МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1977

УДК 531.55:521.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ПАССИВНЫХ ДЕМПФЕРОВ

В. А. СОБОЛЕВ, В. В. СТРЫГИН

(*Куйбышев*)

Задача о стабилизации механических систем с использованием гироскопических свойств вращающихся тел рассмотрена в [1–9].

Работы [10, 11] посвящены изучению систем, стабилизируемых при помощи пассивных демпферов [1].

В предлагаемой работе исследуется асимптотическая устойчивость механической системы, состоящей из многих осесимметричных тел, у которых движение одного тела относительно другого ограничено вращением с постоянной угловой скоростью, и нескольких пассивных нутационных демпферов поступательного типа. Предполагается, что внешние силы отсутствуют. Использованием метода интегральных многообразий [12], находятся достаточные условия асимптотической устойчивости вращения.

1. Система, движение которой будет исследоваться, схематически изображена на фигуре. Основными элементами этой системы будут осесимметричные тела B_i $(i=1,\ldots,n)$ с массами M_i, относительное движение которых ограничено вращением вокруг общей оси, являющейся осью симметрии. На этих телах демпферы b_j $(j=1,\ldots,p)$ моделируются частицей p_j массы m_j, помещенной в трубку, заполненную вязкой жидкостью, и прикрепленной пружиной. Трубка демпфирующего устройства b_j установлена параллельно оси вращения на расстоянии a_j. Через c_j и k_j обозначаются коэффициенты вязкого демпфирования и жесткости пружины. Тело B_1 для определенности считается основным. Предполагается, что относительная угловая скорость σ_i тела B_i по отношению к B_1 поддерживается постоянной. Более того, предполагается, что на систему не действуют внешние силы.

Удобно считать, что вместе с любым демпфером b_j к соответствующему телу прикреплены три дополнительные балансировочные частицы, масса каждой из которых равна полной массе m_{b_j} демпфирующего устройства. Пусть дополнительные частицы расположены таким образом, что система тел B_i, демпферов b_j (принадлежащих телу) и соответствующих дополнительных частиц осесимметрична относительно оси вращения, когда частицы p_j находятся в номинальном положении (т. е. когда пружины не растянуты).

С каждым телом B_i свяжем систему координат (O, X_i^1, X_i^2, X_i^3), начало O_i отсчета которой находится в центре масс тела B_i. Считается, что ось X_i^3 направлена параллельно оси симметрии, а две другие оси, перпендикулярные одна другой, являются главными центральными осями инерции тела B_i. Будем считать, что частица p_j, находящаяся на теле B_i, в номинальном положении лежит в плоскости (O, X_i^1, X_i^2).

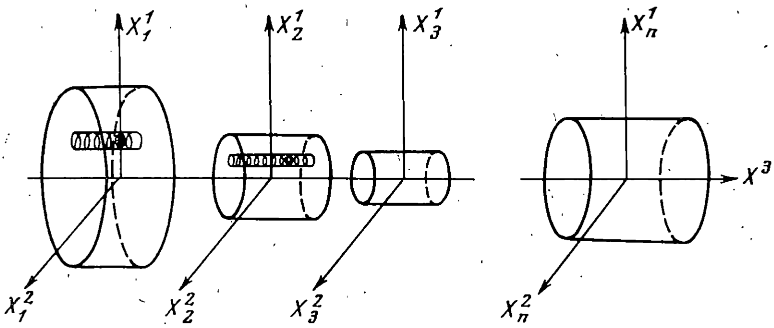
---

[1] См. также *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Некоторые вопросы динамики вращательного движения спутников, ч. 1, 2. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1974, препринты № 45, 49.

Пусть O — центр масс всей механической системы. Движение этой системы будем описывать в следующей системе отсчета. Начало координат поместим в точку O, а оси X_1, X_2, X_3 направим параллельно осям X_1^1, X_1^2, X_1^3. Через **r**, **jk**, как обычно, обозначаются единичные орты, направленные по осям X_1, X_2, X_3.

