УДК 539.419:624.074.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТОЛЩИН ДВУХСЛОЙНОЙ КОМБИНИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ

И. Н. КАЛИНИН

(*Горький*)

Рассматривается оптимизация по весу комбинированного цилиндрического баллона, состоящего из внутреннего металлического слоя, усиленного стеклопластиком с нитями, намотанными в кольцевом направлении. Эта конструкция рассматривалась ранее (см., например, [1]). Оптимальные толщины определялись из условий равнопрочности металлического слоя и одновременности разрушения металла и стеклопластика. Для выполнения последнего условия варьировалась степень предварительного натяжения стеклоленты. Здесь используется иной критерий оптимальности — минимум веса, а степень предварительного натяжения включена в число параметров оптимизации. Проведено сравнение с ранее полученными результатами и показана эффективность предлагаемого подхода.

Для бесконечно длинного тонкого цилиндрического баллона, состоящего из двух слоев (внутреннего металлического и внешнего из стеклопластика с нитями, намотанными в кольцевом направлении) и находящегося под действием равномерного внутреннего давления интенсивностью p, необходимо найти степень предварительного напряжения стеклопластика s_0 (при $p=0$) и толщины (h_1 — металла, h_2 — стеклопластика) из условия минимума веса конструкции

$$F=\min_{\{s_0,h_1,h_2\}} F(s_0, h_1, h_2) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sigma_i \leqslant \sigma^*, \qquad s \leqslant s^*, \qquad s_0 \geqslant 0 \tag{2}$$

$$h_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2) \tag{3}$$

где σ_i — интенсивность напряжений в металлической оболочке; s — напряжение в стеклопластике; σ^*, s^* — пределы прочности металла и стеклопластика.

Задача решается при следующих предположениях и допущениях: оболочка считается тонкой и радиусы кривизны обоих слоев принимаются равными R; несущей способностью полимера, связывающего намотанные в кольцевом направлении стеклонити, можно пренебречь; металлическая и стеклопластиковая оболочки деформируются совместно.

В работе используется условие пластичности Мизеса

$$\sigma_i^2=\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2 \tag{4}$$

и момент появления пластических деформаций в металлической оболочке устанавливается по достижению интенсивностью напряжений σ_i предела текучести.

Условия равновесия и условия совместности деформирования слоев записываются в виде [2, 3]:

$$\sigma_1=pR\,/\,(2h_1), \qquad \sigma_2h_1+sh_2=pR \tag{5}$$

$$\frac{s}{E_2}-\frac{s_0}{E_2}=\frac{1}{E_1}(\sigma_2-\nu\sigma_1)+\frac{s_0}{E_1}\frac{h_2}{h_1} \tag{6}$$

где σ_1, σ_2 — осевое и кольцевое напряжения в металлической оболочке; s — напряжение в стеклопластике; E_1, E_2 — модули упругости соответственно металла и стеклопластика.

Вес единицы длины оболочки через искомые параметры выражается следующим образом:

$$F=2\pi R(\gamma_1h_1+\gamma_2h_2) \tag{7}$$

где γ_1, γ_2 — удельные веса соответственно металла и стеклопластика. Следует отметить, что от s_0 вес не зависит. Зависимость решения задачи от s_0 проявляется через ограничения. Вес F является положительно-определенной линейной функцией толщин h_1, h_2. Из этого следует, что оптимум будет достигаться на поверхности ограничений (2).

Возможны несколько случаев: (*а*) существенным (активным) является первое ограничение в (2), т. е. $\sigma_i=\sigma_i^*$; (*б*) существенным является второе ограничение в (2), т. е. $s=s^*$; (*в*) первое и второе ограничения в (2) выполняются как строгие равенства, т. е. $\sigma_i=\sigma^*$, $s=s^*$; (*г*) существенным является ограничение на степень предварительного напряжения стеклопластика, т. е. $s_0=0$.

