m_\omega)^2}\right]^{1/2}$$

После несложных выкладок нетрудно установить, что

$$(\sup_{\tau} |K(\tau)|)^2 = 2(\omega_x^+)^2[I^2 + c_{\alpha M}^2 + m_{\alpha M}^2]$$

$$(\sup_{-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty} |W(i\omega)|)^2 = \frac{2(1+m_\alpha^2+c_\alpha^2+m_\omega^2)}{(m_\alpha - c_\alpha m_\omega)^2} \quad \text{при} \quad F\leqslant 0$$

$$(\sup_{-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty} |W(i\omega)|)^2 =$$

$$= \frac{4}{[(1-m_\alpha)^4 - (c_\alpha+m_\omega)(4m_\omega + (c_\alpha - m_\omega)^2)]^{1/2} - (1-m_\alpha)^2} \quad \text{при} \quad F>0,$$

$$F = 2(m_\alpha - c_\alpha m_\omega)^2 - (m_\alpha + c_\alpha^2 + m_\omega^2)(1+m_\alpha^2+c_\alpha^2+m_\omega^2)$$

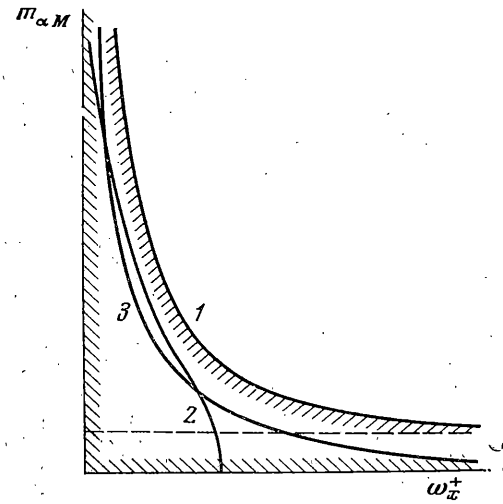
В предположении, что $\max(c_\alpha, m_\omega, |m_\alpha|)<1$, имеем

$$(\sup_{-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty} |W(i\omega)|)^2 \approx \frac{2(1-m_\alpha)^2}{-(c_\alpha+m_\omega)[m_\alpha + {}^1/_4(c_\alpha - m_\omega)^2]}$$

Тогда условие устойчивости (2.2) запишется так:

$$(\omega_x^+)^2 < \frac{-(c_\alpha+m_\omega)[m_\alpha + {}^1/_4(c_\alpha-m_\omega)^2]}{4(1-m_\alpha)^2(I^2+c_{\alpha M}^2+m_{\alpha M}^2)} \tag{2.3}$$

Условие устойчивости (2.3) выделяет в пространстве параметров более узкую область устойчивости, чем (1.4). Качественная картина взаимного расположения этих областей в плоскости параметров (ω_x^+, $m_{\alpha M}$) при фиксированных значениях остальных параметров представлена на фигуре. Кривая *1* и положительные полуоси системы координат ограничивают область устойчивости, задаваемую неравенством (1.4) в стационарном случае. Кривая *2* ограничивает часть области устойчивости, определяемую достаточным условием (2.2) или (2.3).



3. Полученное достаточное условие (2.3) асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.7) обеспечивает сходимость этого решения к нулю при $\tau\to\infty$ ($t\to\infty$). При этом характер сходимости, в том числе максимальная амплитуда колебаний, остаются неизвестными. Представляет интерес найти условия, при выполнении которых на заданном конечном интервале времени амплитуда колебаний не будет превосходить заданной конечной величины. Такая задача близка по постановке к задачам, рассматриваемым в теории технической устойчивости [11]. Обзор постановок таких задач и методов их решения имеется в [11, 12].

Один из возможных подходов к построению требуемых условий основан на получении следующей оценки. Пусть рассматриваемая система описывается линейным нестационарным уравнением вида (1.7). Построим произвольную квадратичную форму $V(t, \mathrm{X}) = {}^1/_2\mathrm{X}^*Q(t)\mathrm{X}$, где $Q(t)$ — положительно-определенная матрица типа $(n\times n)$, а n — размерность вектора X.

