

## О ВЛИЯНИИ РЕБЕР НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Б. П. БЕЛИНСКИЙ, В. А. ВЕШЕВ, И. И. КЛЮКИН, Д. П. КОУЗОВ

(Ленинград)

Вопросам распространения изгибных волн в пластинах конечной ширины посвящено довольно большое количество работ. При этом рассматривались случаи свободных, жестких и шарнирно опертых кромок. Итоги этих исследований подведены в [1]. Распространение изгибных колебаний в пластинах, кромки которых подкреплены ребрами жесткости, по-видимому, не рассматривалось.

Ниже приводится теоретическое исследование волновых процессов в тонкой бесконечно протяженной упругой пластине ( $-a < x < a$ ,  $-\infty < y < +\infty$ ,  $z=0$ ), кромки которой подкреплены одинаковыми ребрами жесткости ( $x=\pm a$ ,  $-\infty < y < +\infty$ ,  $0 < z < b$ ). Целью работы является вычисление спектра нормальных волн. Предполагается, что параметры пластины и ребер позволяют проводить рассмотрение в рамках обычной теории тонких пластин. Высота ребер  $b$  считается малой по сравнению с рассматриваемыми длинами волн. Это дает возможность описывать движения ребра в терминах изгибных и крутильных колебаний стержня.

Математическая постановка задачи состоит в следующем. Ищутся ненулевые решения уравнения стационарных колебаний пластины

$$(\Delta^2 - \kappa_0^4)u = 0 \quad (1)$$

удовлетворяющие при  $x=\pm a$  граничным условиям

$$-D_0 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = -i\omega Z_1 \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sign} x \quad (2)$$

$$D_0 \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2 - \sigma_0) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right] = -i\omega Z_2 u \operatorname{sign} x$$

Здесь  $u(x, y)$  — изгибное смещение пластины,  $\kappa_0$  — волновое число изгибных колебаний пластины,  $D_0$  — цилиндрическая жесткость,  $\sigma_0$  — коэффициент Пуассона пластины,  $\omega$  — частота,  $Z_1$  и  $Z_2$  — крутильный и изгибный импедансы ребер жесткости. Множитель  $\exp(-i\omega t)$ , задающий зависимость процессов от времени, опускается.

Опишем метод нахождения импедансов  $Z_1$  и  $Z_2$ . Будем моделировать ребро тонкой упругой пластиной, способной совершать колебания изгиба со смещениями, параллельными несущей пластине, и продольные колебания. При этом верхняя кромка ребра свободна от нагрузок, а колебания происходят под действием приложенных к нижней кромке ( $x=\pm a$ ,  $-\infty < y < +\infty$ ,  $z=0$ ) изгибающего момента  $M(y)$  и продольной силы  $F(y)$ .

Определим импедансы как операторы из соотношений  $M(y) = -i\omega Z_1 \varphi_p(y)$ ,  $F(y) = -i\omega Z_2 u_p(y)$ , где через  $\varphi_p(y)$  и  $u_p(y)$  обозначены угол поворота нижней кромки ребра и продольное смещение его в направлении оси  $z$  в точке с координатой  $y$ .

Будем рассматривать процессы типа волны, бегущей вдоль пластины, т. е. предположим зависимость от  $y$  в виде  $\exp(i\mu y)$ .

Решая уравнение изгибных колебаний ребра при описанных выше граничных условиях на нижней кромке, найдем

$$Z_1 = \frac{i\kappa^2 D}{\omega} \frac{\varepsilon_+ [\mu^2(1-\sigma) + \kappa^2]^2 - \varepsilon_- [\mu^2(1-\sigma) - \kappa^2]^2}{\mu^4(1-\sigma)^2 + \kappa^4 - \varepsilon_- \varepsilon_+ \mu^2 [\mu^4(1-\sigma)^2 - \kappa^4(1-2\sigma)]}$$

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\operatorname{th}(\alpha_{\pm} b)}{\alpha_{\pm}}, \quad \varepsilon = \frac{\mu^4(1-\sigma)^2 - \kappa^4}{\operatorname{ch}(\alpha_+ b) \operatorname{ch}(\alpha_- b)}, \quad \alpha_{\pm} = \sqrt{\mu^2 \pm \kappa^2} \quad (3)$$

Величины  $\kappa$ ,  $D$ ,  $\sigma$  имеют прежний смысл, но относятся к ребру. Отметим, что аналогичная формула (38.17) в [2] содержит опечатки.