Рассмотрим подробно случай (*а*). Математически задачу минимизации веса комбинированной оболочки можно сформулировать так. Необходимо найти значение параметра α, определяемого по формуле

$$\alpha(h_1,\ h_2,\ s_0)=\sigma_2\,/\,\sigma_1 \tag{8}$$

из условия $F(\alpha)=\min\limits_{\{\alpha\}} F$ при ограничениях

$$\sigma_i=\sigma^*,\qquad s\leqslant s^*,\qquad s_0\geqslant 0 \tag{9}$$

Условие (4), учитывая (8) и первое ограничение в (9), запишется в виде

$$(\sigma^*)^2=\sigma_1{}^2(1-\alpha+\alpha^2) \tag{10}$$

Подставив в (10) σ_1 из первой формулы (5), определим $h_1(\alpha)$

$$h_1(\alpha)=pR(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}\,/\,(2\sigma^*) \tag{11}$$

Из второго соотношения в (5) с учетом (8) найдем

$$h_2(\alpha)=pR(1-\alpha\,/\,2)\,/\,s \tag{12}$$

Из естественного условия неотрицательности толщин следует, что $\alpha\leqslant 2$. Нетрудно убедиться, что $1-\alpha+\alpha^2>0$ при всех α и таким образом h_1 существует также при всех α.

Для $F(\alpha,\ s_0)$, подставив (11), (12) в (7), получим следующее выражение:

$$F(\alpha,\ s_0)=2\pi R\left[\gamma_1\frac{pR}{2\sigma^*}\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}+\gamma_2\frac{pR}{s}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \tag{13}$$

Вес в (13) выражен через α и s, причем s зависит от степени предварительного напряжения s_0 и толщин h_1, h_2.

Из (13) видно, что оптимальным значением s_0 является то, при котором s достигает максимума, т. е. $s=s^*$. Из сказанного следует вывод: случай (*а*) сводится к (*в*), а оптимальное значение параметра s_0 находится из условия $s=s^*$. Случай, когда выполнения этого условия невозможно добиться ввиду третьего ограничения в (2), будет рассмотрен отдельно.

На основании изложенного в дальнейшем в формуле (13) полагаем $s=s^*$.

Для определения оптимального значения α находится производная $dE(\alpha)\,/\,d\alpha$ и приравнивается нулю

$$\gamma_1\frac{pR}{4\sigma^*}(2\alpha-1)(1-\alpha+\alpha^2)^{-1/2}-\gamma_2\frac{pR}{2s^*}=0 \tag{14}$$

Для существования экстремума функции должно выполняться следующее условие:

$$\gamma_1\frac{pR(2\alpha-1)}{4\sigma^*\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}>0\quad\text{или}\quad\alpha>\frac{1}{2}$$

Из уравнения (14) находим два значения

$$\alpha_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-A},\quad A=\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{\gamma_2\sigma^*}{\gamma_1 s^*}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\gamma_2\sigma^*}{\gamma_1 s^*}\right)^2\right]^{-1} \tag{15}$$

причем из условия $\alpha>{}^1/_2$ следует, что поставленной задаче удовлетворяет только значение α_1 (перед корнем необходимо брать знак плюс).

Исследуем знак второй производной в этой точке

$$\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}=\frac{3}{4}\gamma_1\frac{pR}{\sigma^*}(1-\alpha+\alpha^2)^{-3/2}$$

Так как

$$\gamma_1\frac{pR}{\sigma^*}>0,\qquad(1-\alpha+\alpha^2)^{-3/2}>0$$

то, следовательно, при $\alpha=\alpha_1$ функция $F(\alpha)$ принимает минимальное значение. Для существования α, дающего функции $F(\alpha)$ экстремальное значение, необходимо, чтобы $A\leqslant{}^1/_4$.