Через ω_1, ω_2, ω_3 обозначаются проекции абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела B_1 на оси X_1, X_2, X_3; z_j — отклонение частицы p_j от номинального положения по направлению оси X_3;

Примем, что S — центр масс механической системы, у которой частицы p_j, по предположению, во все время движения находятся в номиналь-



ном положении. Пусть $SO_i = l_i\mathbf{k}$. Если через M_{i0} обозначить полную массу тела B_i вместе с демпферами и дополнительными частицами, находящимися на B_i, то $\Sigma M_{i0} l_i = 0$. Пусть $M_T = \Sigma M_{i0}$ и $\zeta = \Sigma z_j m_j / M_T$. Величина ζ характеризует отклонение точки S от центра масс O. Введем обозначения

$$C = \sum_i I_i^3 + 4\sum_j m_{b_j} a_j^2, \qquad J = \sum_i I_i^3 \sigma_i + 4\sum_j m_{b_j} a_j^2 \sigma_j$$

$$A = \sum_i (M_i l_i^2 + I_i^1) + \sum_j (4m_{b_j} l_j^2 + 2m_{b_j} a_j^2)$$

Пусть $\psi_j(t)$ — угол, измеряемый против хода часовой стрелки, между проекцией p_j на плоскость (O, X_1, X_2) и осью OX_1.

Тогда уравнения движения системы можно записать так:

$$\begin{gathered}
A\dot{\omega}_1 - (A-C)\omega_2\omega_3 + J\omega_3 + 2M_T\zeta\dot{\zeta}\omega_1 + M_T\zeta^2(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) + \\
+ \sum_j \{2m_j(l_j - \zeta)[z_j(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) + \dot{z}_1\omega_1] + m_j z_j[-2\zeta\omega_1 + 2z_j\omega_1 + z_j(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) - \\
- a_j(\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2)]\cos\psi_j + m_j a_j[\ddot{z}_j + z_j(\omega_3 + \sigma_j)^2 - \omega_2^2]\sin\psi_j\} = 0 \\
A\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_1\omega_3 - J\omega_1 + 2M_T\zeta\dot{\zeta}\omega_2 + M_T\zeta^2(\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3) + \\
+ \sum_j \{2m_j(l_j - \zeta)[z_j(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3) + \dot{z}_j\omega_2] + m_j z_j[-2\dot{\zeta}\omega_2 + 2z_j\omega_2 + z_j(\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2)] - \\
- m_j a_j[\ddot{z}_j + z_j(\omega_3 + \sigma_j)^2 - \omega_1^2]\cos\psi_j - m_j a_j z_j(\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2)\sin\psi_j\} = 0 \\
C\dot{\omega}_3 - \sum_j \{m_j a_j[2\dot{z}_j\omega_2 + z_j(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)\sin\psi_j + \\
+ m_j a_j[2\dot{z}_j\omega_1 + z_j(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3)]\cos\psi_j\} = 0
\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$m_j(z_j^{\cdot\cdot}-\zeta^{\cdot\cdot})+m_ja_j[\omega_1^{\cdot}+\omega_2(\omega_3+2\sigma_j)]\sin\psi_j+m_ja_j[-\omega_2^{\cdot}+\omega_1(\omega_2+2\sigma_j)]\cos\psi_j-$$
$$-m_j(\omega_1^2+\omega_2^2)(l_j+z_j-\zeta)+c_jz_j^{\cdot}+k_jz_j=0 \quad (j=1,\ldots,p)$$

Система (1.1) имеет однопараметрическое семейство стационарных решений

$$\omega_1=\omega_2=0,\quad \omega_3=\Omega\equiv\mathrm{const},\quad z_j=z_j^{\cdot}=0 \quad (j=1,\ldots,p) \tag{1.2}$$

Будем считать, что решение (1.2) системы (1.1) экспоненциально устойчиво по отношению к части переменных ω_1, ω_2, z_j, $z_j^{\cdot}$ $(j=1,\ldots,p)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из соотношений

$$|\omega_1|,\ |\omega_2|,\ |\omega_3-\Omega|,\ |z_j|,\ |z_j^{\cdot}|<\delta \quad (j=1,\ldots,p) \tag{1.3}$$