Образуем пучок матриц $B-\mu Q$, где $B=Q'+A^*Q+QA$. Характеристические числа пучка обозначим через $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau),\ldots,\mu_n(\tau)$. В каждый момент времени из них можно выбрать наименьшее $\mu_*(\tau)$ и наибольшее $\mu^*(\tau)$. Тогда на рассматриваемом промежутке времени имеет место оценка [11]:

$$V(\tau,\mathrm{X})=V(\tau_0,\mathrm{X}_0)\exp\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\mu^*(\sigma)\,d\sigma \tag{3.1}$$

Эта оценка и будет использоваться для получения искомых условий.

Итак, рассмотрим конечный промежуток времени $\tau\in[0,\tau^*]$. Пусть $\varphi_*>0$ и $\Omega_*>0$ — максимально допустимые значения полного угла атаки $\varphi=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$ и поперечной угловой скорости $\Omega=(\omega_z^2+\omega_y^2)^{1/2}$ соответственно. Потребуем, чтобы для всех $\tau\in[0,\tau^*]$ выполнялось неравенство

$$S(\tau)\equiv\frac{\varphi^2(\tau)}{\varphi_*^2}+\frac{\Omega^2(\tau)}{\Omega_*^2}\leqslant 1 \tag{3.2}$$

так, что, в частности при $\tau=0$, требуем выполнения условия

$$S_0=S(0)=\frac{\varphi_0^2}{\varphi_*^2}+\frac{\Omega_0^2}{\Omega_*^2}\leqslant 1 \tag{3.3}$$

Задача заключается в том, чтобы найти условия на параметры системы (1.7), при выполнении которых обеспечивается выполнение неравенства (3.2).

Для решения этой задачи применим описанную выше процедуру получения оценки решения. Образуем квадратичную форму

$$V(\tau,\mathrm{X})=\frac{1}{\varphi_*^2}\left[x_1^2+x_3^2+h(x_2^2+x_4^2)\right]=\frac{1}{\varphi_*^2}\mathrm{X}^*Q\mathrm{X}\equiv S(\tau)$$

$$h=\frac{\varphi_*^2}{\Omega_*^2},\quad Q=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&h&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&h\end{Vmatrix}$$

Требуемое неравенство (3.2) можно представить в виде

$$V(\tau,\mathrm{X})\leqslant 1 \tag{3.4}$$

В соответствии с указанной методикой составим матрицу $B=Q'+A^*Q+QA$ и образуем пучок матриц $B-\mu Q$. Характеристическое уравнение этого пучка имеет вид

$$\det\|B-\mu Q\|=h\mu^2+2(c_\alpha+m_\omega)h\mu+4c_\alpha m_\omega h-(1+m_\alpha h)^2-h^2m_{\alpha M}^2\omega_x^2(\tau)=0$$

Отсюда имеем

$$\mu^*(\tau)=-(c_\alpha+m_\omega)+h^{-1}[h(1+m_\alpha h)^2+h^2(c_\alpha-m_\omega)^2+h^3m_{\alpha M}^2\omega_x^2(\tau)]^{1/2} \tag{3.5}$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$V(\tau_0,\mathrm{X}_0)\exp\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\mu^*(\sigma)\,d\sigma\leqslant 1$$

или

$$S\leqslant\exp\left[-\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\mu^*(\sigma)\,d\sigma\right],\quad \tau\in[0,\tau^*] \tag{3.6}$$

В этом случае в силу имеющейся оценки (3.1), желаемое условие (3.4) будет заведомо выполнено. Подставляя в неравенство (3.6) выражение для $\mu^*(\tau)$ из (3.5), получим искомое достаточное условие технической устойчивости. В зависимости от параметров системы возможны два случая:

для всех $\tau\in[0, \tau^*]$

$$4hc_\alpha m_\omega-(1+m_\alpha h)^2-h^2 m_{\alpha M}{}^2\omega_x{}^2(\tau)\geqslant 0 \tag{3.7}$$

хотя бы в некотором диапазоне из интервала $\tau\in[0, \tau^*]$

$$4hc_\alpha m_\omega-(1+m_\alpha h)^2-h^2 m_{\alpha M}{}^2\omega_x{}^2(\tau)<0 \tag{3.8}$$

В случае (3.7) имеем $\mu^*(\tau)\leqslant 0$. Поэтому для выполнения неравенства (3.6) (а следовательно, и требуемого условия (3.4)) достаточно выполнения условия (3.3).