Из условия $1/2<\alpha\leqslant 2$ найдем интервал определенности для параметров материалов, при которых существует экстремум функции $F(\alpha)$

$$0<B\leqslant\frac{3}{4},\qquad B=\left(\frac{\gamma_2\sigma^*}{\gamma_1 s^*}\right)^2$$

Случай $B\geqslant 3/4$ соответствует $h_2=0$, т. е. конструкцией минимального веса является металлическая оболочка, у которой толщина $h_1=\sqrt{3}\,pR/(2\sigma^*)$ определяется из первого уравнения (9).

Искомые оптимальные толщины двухслойной оболочки находятся из соотношений (11), (12) при $\alpha=\alpha_1$:

$$h_1=\frac{pR}{2\sigma^*}\sqrt{1-A},\qquad h_2=\frac{pR}{s^*}\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-A}\right]\tag{16}$$

Для обеспечения совместности деформаций металлической оболочки и оболочки из стеклопластика необходимо создать предварительное напряжение в стеклопластиковой оболочке [3]. Из условия (6) с учетом того, что при $p=0$ напряжения $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-s_0h_2/h_1$, а также $s=s^*$, определим s_0:

$$s_0=s^*-A_1,\qquad A_1=\frac{E_2}{2}(2-\nu)\left[\frac{E_1}{2\sigma^*}\sqrt{1-A}+\frac{E_2}{s^*}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-A}\right)\right]^{-1}\tag{17}$$

Если s_0 из (17) удовлетворяет третьему ограничению в (2), то задача решена. В противном случае данное ограничение является активным и необходимо положить $s_0=0$. Этот случай будет рассмотрен ниже.

Перейдем к рассмотрению случая (*б*). Аналогично предыдущему введем параметр α, а также новый параметр β следующим образом: $\beta=\sigma_i/\sigma^*$ $(0<\beta\leqslant 1)$. Для F имеем выражение

$$F(\alpha,\beta)=2\pi R\left[\frac{\gamma_1 pR}{2\beta\sigma^*}(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}+\frac{\gamma_2 pR}{s^*}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\tag{18}$$

Из (18) вытекает, что оптимальное значение β соответствует $\sigma_i=\sigma^*$, т. е. $\beta=1$. Отсюда следует вывод: случай (*б*) сводится к (*в*), который был рассмотрен выше.

Осталось рассмотреть случай (*г*). Для h_1 из первого условия в (5) с учетом (4) и (8) получим

$$h_1(\alpha)=pR(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}/(2\sigma_i)\tag{19}$$

а $h_2(\alpha)$, как и прежде, выражается по формуле (12). Из условия (6) с учетом (5), (8), (19) при $s_0=0$ найдем s:

$$s=\frac{pRE_2}{2E_1h_1}(\alpha-\nu)=\frac{\sigma_iE_2(\alpha-\nu)}{E_1(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}}$$

В этом случае целевая функция имеет вид

$$F=2\pi R\left[\frac{\gamma_1 pR}{2\sigma_i}(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}+\frac{\gamma_2 pRE_1(1-\alpha/2)(1-\alpha+\alpha^2)^{1/2}}{\sigma_iE_2(\alpha-\nu)}\right]\tag{20}$$

Из выражения (20) следует, что F достигает минимума при $\sigma_i=\sigma^*$, а для нахождения оптимального α приравнивается нулю производная $dF/d\alpha$. Параметр α определяется из алгебраического уравнения третьего порядка

$$\alpha^3\left[\gamma_1-\gamma_2\frac{E_1}{E_2}\right]+\alpha^2\left[\frac{\gamma_1}{2}(-4\nu-1)+\gamma_2\frac{E_1}{E_2}\left(2\nu+\frac{1}{2}\right)\right]+$$

$$+\alpha\left[\gamma_1\nu(\nu+1)+\gamma_2\frac{E_1}{E_2}\left(1-\frac{7}{2}\nu\right)\right]+\left[-\nu^2\frac{\gamma_1}{2}+2\gamma_2\frac{E_1}{E_2}(\nu-1)\right]=0\tag{21}$$

В зависимости от соотношения коэффициентов уравнение (21) может иметь один или три действительных корня, которые находятся по известным формулам [4]. Если имеется один действительный корень, дающий минимум целевой функции, при котором удовлетворяются все ограничения задачи, то искомые параметры легко определяются. Если не выполняется хотя бы одно ограничение, то оптимальное решение лежит на ограничениях и его можно найти.

