

КОСОЕ ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА РАЗРЕЗЕ

А. И. ГЛУШКО

(Москва)

Рассмотрена автомодельная задача о взаимодействии плоской пластической волны сильного разрыва с границей раздела двух упругопластических полупространств. Касательные напряжения на границе принимаются равными нулю. Свойства среды описываются системой уравнений пластического течения Праудтля — Рейсса. Автомодельность позволяет свести решение задачи к решению одного трансцендентного уравнения, корни которого находятся численно при помощи ЭВМ.

При изучении движений твердой деформируемой сплошной среды под действием сильных нагрузок возникает вопрос, следует ли учитывать прочностные свойства среды или ими можно пренебречь. Можно предложить схему эксперимента, в котором рассматривается преломление плоской волны давления на границе двух одинаковых полупространств, контактирующих вдоль плоскости при условии свободного проскальзывания.

Если при движении среды прочностными свойствами нельзя пренебречь, то при преломлении должны возникать отраженные волны, которые могут быть зарегистрированы экспериментально. Ниже принимается, что среда описывается уравнениями упругопластического течения с обобщенным условием текучести типа Мизеса — Шлейхера [1].

В рамках принятой модели среды решена автомодельная задача о преломлении плоской волны. Решение строится в виде комбинации пластических и упругих волн. Приводятся значения интенсивностей отраженной и преломленной упругих волн.

1. Рассмотрим упругопластическое пространство и систему декартовых координат, связанную с ним. Введем обозначения: U , V — скорости по осям x , y соответственно, ε — объемное сжатие, ρ — плотность, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, G — модуль сдвига, h — параметр, входящий в условие пластичности

$$c_1 = \sqrt{G/\rho_1}, \quad u = U/c_1, \quad v = V/c_1, \quad k = dp/d\varepsilon$$

$$p = -\sigma_{ii}/3G, \quad \sigma = \sigma_{yy}/G, \quad \tau = \sigma_{xy}/G$$

Рассматривая плоскую задачу, примем, что свойства упругопластической среды описываются системой уравнений из [2]. Будем считать, что движение происходит в плоскости x , y . Принимаем, что зависимость давления p от ε линейная, но различная при нагрузке и разгрузке, причем $k = k_1$ при $\varepsilon > 0$, $k = k_2$ при $\varepsilon < 0$ ($k_1 < k_2$).

Условие пластичности принимается в виде $(\sigma + p)^2 + \tau^2 = (hp)^2$, при этом $h = \text{const}$ [3]. Сжимающие напряжения принимаются отрицательными и G постоянным. Система уравнений в принятых обозначениях записывается в виде

$$\frac{\partial(\sigma + p)}{\partial t} + \lambda(\sigma + p) = c_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \lambda \tau = c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2 \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c_1 k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_{zz} + Gp = 0$$

$$\lambda = c_1 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) (\sigma + p) + c_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tau - h^2 p \frac{\partial p}{\partial t} \right] (hp)^{-2}$$

Решения системы (1.1) будут описывать пластические движения среды только при $\lambda > 0$. При $\lambda < 0$ среда находится в упругом состоянии и описывается системой первых шести уравнений (1.1), в которых следует положить $\lambda = 0$. Нетрудно показать, что система (1.1) описывает пластические движения среды, для которой условие пластичности задается соотношением

$$(\sigma + p)^2 + \tau^2 = (hp)^2 \quad (1.2)$$

Следуя [2], рассмотрим решения указанной системы, зависящие от автомодельной переменной

$$\Phi = \arctg \frac{y}{x + c_2 t / \sin \alpha}, \quad c_2 = c_1 \sqrt{(1+h)k_1} \quad (1.3)$$

Сделаем замену переменной

$$\Phi = \arcsin [g \sqrt{a(s)}], \quad g = \sin \alpha / \sqrt{(1+h)k}$$

Функция $a = a(s)$ определяется из уравнения характеристик системы (1.1)

$$a^2(s) - [1 + (1+hs)k]a(s) + ks(s+h) = 0 \quad (1.4)$$

Переменная s связана со значением касательного напряжения τ' и давления p на характеристике соотношением $s^2 = 1 - \tau'^2 / (hp)^2$.

Уравнение (1.4) имеет два корня, определяющих два пучка прямых линий характеристик, исходящих из начала координат. Соответственно система (1.1) имеет два решения, которые могут быть интерпретированы как продольная и поперечная пластические волны. Продольная волна соответствует большему корню $a_+(s)$, поперечная — меньшему корню $a_-(s)$ уравнения (1.4).