Из решения системы уравнений для продольных колебаний ребра следует

$$Z_2 = \frac{EH\delta^2(\theta_1 R^2 + \nu^2 \beta_2 \operatorname{tg} \beta_2)}{i\omega b[R^2 + 2R\theta + \nu^4 - \nu^2 \theta_1 \theta_2 (R^2 + \beta_1^2 \beta_2^2)]} \quad (4)$$

$$\delta = b\sqrt{\rho\omega^2/E}, \quad \nu = \mu b, \quad R = \delta^2(1 + \sigma) - \nu^2, \quad \beta_1 = \sqrt{\delta^2(1 - \sigma^2) - \nu^2}$$

$$\beta_2 = \sqrt{2\delta^2(1 + \sigma) - \nu^2}, \quad \theta_1 = \operatorname{tg} \beta_1/\beta_1, \quad \theta_2 = \operatorname{tg} \beta_2/\beta_2, \quad \theta = \nu^2/\cos \beta_1 \cos \beta_2$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность,  $H$  – толщина ребра. Формулы (3), (4) являются точными и пригодны при любых размерах ребра.

Приближенные выражения для случая малой высоты ребра ( $\kappa b \ll 1$ ,  $\nu \ll 1$ ) имеют вид

$$Z_1 = \frac{1}{i\omega} \left[ \frac{1}{3} \rho b^3 H \omega^2 - \frac{EH^3 b}{6(1 + \sigma)} \mu^2 \right], \quad Z_2 = \frac{1}{i\omega} \left[ \rho b H \omega^2 - \frac{1}{3} EH b^3 \mu^4 \right] \quad (5)$$

Выражения (5) определяют импедансы крутильных и изгибных колебаний стержня прямоугольного сечения  $b \times H$ . Величина  $1/3 b^3 H$  имеет смысл момента инерции, а  $EH^3 b/6(1 + \sigma)$  – крутильной жесткости. Отметим, что момент инерции вычисляется относительно оси вращения, расположенной на нижней кромке ребра ( $x = a$ ,  $z = 0$ ).

Обратимся к вычислению спектра нормальных волн рассматриваемой пластины. Нормальная волна представляет собой решение однородной задачи (1), (2) вида  $u(x, y) = e^{i\omega t} U(x)$ .

Из уравнения изгибных колебаний (1) найдем

$$U(x) = C_1 \operatorname{ch}(\gamma_- x) + C_2 \operatorname{ch}(\gamma_+ x) + C_3 \operatorname{sh}(\gamma_- x) + C_4 \operatorname{sh}(\gamma_+ x), \quad \gamma_{\pm} = \sqrt{\mu^2 \pm \kappa_0^2}$$

Постоянные  $C_1, \dots, C_4$  ищутся на основе граничных условий (2), которые приводят к системе четырех уравнений

$$\sum_{m=1}^4 N_{km} C_m = 0 \quad (k=1, \dots, 4) \quad (6)$$

$$N_{11} = A_2 c_- - \frac{i\omega}{D_0} Z_1 \gamma_- s_-, \quad N_{12} = A_1 c_+ - \frac{i\omega}{D_0} Z_1 \gamma_+ s_+$$

$$N_{13} = A_2 s_- - \frac{i\omega}{D_0} Z_1 \gamma_- c_-, \quad N_{14} = A_1 s_+ - \frac{i\omega}{D_0} Z_1 \gamma_+ c_+$$

$$N_{21} = N_{11}, \quad N_{22} = N_{12}, \quad N_{23} = -N_{13}, \quad N_{24} = -N_{14}$$

$$N_{31} = B_2 s_- + \frac{i\omega}{D_0} Z_2 c_-, \quad N_{32} = B_1 s_+ + \frac{i\omega}{D_0} Z_2 c_+$$