при $t=0$ следует

$$|\omega_1|,\ |\omega_2|,\ |\omega_3-\Omega|,\ |z_j|,\ |z_j^{\cdot}|<\varepsilon \quad (j=1,\ldots,p) \tag{1.4}$$

при всех $t\geqslant0$ и, кроме этого, для некоторого Ω^* существуют такие числа $L\geqslant0$ и $\varkappa>0$, что

$$|\omega_1|,\ |\omega_2|,\ |\omega_3-\Omega^*|,\ |z_j|,\ |z_j^{\cdot}|<Le^{-\varkappa t} \quad (t>0) \tag{1.5}$$

В данной работе находятся достаточные условия экспоненциальной устойчивости по отношению к части переменных в предположении малости m_j.

2. Введем следующие обозначения:

$$\eta=\frac{|C\Omega+J|}{A},\quad \Lambda=\frac{(C-A)\omega_3+J}{A\eta},\quad \tau=\eta t,\quad q=\frac{C}{A},\quad \delta_j=\frac{a_j^2m_j}{A}$$

$$\varphi_j=\frac{\psi_j}{\eta},\quad r_{\sigma_j}=\frac{\sigma_j}{\eta},\quad r_i=\frac{\omega_3}{\eta}+2r_{\sigma_j},\quad \rho_j=\frac{m_j}{M_\text{т}},\quad R_j=\left(\frac{\omega_3}{\eta}+r_{\sigma_j}\right)^2$$

$$\delta_j=\varepsilon\gamma_j,\quad \rho_j=\varepsilon\mu_j,\quad \nu_{ij}=\sqrt{\gamma_i\mu_i\gamma_j\mu_j},\quad K_j=\frac{k_ja_j^2}{A\eta^2},\quad \beta_j=\frac{c_ja_j^2}{A\eta} \quad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,p).$$

Здесь предполагается, что $\eta\neq0$, $2|\Lambda|\neq|r_{\sigma_j}|$, $|r_{\sigma_j}\pm r_{\sigma_k}|$ $(j,\ k=1,\ldots,p)$. В качестве малого параметра задачи может быть выбрано, например, $\varepsilon=\delta_1$. Новые фазовые переменные определим равенствами

$$x_1=\frac{\omega_1}{\eta},\quad x_2=\frac{\omega_2}{\eta},\quad x_3=\frac{\omega_3}{\eta},\quad u_j=\frac{z_j}{a_j},\quad v_j=\frac{1}{a_j\eta}\frac{dz_j}{d\tau} \quad (j=1,\ldots,p)$$

Положим $w_1=(\omega,\ x_1,\ x_2,\ u_1,\ldots,u_p)^T$, $w_2=(v_1,\ldots,v_p)^T$, символ $(\quad)^T$ означает транспонирование вектора или матрицы. Ниже точкой над переменной будем обозначать дифференцирование по новому времени τ. Тогда в новых переменных систему (1.1) можно записать следующим образом:

$$(I+\varepsilon B_3^1+\varepsilon^2B_3^2)w_1^{\cdot}+\varepsilon B_1w_2^{\cdot}=A_1w_1+A_2w_2+\varepsilon f_1^1+\varepsilon^2f_1^2$$

$$\varepsilon B_2w_1^{\cdot}+\varepsilon B_0w_2^{\cdot}=A_3w_1+A_4w_2+\varepsilon f_2^1+\varepsilon^2f_2^2 \tag{2.1}$$

$$A_1=A_1^0+\varepsilon A_1^1,\quad A_3=A_3^0+\varepsilon A_3^1,\quad B_0=B_0^0-\varepsilon B_0^1$$