Пусть σ' , τ' — компоненты тензора напряжений в системе координат, повернутой относительно системы x , y на угол Φ , определенный по (1.3). Воспользовавшись результатами [4], получим выражения для функций p , σ' , τ' , u , v на пластических волнах

$$p = p_i \varphi(s), \quad \sigma' = -(1+hs)p, \quad \tau' = \text{sign } \tau_i' \sqrt{1-s^2} hp$$

$$u = p_i u(s), \quad u(s) = \int_{s_i}^s \varphi(\xi) c(\xi) b(\xi) d\xi$$

$$v = p_i v(s), \quad v(s) = \int_{s_i}^s \varphi(\xi) c(\xi) \left[b(\xi) \sqrt{\frac{1}{g^2 a} - 1 - \frac{1}{gk}} \right] d\xi \quad (1.5)$$

$$\varphi(s) = \exp \int_{s_i}^s c(\xi) d\xi, \quad c(\xi) = \frac{(1-d)hk}{a(\xi) - (1+h\xi)k}$$

$$d = \frac{\text{sign } \tau_i \sqrt{1-s^2} da}{a\sqrt{1/(g^2 a)} - 1 ds}, \quad b(\xi) = \frac{g}{k} \left[\frac{a\xi - k(\xi+h)}{\text{sign } \tau_i \sqrt{1-\xi^2}} - \sqrt{\frac{a}{g^2} - a^2} \right]$$

Здесь p_i, τ_i', s_i — значения соответствующих величин на характеристике $\vartheta_i = \arcsin [g\sqrt{a(s_i)}]$.

На характеристике, соответствующей $s=1$, возможно скачкообразное изменение p, σ' и нормальной составляющей скорости v_n . Из соотношений на сильных разрывах, линейной зависимости p от ε и условия $s=1$ следует, что скорость распространения сильного разрыва равна $c_2 = -c_1[(1+h)k_1]^{1/2}$, а изменения v_n и σ' определяются по формулам

$$\Delta\sigma' = -(1+h)\Delta p, \quad \Delta v_n = \frac{\Delta p}{k_1} \frac{c_2}{c_1}$$

где Δp — изменение давления на разрыве. Касательное напряжение τ' не изменяется при переходе через разрыв и равно нулю.

Можно показать [2], что для решений (1.5) величина

$$\lambda = \frac{a(s) - (k+1)}{shp} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.6)$$

При $s=0$ величина λ не определена. Однако, так как $a(0) = k+1$, то $\lambda(s)$ при $s=0$ можно доопределить по непрерывности. Ниже будет использована продольная пластическая волна разгрузки. Нетрудно показать, что при $hk_2 > 1 + 1/(1+h)$ корень $a_+(s)$ — монотонно возрастающая функция при $|s| \leq 1$. Тогда $\lambda > 0$ на продольной пластической волне разгрузки при всех $|s| \leq 1$.

При $\lambda=0$ среда находится в упругом состоянии. Пусть $\Delta\tau'$ — изменение касательного напряжения на упругой поперечной волне. Тогда $\Delta p=0$; положение фронта волны, проекции скачка скорости на оси x и y определяются из следующих выражений:

$$\vartheta_s = \arcsin(g), \quad \Delta u = \Delta\tau' \cos \vartheta_s, \quad \Delta v = \Delta\tau' \sin \vartheta_s. \quad (1.7)$$

Аналогично для упругой продольной волны Δp — изменение давления, $\Delta\tau'=0$:

$$\vartheta_s = \arcsin(g\sqrt{1+k_1}), \quad \Delta u = -\frac{\Delta p}{k_1} \sin \vartheta_s, \quad \Delta v = \frac{\Delta p}{k_1} \cos \vartheta_s. \quad (1.8)$$

2. Будем считать, что в плоскости $y=0$ касательные напряжения равны нулю. Рассмотрим преломление волны постоянного давления на разрезе $y=0$. Волна постоянного давления — это волна сильного пластического разрыва, распространяющаяся в полупространстве $y>0$ в отрицательном направлении оси x . Пусть фронт сильного разрыва образует угол α с отрицательным направлением оси x . Тогда за фронтом

$$p = p_0, \quad u = -\frac{c_2}{c_1} \frac{p_0}{k_1} \sin \alpha, \quad v = -\frac{c_2}{c_1} \frac{p_0}{k_1} \cos \alpha \quad (2.1)$$

На разрезе $y=0$ потребуем выполнения условий

$$\tau_1 = \tau_2 = 0, \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad (2.2)$$

Здесь индекс два означает принадлежность соответствующих величин к полупространству $y>0$, индекс единица — к полупространству $y<0$.