В случае трех действительных корней сравнивается значение целевой функции при α, соответствующем наименьшему локальному минимуму, удовлетворяющему всем ограничениям, со значениями целевой функции на границах области определения задачи ($h_2=0$, $s=s^*$). Параметры, соответствующие минимальному из этих значений, являются оптимальными. Если же нет корней, соответствующих локальному минимуму и удовлетворяющих всем ограничениям задачи, то решение лежит на границе и оно легко определяется.

Полученные результаты можно объединить следующим образом: при $0<B<{}^3/_4$ и $s^*\geqslant A_1$ оптимальна двухслойная оболочка, у которой оба слоя разрушаются одновременно, а оптимальные параметры определяются по формулам (16), (17); при $B\geqslant{}^3/_4$ оптимальна однослойная металлическая оболочка с толщиной $h_1=\sqrt{3}\,pR\,/\,(2\sigma^*)$; при $0<B<{}^3/_4$ и $s^*<A_1$ оптимальные толщины определяются, исходя из анализа решения уравнения (21) и граничных значений целевой функции, а $s_0=0$.

Следует отметить, что в оптимальной конструкции металлическая оболочка всегда находится в предельном напряженном состоянии, а если третье ограничение в (2) не является существенным, то металлическая и стеклопластиковая оболочки разрушаются одновременно.

Предлагаемый подход к оптимизации по весу комбинированной оболочки в упругой стадии может быть применен для оптимизации в пластической стадии, например, по схеме [3].

Могут быть также учтены геометрические ограничения, накладываемые на искомые параметры. В [3] оптимальные толщины находятся из условий $\sigma_1=\sigma_2=\sigma^*$, $s=s^*$. Формулы для их определения имеют вид

$$h_1=\frac{pR}{2\sigma^*},\qquad h_2=\frac{pR}{2s^*} \tag{22}$$

Сравним полученные результаты с данными работы [3].

Предположим, что условия задачи таковы, что оптимальной является двухслойная оболочка и третье ограничение в (2) не является существенным. Найдем отношение весов оболочек, параметры которых найдены по формулам (22), т. е. согласно [3], и по формулам (16) в граничных точках изменения B. Вес рассматриваемых оболочек с точностью до постоянного множителя $2\pi R$ обозначим соответственно F_+ и F_-.

При $B={}^3/_4$ для оболочек минимального веса и равнопрочной будем иметь

$$F_-=\sqrt{3}\,\gamma_1\frac{pR}{2\sigma^*},\qquad F_+=\gamma_1\frac{pR}{2\sigma^*}+\gamma_2\frac{pR}{2s^*} \tag{23}$$

Из (23) определим искомое отношение $F_+\,/\,F_-=(2\sqrt{3}+3)\,/\,6$.

Таким образом, при $B={}^3/_4$ вес оболочки минимального веса меньше F_+ примерно на 7.7%. При $B\to0$ отличие в пределе составляет $\approx$15.6%. При $\alpha=1$, т. е. $B={}^1/_4$, результаты, полученные с применением двух рассматриваемых подходов, совпадают.

Если конструкцией минимального веса является однослойная оболочка, отличие может быть больше 15.6%. Так, при $\sqrt{B}\to\infty$, $F_+\,/\,F_-=[1+\sqrt{B}]\,/\,\sqrt{3}\to\infty$.

Приведенные результаты показывают эффективность полученного решения.

Поступила 10 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Образцов И. Ф., Васильев В. В.* Оптимальное проектирование пластинок и оболочек из армированных пластмасс. Теория пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.
2. *Елпатьевский А. Н.* Исследование напряженного состояния двухслойной цилиндрической оболочки. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 3.
3. *Елпатьевский А. Н., Васильев В. В.* Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М., «Машиностроение», 1972.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.