Здесь B_3^1 и B_3^2 — матрицы, имеющие, по крайней мере, первый порядок по переменным x_1, x_2, u_j, v_j. Подсчет показывает, что

$$B_0^0=\mathrm{diag}(\gamma_j),\quad B_0^1=(\nu_{ij}),\quad A_4=\mathrm{diag}(-\beta_j)$$

$$B_1=(B_2)^T,\quad B_2=\begin{Vmatrix} 0 & \gamma_1\sin\varphi_1 & -\gamma_1\cos\varphi_1 & 0\ldots 0\\ 0 & \gamma_2\sin\varphi_2 & -\gamma_2\cos\varphi_2 & 0\ldots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \gamma_p\sin\varphi_p & -\gamma_p\cos\varphi_p & 0\ldots 0\end{Vmatrix}$$

$$A_1^0=\begin{Vmatrix} 0\,0 & 0\,0\ldots 0\\ 0\,0 & -\Lambda\,0\ldots 0\\ 0\,\Lambda & 0\,0\ldots 0\\ 0\,0 & 0\,0\ldots 0\\ \cdots & \cdots\\ 0\,0 & 0\,0\ldots 0\end{Vmatrix},\quad A_1^1=\begin{Vmatrix} 000 & 0 & \ldots & 0\\ 000 & -\gamma_1 R_1\sin\varphi_1 & \ldots & -\gamma_p R_p\sin\varphi_p\\ 000 & \gamma_1 R_1\cos\varphi_1 & \ldots & \gamma_p R_p\cos\varphi_p\\ 000 & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 000 & 0 & \ldots & 0\end{Vmatrix}$$

$$A_2=\begin{Vmatrix} 0\,0\ldots 0\\ 0\,0\ldots 0\\ 0\,0\ldots 0\\ 1\,0\ldots 0\\ 0\\ \cdots\\ 0\,0\ldots 1\end{Vmatrix},\quad A_3^0=\begin{Vmatrix} 000 & -K_1 & 0 & \ldots & 0\\ 000 & 0 & -K_2 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 000 & \ldots & \ldots & \ldots & -K_p\end{Vmatrix}$$

$$A_3^1=\begin{Vmatrix} 0 & -\gamma_1 r_1\cos\varphi_1 & -\gamma_1 r_1\sin\varphi_1 & 0\ldots 0\\ 0 & -\gamma_2 r_2\cos\varphi_2 & -\gamma_2 r_2\sin\varphi_2 & 0\ldots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & -\gamma_p r_p\cos\varphi_p & -\gamma_p r_p\sin\varphi_p & 0\ldots 0\end{Vmatrix}$$

Матрицы A_1^0, A_1^1, B_3^1, B_3^2 имеют размерность $(p+3)\times(p+3)$, матрицы B_1A_2 – $(p+$ $+3)\times p$, матрицы B_2, A_3^0, A_3^1 – $p\times(p+3)$ и матрицы B_0^0, B_0^1 и A_4 – $p\times p$; величины f_1^1 и f_1^2 – $(p+3)$ – вектор-функции, а f_2^1 и f_2^2 – p – вектор-функции, которые являются малыми по меньшей мере второго порядка по отношению к переменным x_1, x_2, u_j, v_j $(j=1,\ldots,p)$. Важно отметить, что все элементы матриц B_3^1, B_3^2 и вектор-функции f_1^1 имеют в качестве множителя одну из переменных u_j, v_j $(j=1,\ldots,p)$.

Систему (2.1) можно разрешить относительно производных и записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &w_1^{\boldsymbol\cdot}=W_1(\tau,\ w_1,\ w_2,\ \varepsilon)\equiv(E_0+\varepsilon E_1+\varepsilon^2E_2)\,w_1+\\ &\quad+(D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2D_2)\,w_2+\varepsilon g_1^1+\varepsilon^2g_1^2+O(\varepsilon^3)\\ &\varepsilon w_2^{\boldsymbol\cdot}=W_2(\tau,\ w_1,\ w_2,\ \varepsilon)\equiv(F_0+\varepsilon F_1+\varepsilon^2F_2)\,w_1+\\ &\quad+(G_0+\varepsilon G_1+\varepsilon^2G_2)\,w_2+\varepsilon g_2^1+\varepsilon^2g_2^2+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\tag{2.2}$$

В этих соотношениях матрицы E_i, D_i, F_i, G_i $(i=0,\ 1,\ 2)$ зависят от ω и τ; причем зависимость по τ почти периодическая; вектор-функции g_j^i $(i,\ j=1,\ 2)$ обладают теми же свойствами, что и вектор-функции f_j^s.