Задача состоит в нахождении решения системы (1.1), удовлетворяющего граничным условиям (2.2) и начальным условиям (2.1). В верхнем полупространстве

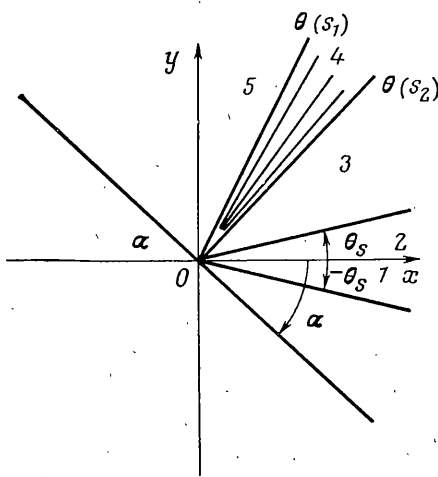
$y > 0$ решение ищем в виде комбинации падающей волны сильного разрыва, отраженной продольной пластической волны разгрузки (зона 4, фиг. 1), упругой поперечной волны и зон постоянного течения (зоны 5, 3, 2, 1, фиг. 1).

В области $y < 0$ решение ищем в виде волны сильного разрыва и упругой поперечной волны. Нетрудно видеть, что в такой структуре решения изменение давления происходит на сильных разрывах и пластической волне. Из этого следует, что в зоне 2 давление p_2 постоянно и равно давлению на характеристике $\vartheta_2 = \vartheta(s_2)$, т. е. $p_2 = p_0 \varphi(s_2)$; аналогично давление в зоне 1 постоянно и равно p_1 . В рассматриваемой задаче $p_2 \neq p_1$; из физических соображений следует ожидать $p_2 \geq p_1$.

Условия (2.2) при данной структуре решения приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} -hp_1 \sin 2\alpha + \Delta\tau_1' \cos 2\vartheta_s &= 0, \\ hp_2 \sin(\arccos(s_2) \operatorname{sign} \tau_1' + 2\vartheta_2) + \Delta\tau_2' \cos 2\vartheta_s &= 0 \\ -p_2 - hp_2 \cos(\arccos(s_2) \operatorname{sign} \tau_1' + 2\vartheta_2) + \Delta\tau_2' \sin 2\vartheta_s &= \\ = -p_1 - hp_1 \cos 2\alpha - \Delta\tau_1' \sin 2\vartheta_s & \\ -\frac{p_0}{k_1} \frac{c_2}{c_1} \cos \alpha + v(s_2) p_0 + \Delta\tau_2' \sin \vartheta_s &= -\frac{p_1}{k_1} \frac{c_2}{c_1} \cos \alpha + \Delta\tau_1' \sin \vartheta_s \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь p_0 — интенсивность падающей волны; неизвестными являются: p_1 — интенсивность волны сильного разрыва в полупространстве $y < 0$; $\Delta\tau_1'$,



$\Delta\tau_2'$ — интенсивности упругих поперечных волн в полупространстве $y < 0$ и $y > 0$; s_2 — значение s , соответствующее характеристике, разделяющей зону пластического движения 4 и зону постоянного течения 3; $p_2 = p_0 \varphi(s_2)$; τ_1' — величина касательного напряжения на характеристике $\vartheta = \vartheta(s_1)$; величина s_1 определяет характеристику, разделяющую зону пластического движения 4 и зону постоянного течения 5, и находится из условия непрерывного сопряжения по уравнению

$$s_1 - \cos 2[\alpha + \arcsin(g\sqrt{a_+(s_1)})] = 0 \quad (2.4)$$

Фиг. 1

Функции $\varphi(s)$ и $v(s)$ определены в (1.5), причем $s_i = s_1$. Интенсивности поперечных волн $\Delta\tau_1'$ и $\Delta\tau_2'$ должны быть такими, чтобы не нарушалось условие пластичности, т. е.

$$[p_2 + \sigma'(\vartheta_s)]^2 + [\tau'(\vartheta_s) + \Delta\tau_2']^2 \leq (hp_2)^2 \quad (2.5)$$

и аналогичное условие на поперечной волне в полупространстве $y < 0$.

Из (2.5) нетрудно получить, что значения касательных напряжений за фронтом поперечной волны τ_i^+ ($i=1, 2$) должны удовлетворять неравенствам

$$|\tau_1^-| \geq |\tau_1^+|, \quad |\tau_2^-| \geq |\tau_2^+| \quad (2.6)$$

где τ_i^- ($i=1, 2$) — значения касательных напряжений перед фронтом.