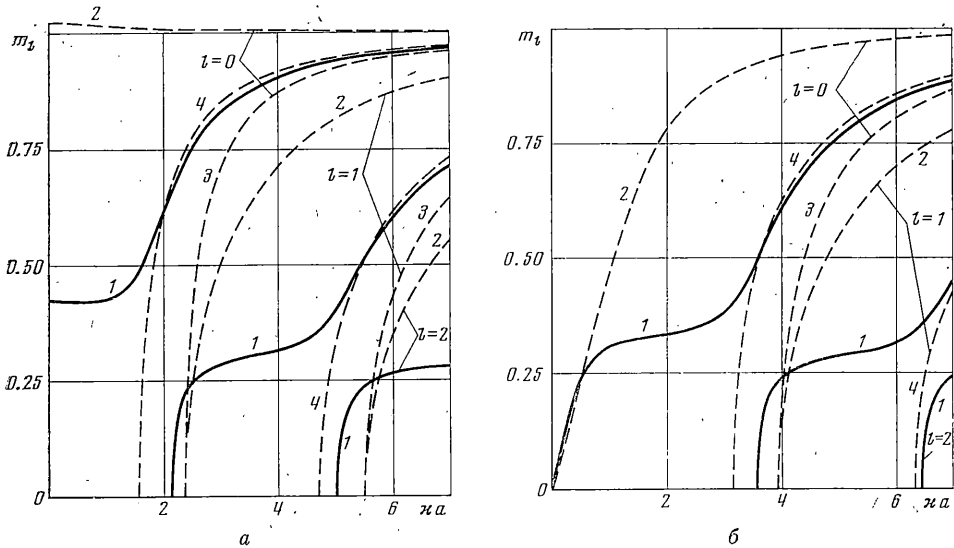
$$N_{33} = B_2 c_- + \frac{i\omega}{D_0} Z_2 s_-, \quad N_{34} = B_1 c_+ + \frac{i\omega}{D_0} Z_2 s_+$$

$$N_{41} = -N_{31}, \quad N_{42} = -N_{32}, \quad N_{43} = N_{33}, \quad N_{44} = N_{34}, \quad A_{1,2} = \pm \kappa_0^2 + \mu^2(1 - \sigma_0)$$

$$B_{1,2} = -\gamma_{\pm} A_{2,1}, \quad c_{\pm} = \operatorname{ch}(\gamma_{\pm} a), \quad s_{\pm} = \operatorname{sh}(\gamma_{\pm} a)$$

Система уравнений (6) легко расщепляется на две независимые системы

$$\begin{vmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{31} & N_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} N_{13} & N_{14} \\ N_{33} & N_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = 0$$



Фиг. 1

причем из первой определяются постоянные  $C_{1,2}$ , входящие в симметричную по  $x$  часть поля смещений  $u(x, y)$ , а из второй — постоянные, входящие в антисимметричную часть поля. Введем определители этих систем

$$\begin{aligned} \Delta_+(\mu) = & c_+c_- \frac{i\omega}{D_0} Z_2(A_2 - A_1) + s_+s_- \frac{i\omega}{D_0} Z_1(B_2\gamma_+ - B_1\gamma_-) - \\ & - c_+s_- \left[ \left( \frac{i\omega}{D_0} \right)^2 Z_1Z_2\gamma_- + A_1B_2 \right] + c_-s_+ \left[ \left( \frac{i\omega}{D_0} \right)^2 Z_1Z_2\gamma_+ + A_2B_1 \right] \\ \Delta_-(\mu) = & c_+c_- \frac{i\omega}{D_0} Z_1(B_2\gamma_+ - B_1\gamma_-) + s_+s_- \frac{i\omega}{D_0} Z_2(A_2 - A_1) + \\ & + c_+s_- \left[ \left( \frac{i\omega}{D_0} \right)^2 Z_1Z_2\gamma_+ + A_2B_1 \right] - c_-s_+ \left[ \left( \frac{i\omega}{D_0} \right)^2 Z_1Z_2\gamma_- + A_1B_2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения

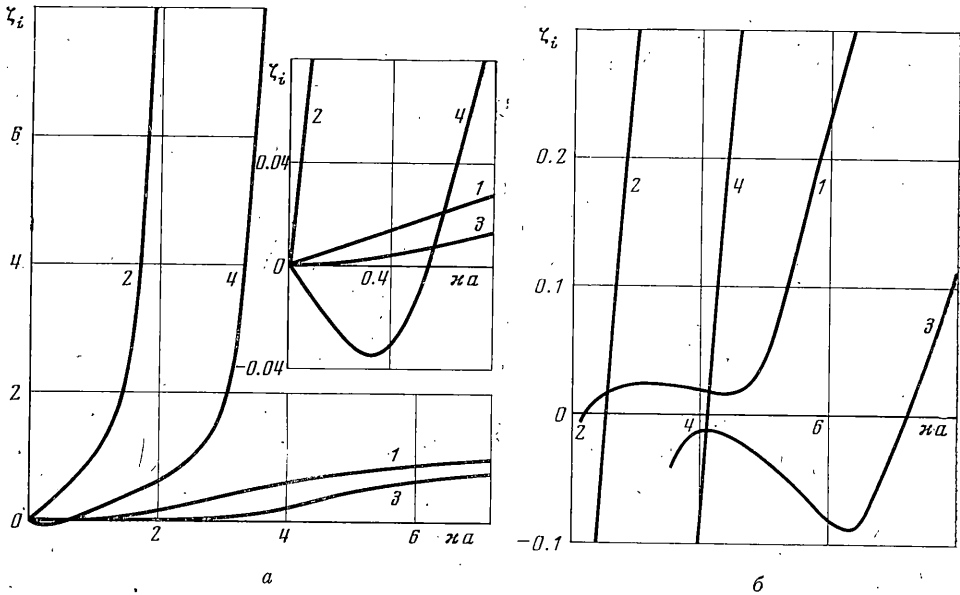
$$\Delta_+(\mu) = 0, \quad \Delta_-(\mu) = 0 \quad (8)$$

представляют собой дисперсионные уравнения для волновых чисел нормальных волн оребренной пластины.

Численные расчеты проводились для случая, когда пластина и ребра изготовлены из одного и того же материала (сталь:  $\sigma_0 = \sigma = 0.3$ ,  $\rho_0 = \rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_0 = E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$ ) и имеют одинаковую толщину ( $H_0 = H = 0.005 \text{ м}$ ). Высота ребер находилась из условия, что момент инерции ребра относительно его средней по высоте линии в пять раз больше момента инерции пластины относительно ее средней по толщине линии, т. е.  $b = (10aH^2)^{1/2}$ . Ниже рассматривается пластина шириной  $2a = 0.6 \text{ м}$  при высоте ребер  $b = 0.042 \text{ м}$ .

На фиг. 1, а изображены зависимости безразмерных волновых чисел  $m_l = \mu_l/\omega$  ( $l$  — номер моды) симметричных нормальных волн оребренной пластины от безразмерного параметра  $ka$  (кривые 1). Для сравнения здесь же приведены аналогичные зависимости для пластины без ребер (пунктирные линии) в случаях, когда кромки пластины свободны — кривые 2 (для этого в уравнениях (7), (8) следует положить  $Z_1 = Z_2 = 0$ ), жестко закреплены — кривые 3 ( $Z_1 = Z_2 = \infty$ ), шарнирно оперты — кривые 4 ( $Z_1 = 0, Z_2 = \infty$ ).

Аналогичные кривые для антисимметричных волн представлены на фиг. 1, б.