Таким образом, если выполнены неравенства

$$(m_{\alpha M}\omega_x{}^+)^2\leqslant h^{-2}[4hc_\alpha m_\omega-(1+m_\alpha h)^2], \quad S_0\leqslant 1 \tag{3.9}$$

то требуемое условие (3.4) также будет выполнено.

Рассмотрим ситуацию (3.8). Из (3.5) и (3.6) видно, что для выполнения требуемого условия (3.4) при любых $\omega_x(\tau)\in[\omega_x{}^-, \omega_x{}^+]$, $\tau\in[0, \tau^*]$ достаточно, чтобы оно выполнялось при $\omega_x=\omega_x{}^+$, $\tau=\tau^*$. Подставляя эти значения в (3.6), получим

$$\begin{gathered}(m_{\alpha M}\omega_x{}^+)^2\leqslant h^{-2}[4hc_\alpha m_\omega-(1+m_\alpha h)^2]+\\ +h^{-1}[(\tau^*)^{-1}\ln S_0-2(c_\alpha+m_\omega)](\tau^*)^{-1}\ln S_0\end{gathered} \tag{3.10}$$

При этом нужно учесть еще и неравенство (3.8), которое дает оценку на $m_{\alpha M}\omega_x{}^+$ с другой стороны. Требуя существования ненулевого промежутка на оси $(\omega_x{}^+)^2$ из неравенств (3.8) и учитывая неравенство (3.3), полученное условие технической устойчивости можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered}(\tau^*)^{-1}\ln S_0+2(c_\alpha+m_\omega)<0, \quad S_0<1\\ h^{-2}[4hc_\alpha m_\omega-(1+m_\alpha h)^2]<(m_{\alpha M}\omega_x{}^+)^2\leqslant\\ \leqslant h^{-2}[4hc_\alpha m_\omega-(1+m_\alpha h)^2]+\\ +h^{-1}[(\tau^*)^{-1}\ln S_0-2(c_\alpha+m_\omega)](\tau^*)^{-1}\ln S_0\end{gathered} \tag{3.11}$$

По построению, каждая из систем неравенств (3.9) или (3.11) определяет лишь достаточные условия технической устойчивости. На фигуре представлена область технической устойчивости, соответствующая условиям (3.11) при $S_0=(\varphi_0/\varphi_*)^2+(\Omega_0/\Omega_*)^2\leqslant(0.1)^2$, границей которой служит кривая *3*.

Как и при исследовании абсолютной устойчивости тривиального решения системы (1.7), полученные условия ограничивают сверху диапазоны значений максимальной угловой скорости вращения аппарата вокруг оси симметрии и коэффициента момента Магнуса.

Поступила 12 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Святодух В. К.* Динамика пространственного движения управляемых ракет. М., «Машиностроение», 1969.
2. *Benton E. R.* Sypersonic Magnus effect on a finned missile. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 1. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 1.)

3. *Боднер В. А.* Теория автоматического управления полетом. М., «Наука», 1964.
4. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1973.
5. *Coakley T. J.* Dynamic stability of symmetric spinning missiles. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 11. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, № 11.)
6. *Platus D. H.* Dynamic instability of finned missiles caused by unbalanced fin forces. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 3. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1971, № 3.)
7. *Сошников В. Н., Федорова Н. В.* Об одном стационарном движении симметричного вращающегося летательного аппарата. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
8. *Жермоленко В. Н., Локшин Б. Я.* Об устойчивости стационарного движения вращающейся ракеты. М., Тр. Ин-та механики МГУ, 1975, № 40.
9. *Пятницкий Е. С.* Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования. (Обзор.) Автоматика и телемеханика, 1968, № 6.
10. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. Автоматика и телемеханика, 1967, № 6.
11. *Карачаров К. А., Пилютик А. Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. М., Физматгиз, 1962.
12. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973.
13. *Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М.* Теория полета неуправляемых ракет. М., Физматгиз, 1959.
14. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.