Система (2.2) содержит малый параметр при части производных, т. е является сингулярно-возмущенной; правые части системы (2.2) представ ляют собой почти-периодические функции времени τ.

Для анализа системы (2.2) удобно воспользоваться идеей метода интегральных многообразий Боголюбова – Митропольского [12], которая заключается в следующем. Для системы (2.2) строится устойчивое интегральное многообразие размерности $(p+3)$. В окрестности некоторой точки фазового пространства траектории полной системы (2.2) асимптотически приближаются к траекториям на многообразии. Если система на многообразии имеет устойчивое состояние равновесия, то это состояние будет устойчивым и для полной системы. Таким образом, в тех случаях, когда удается построить интегральное многообразие, вопрос об устойчивости полной системы сводится к вопросу об устойчивости системы меньшей размерности. Существование $(p+3)$-мерного устойчивого интегрального многообразия для сингулярно-возмущенной системы (2.2) в окрестности исследуемого однопараметрического семейства состояний равновесия (1.2) следует из результатов работы [13]. Как и в [14], нетрудно показать, что устойчивое $(p+3)$-мерное интегральное многообразие $w_2=H(\tau, w_1, \varepsilon)$ системы (2.2) является гладкой функцией переменных w_1, ε и разлагается в асимптотический ряд по степеням ε

$$H(\tau, w_1, \varepsilon)=H_0(\tau, w_1)+\varepsilon H_1(\tau, w_1)+\ldots$$

Коэффициенты H_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ этого разложения определяются из формального тождества

$$\varepsilon\left[\sum_i \varepsilon^i\left(\frac{\partial H_i}{\partial\tau}+\frac{\partial H_i}{\partial w_1}W_1\left(\tau, w_1, \sum \varepsilon^i H_i, \varepsilon\right)\right)\right]\equiv W_2\left(\tau, w_1, \sum \varepsilon^i H_1, \varepsilon\right)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и обозначая через H_i' матрицы линейных членов H_i, получаем

$$H_0'=-G_0^{-1}F_0, \quad H_1'=G_0^{-1}[H_0'(E_0+D_0H_0')-F_1-G_1H_0']$$

$$H_2'=G_0^{-1}\left[\frac{\partial H_1'}{\partial\tau}+H_0'(E_1+D_0H_1'+D_1H_0')+H_1'(E_0+D_0H_0')-\right. \tag{2.4}$$

$$\left.-F_2-G_2H_0'-G_1H_1'\right]$$

Уравнение, описывающее движение по многообразию H, имеет вид

$$\begin{gathered} w_1^{\boldsymbol{\cdot}}=(Q_0+\varepsilon Q_1+\varepsilon^2Q_2)w_1+\ldots, \quad Q_0=E_2+D_0H_0' \\ Q_1=E_1+D_0H_1'+D_1H_0', \quad Q_2=E_2+D_0H_2'+D_1H_1'+D_2H_0' \end{gathered} \tag{2.5}$$

Используя соотношения (2.4), имеем

$$Q_0=A_1^0-A_2A_4^{-1}A_3^0, \qquad Q_1=A_1'-A_2A_4^{-1}(A_3-B_2A_1^0)+$$

$$+(B_1-A_2A_4^{-1}B_0^0)A_4^{-1}A_3^0Q_0$$

$$Q_2=(B_1-A_2A_4^{-1}B_0^0)A_4^{-1}[(A_3^{01}-B_2^{\boldsymbol{\cdot}}A_1^0)+(A_3^1-B_2A_1^0)Q_0+B_0^0A_3^0Q_0^2+$$