Фиг. 2

На фиг. 2 построены зависимости безразмерных значений крутильного (кривые 1, 3) и изгибного (кривые 2, 4) импедансов

$$\zeta_1 = -\frac{i\omega}{D_0\kappa_0} Z_1 = \frac{1}{3} \kappa_0 b \left[ \frac{6EH^3(1-\sigma_0^2)m^2}{E_0H_0^3(1+\sigma)} - \frac{\rho H(\kappa_0 b)^2}{\rho_0 H_0} \right]$$

$$\zeta_2 = -\frac{i\omega}{D_0\kappa_0^3} Z_2 = \frac{4EH(1-\sigma_0^2)(b\kappa_0)^3 m^4}{E_0H_0(\kappa_0 H)^2} - \frac{\rho H\kappa_0 b}{\rho_0 H_0}$$

от параметра  $\kappa a$  для нулевой (а) и первой (б) нормальных волн. Кривые 1, 2 соответствуют симметричным, а 3, 4 — антисимметричным волнам.

Как видно из фиг. 1, а, на низких частотах (малые  $\kappa a$ ) по пластине может распространяться только одна из симметричных нормальных волн — нулевая мода.

Предельное значение  $m_0$  при  $\kappa a \rightarrow 0$  равно  $\{(1+b/a)[(1-\sigma^2)(1+4b^2/aH^2)]\}^{-1/4}$ , что составляет при выбранных значениях параметров 0.4193. При  $b=0$  (ребра отсутствуют) получим предельное значение для пластины со свободными кромками  $(1-\sigma^2)^{-1/4} = 1.024$ .

При  $\kappa a \geq 2$  величина  $m_0$  для пластины с ребрами становится близкой к соответствующему значению для пластины с шарнирно опертыми кромками. Это вызвано тем, что при этих значениях  $\kappa a$  безразмерный импеданс  $\zeta_2$  становится много больше импеданса  $\zeta_1$  (кривые 2 и 1 на фиг. 2, а), а значения  $\zeta_2 = \infty$ ,  $\zeta_1 = 0$  соответствуют пластине с шарнирно опертыми кромками. Следует отметить, что для этой моды оба импеданса имеют массовый (индуктивный) характер ( $\zeta_{1,2} > 0$ ).

Для антисимметричной нулевой моды крутильный импеданс  $\zeta_1$  сравнительно мал и имеет массовый характер. При малых  $\kappa a$  изгибный импеданс  $\zeta_2$  тоже невелик, но имеет упругий (емкостной) характер ( $\zeta_2 \leq 0$  при  $\kappa a \leq 0.55$ ). Поэтому антисимметричной волновое число  $m_0$  для пластины с ребрами в этом диапазоне частот близко к соответствующему значению для пластины со свободными кромками (см. фиг. 1, б). Затем импеданс  $\zeta_2$  приобретает массовый характер и довольно быстро возрастает. При  $\kappa a \geq 3$  уже выполняется условие  $\zeta_2 \gg \zeta_1$  и поэтому волновое число  $m_0$  для оребренной пластины становится близким к соответствующему значению для пластины с шарнирно опертыми кромками.

Аналогичная картина наблюдается и для последующих мод. Крутильные импедансы для первой симметричной и первой антисимметричной мод сравнительно невелики (см. фиг. 2, б). Определяющими являются изгибные импедансы. Вначале они оба имеют упругий характер, а затем становятся массовыми.

Пересечения кривых, отвечающих пластине с ребрами, с соответствующими кривыми для пластины со свободными кромками на фиг. 1 происходят в моменты обращения импедансов  $\zeta_2$  в нуль (см. фиг. 2).

При тех значениях  $\kappa a$ , когда справедливо неравенство  $\zeta_2 \gg \zeta_1$ , волновые числа для пластины с ребрами близки к соответствующим значениям для пластины с шарнирно опертыми кромками.

Поступила 25 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бобровицкий Ю. И., Генкин М. Д. Колебания упругой полосы. В сб.: Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М., «Наука», 1975.
2. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.