$$+A_3^0Q_1]+A_2A_4^{-1}[B_2A_1^1+(B_0^1+B_2B_1)A_4^{-1}A_3^0Q_0] \tag{2.6}$$

Из (2.6) и вида матриц, входящих в это равенство, нетрудно установить, что матрица Q_0 имеет одно нулевое и пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\Lambda$; остальные собственные значения вещественны и отрицательны. Матрицы Q_1, Q_2 являются почти-периодическими функциями τ, причем r_{σ_j} являются базисными частотами Q_1, а $|r_{\sigma_j}|$, $|r_{\sigma_j}\pm r_{\sigma_k}|$ — базисными частотами Q_2. Подберем такие почти-периодические матрицы Y_1 и Y_2 порядка $(p\times 3)\times(p+3)$ [15], чтобы после замены

$$w_1=(I+\varepsilon Y_1+\varepsilon^2 Y_2)y \qquad (y=(\omega, y_1, \ldots, y_{p+2})^T)$$

система (2.5) приняла вид

$$y^{\boldsymbol{\cdot}}=(P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2)y+\ldots \tag{2.7}$$

где $P_0=Q_0$, $P_1=\langle Q_1\rangle$, а P_2 — некоторая не зависящая от τ матрица. Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают, что вычисляется среднее значение почти-периодической матрицы. Нетрудно показать, что Y_1 можно определить из уравнения

$$Y_1^{\cdot}=Q_0Y_1-Y_1Q_0+Q_1-P_1 \tag{2.8}$$

а P_2 вычисляется по формуле

$$P_2=\langle Q_2+Q_1Y_1-Y_1Q_1-Y_1Q_0Y_1+Q_0Y_1^2-Y_1^{\cdot 2}Y_1\rangle \tag{2.9}$$

Оказывается, что у матрицы $P_0+\varepsilon P_1$, кроме нулевого собственного значения, имеется пара собственных значений $\lambda_{1,2}=\pm i\Lambda+o(\varepsilon)$. В связи с этим нужно учитывать линейные члены, по крайней мере, до второго порядка по ε.

Исходя из первого равенства (2.6), нетрудно показать, что P_0 — блочно-диагональная матрица. Так как три собственных значения этой матрицы лежат на мнимой оси, а остальные p — в левой полуплоскости, то система (2.7) имеет устойчивое трехмерное интегральное многообразие. Для его отыскания положим $\xi=(\omega, y_1, y_2)^T$, $\eta=(y_3, y_4, \ldots, y_{p+2})^T$ и запишем систему (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi^{\cdot}&=U_1(\tau, \xi, \eta, \varepsilon)\equiv(K_0+\varepsilon^2K_2)\xi+(\varepsilon L_1+\varepsilon^2L_2)\eta+\ldots\\ \eta^{\cdot}&=U_2(\tau, \xi, \eta, \varepsilon)\equiv(\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2)\xi+(N_0+\varepsilon N_1+\varepsilon^2N_2)\eta+\ldots\end{aligned} \tag{2.10}$$

где K_i, L_i, M_i, N_i $(i=0, 1, 2)$ — соответствующие блоки матриц P_i. В первом уравнении (2.10) отсутствуют линейные члены вида $\varepsilon\xi$. Это объясняется тем, что матрица P_0 — блочно-диагональная, а у матриц A_1^1, A_3^0 и A_2^T первые три столбца нулевые. Трехмерное интегральное многообразие можно искать в виде $\eta=V(\tau, \xi, \varepsilon)=V_0(\tau, \xi)+\varepsilon V_1(\tau, \xi)+\ldots$. Коэффициенты этого разложения определяются из формального тождества

$$\Sigma\varepsilon^i\left[\frac{\partial V_i}{\partial\tau}+\left(\frac{\partial V_i}{\partial\xi}\right)U_1(\tau, \xi, \Sigma\varepsilon^iV_i, \varepsilon)\right]\equiv U_2(\tau, \xi, \Sigma\varepsilon^iV_i, \varepsilon) \tag{2.11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнение для определения V_i. Пусть V_i' — матрицы линейных членов V_i. Из (2.11) получаем

$$\frac{\partial V_0}{\partial\tau}+\left(\frac{\partial V_0}{\partial\xi}\right)K_0\xi=N_0V_0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial V_1'}{\partial\tau}+V_1'K_0=N_0V_1'+M_1+N_1V_0'-V_0'L_1V_0'$$

Из (2.12) следует, что $V_0\equiv0$. Систему, описывающую движение на трехмерном многообразии, можно записать в виде

$$\xi^{\cdot}=[K_0+\varepsilon^2(K^2+L_1V_1')]\xi+\ldots \tag{2.13}$$

Заметим, что нелинейные члены, опущенные в уравнении (2.13), имеют второй порядок малости по ε. Это вытекает из того, что нелинейные члены в (2.10), как оказывается, содержат в качестве множителей хотя бы одну из переменных $y_3, \ldots, y_{p+2}$, а $V=\varepsilon V_1+\varepsilon^2V_2+\ldots$. Так как

$$K_0=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&-\Lambda\\0&\Lambda&0\end{Vmatrix} \tag{2.14}$$

то для анализа системы (2.13) удобно перейти к полярным координатам $y_1=r\cos\theta$, $y_2=r\sin\theta$. Произведя указанную замену и усредняя [16] по быстрой переменной θ, получим следующую систему уравнений:

$$r^{\bullet}=-\varepsilon^2[{}^1/{}_2(\Lambda+\omega)\gamma(\omega)r+o(r)]+\dots,\qquad \omega^{\bullet}=\frac{\varepsilon^2}{2q}\gamma(\omega)[r^2+o(r^2)]+\dots \tag{2.15}$$

Отметим, что для механической системы, имеющей два демпфера, $\gamma(\omega)$ определяется равенством

$$\gamma(\omega)=\frac{\Lambda(\Lambda-\omega)^2}{\beta_1(\Lambda^2+K_1^2/\beta_1^2)}+\gamma_2^2\frac{(\Lambda-r_{\sigma_2})(\Lambda-r_2)^2}{\beta_2[(\Lambda-r_{\sigma_2})^2+K_2^2/\beta_2^2]}$$

Легко видеть, что при $(\Lambda+\omega)\gamma(\omega)>0$ решение $\omega_1=\omega_2=0$, $\omega_3=\Omega$, $z=0$, $z_j^{\bullet}=0$ $(j=1, 2)$ экспоненциально устойчиво по переменным ω_1, ω_2, z_j, $z_j^{\bullet}$ $(j=1, 2)$. При $(\Lambda+\omega)\gamma(\omega)<0$ это решение неустойчиво.

Пусть Ω_j — угловая скорость тела, на котором находится демпфер b_j и

$$H=\sum_i I_i^3\Omega_i+4\sum_j m_{b_j}a_j^2\Omega_j$$

момент количества движения всей механической системы относительно оси X_3. Введем функцию элементарного демпфирования равенством

$$D_j=-c_ja_j^2m_j^2H\frac{(H-A\Omega_j)(H-2A\Omega_j)^2}{(Ak_j)^2+(H-A\Omega_j)^2c_j^2} \tag{2.16}$$

Тогда при достаточно малых δ_1, δ_2 приближенное условие экспоненциальной устойчивости решений (1.2) системы (1.1) по отношению к переменным ω_1, ω_2, z_j, $z_j^{\bullet}$ $(j=1, 2)$ для механической системы, имеющей два демпфера, имеет вид

$$D_1+D_2<0 \tag{2.17}$$

В том случае, когда рассматривается система с произвольным количеством демпферов, нетрудно показать, что матрица $\varepsilon^2(K_2+L_1V_1')$ является квадратичной формой переменных m_j. Исходя из этого и используя (2.17), получаем, что для вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\xi^{\bullet}=[K_0+\varepsilon^2(K_2+L_1V_1')]\xi \tag{2.18}$$

условие экспоненциальной устойчивости решения $\omega=\Omega/\eta$, $y_1=y_2=0$ по переменным y_1, y_2 имеет вид

$$-d=\sum_j D_j<0 \tag{2.19}$$

Система (2.18) отличается от системы (2.13) лишь линейными членами порядка ε^3 и нелинейными членами порядка ε^2. Система (2.13) по построению описывает движение по устойчивому интегральному многообразию исходной системы. Отсюда следует, что приближенные условия экспоненциальной устойчивости решения $\omega_1=\omega_2=0$, $\omega_3=\Omega$, $z_j=0$, $z_j^{\bullet}=0$ $(j=1,\dots,p)$ исходной системы (1.1) по переменным ω_1, ω_2, z_j, $z_j^{\bullet}$ $(j=1,\dots,p)$ при достаточно малых δ_j $(j=1,\dots,p)$ имеют вид (2.19).

Из (2.16) и (2.19) следует, что часть демпферов оказывает стабилизирующее воздействие, а часть — дестабилизирующее воздействие в зависимости от знака величин $H(H-A\Omega_j)$. Каждая из функций D_j зависит от параметров c_i и k_i лишь при $i=j$. Поэтому, варьируя эти параметры, можно существенно влиять на величину D_j в сторону увеличения или уменьшения ее в зависимости от знака D_j, не меняя D_i $(i\neq j)$.

Для случая двух демпферов представляет интерес случай, когда $(H-A\Omega_1)(H-A\Omega_2)<0$. Через Ξ обозначим поверхность в области параметров, на которой $d=0$. Эта поверхность приближенно разделяет область устойчивости и неустойчивости. Сечение Ξ плоскостью (m_1, m_2) является прямой, проходящей через точку $m_1=m_2=0$. Сечение Ξ плоскостью (c_1, c_2) определяется кривыми третьего порядка, имеющими горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты, проходящие через точку $c_1=c_2=0$. Сечение области устойчивости плоскостью (c_1, c_2) может быть как связным, так и несвязным множеством, имеющим две связные компоненты.

Увеличение величины d положительно влияет на стабилизацию системы. В связи с этим возникает самостоятельная задача оптимизации величины d в области допустимых параметров [1].

Анализ условия (2.19) показывает, что система может быть асимптотически устойчива и при вращении вокруг оси минимального момента инерции.

Авторы благодарят В. В. Румянцева, а также Д. М. Климова, М. А. Красносельского, Е. А. Гребенникова, И. В. Новожилова, Ю. Г. Мартыненко и А. И. Кобрина за полезные обсуждения и советы.

Поступила 17 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости относительных равновесий и стационарных движений спутника-гиростата. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости и стабилизации стационарных движений. В сб.: Управление в космосе, т. 1. М., «Наука», 1972.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутника-гиростата. В сб.: Современные проблемы небесной механики и аэродинамики. М., «Наука», 1973.
5. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
6. *Likins P. W.* Attitude stability criteria for dual-spin spacecraft. J. Spacecraft and Rockets, 1967, vol. 4, No. 12, p. 1638—1643.
7. *Черноусько Ф. Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
8. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
9. *Teixeira-Filho D. R., Kane T. R.* Spin stability of Torque-free sistems, pt I, II. AIAA Journal, 1973, vol. 14, No. 6. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 6, стр. 116—127.)
10. *Mingori D. L.* Effects of energy dissipation on the attitude stability of dual-spin satellites. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 1, p. 20—27.
11. *Pringle R. Jr.* Stability of forse-free motions of a dual-spin spacecraft. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 6, p. 1054—1063. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 6, стр. 77—78.)
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям, № 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963, стр. 93—154.
13. *Задирака К. В.* Об интегральном многообразии системы дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 4.
14. *Стрыгин В. В.* Интегральные многообразия в задаче о сингулярном и параметрическом возмущении автоколебательной системы. Дифференциальные уравнения и их приложения. Межвуз. сб. тр. по физ.-матем. наукам. Изд. Куйбышевск. политехн. ин-та, 1975, № 2.
15. *Штокало И. З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев, Изд-во АН УССР, 1960.
16. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.

---

[1] Подобная задача исследовалась В. А. Сарычевым и В. В. Сазоновым (см. подстрочное примечание к стр. 24).