Можно показать [2], что при $k_1 > 4$ неравенство $|\tau_2^-| \geq |\tau_2^+|$ для полу-

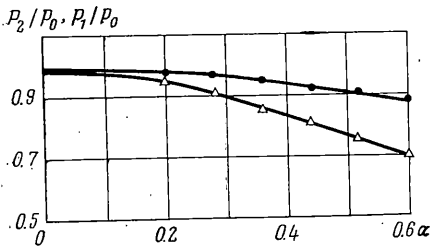
пространства $y < 0$ выполняется для любого угла падения $\alpha \leq \pi/2$. Исключив из системы (2.3) $p_1, \Delta\tau_1', \Delta\tau_2'$, получим одно уравнение относительно s_2

$$-\frac{c_2}{c_1} \frac{\cos \alpha}{k_1} + v(s_2) - \frac{h\varphi(s_2) \sin \vartheta_s \sin \beta}{\cos 2\vartheta_s} =$$

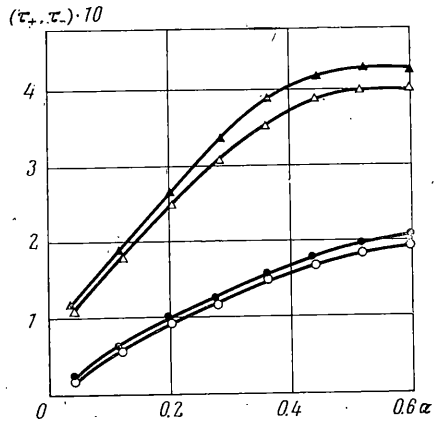
$$= \varphi(s_2) \left(-\frac{c_2}{c_1} \frac{\cos \alpha}{k_1} + \frac{h \sin 2\alpha \sin \vartheta_s}{\cos 2\vartheta_s} \right) \frac{\cos 2\vartheta_s + h \cos(\beta - 2\vartheta_s)}{\cos 2\vartheta_s + h \cos 2(\alpha - \vartheta_s)} \quad (2.7)$$

$$\beta = \arccos(s_2) \operatorname{sign} \tau_1' + 2\vartheta(s_2)$$

Решению задачи будут соответствовать только те корни (2.7), которые удовлетворяют неравенству $s_2 < s_1$ и (2.6). Для малых углов решение уравнения (2.7) может быть получено аналитически; однако особый интерес представляет исследование решения задачи для больших значений α . В этом случае корни (2.7) могут быть определены только численно в зависимости от α .



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Численное исследование задачи проводилось при фиксированных значениях $k_1=4, k_2=12, p_0=0.2$. Параметр h выбирается так, чтобы выполнялись неравенства $hk < 1, hk_2 > 1 + 1/(1+h)$. В этом случае, как следует из (1.6), разгрузка на продольной волне будет происходить пластически при всех $|s| \leq 1$, а нагрузка на продольной волне будет происходить пластически только при $hk_1 \leq s \leq 1$.

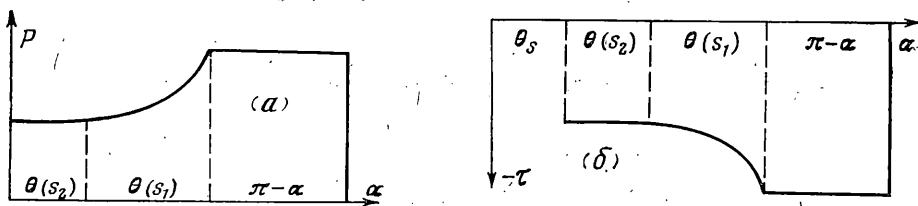
При расчетах значение h принималось равным 0.16, 0.18, 0.20, 0.22, 0.24. Исследовалась зависимость давлений p_2, p_1 , интенсивность упругих поперечных волн $\Delta\tau_1', \Delta\tau_2'$ от угла падения α . На фиг. 2 представлены зависимости $p_2/p_0, p_1/p_0$ от α при $h=0.24$. Кривая, отмеченная кружками, соответствует p_2/p_0 , треугольниками — p_1/p_0 . Результаты расчета подтверждают сделанное выше предположение о разгрузке среды, а также предположение о том, что давление в области 2 больше давления в области 1, $p_2 > p_1$.

Аналогичная задача в упругой постановке имеет простое решение, причем оказывается, что среда в полупространстве $y > 0$ также должна разгружаться, но давление на границе непрерывно. Зависимость $p_2/p_0, p_1/p_0$ от h при постоянном α незначительна, например, при $\alpha=0.48 \text{ рад}$ p_2/p_0 монотонно убывает от $p_2/p_0=0.935$ при $h=0.16$ до $p_2/p_0=0.92$ при $h=0.22$.

На фиг. 3 представлены зависимости касательных напряжений перед и за фронтом упругих поперечных волн от угла α . Кривая, отмеченная треугольниками, соответствует касательным напряжениям перед фронтом волны $\vartheta = \vartheta_s + 0$ для $h=0.24, y > 0$. Светлыми треугольниками отмечена кривая, соответствующая касательным напряжениям перед фронтом для $h=0.16, y > 0$.

Аналогично, кружками отмечены зависимости касательных напряжений за фронтом волны для $h=0.24$, $h=0.16$ в полупространстве $y < 0$.

Результаты расчетов показывают, что все указанные величины монотонно возрастают при увеличении угла α . Максимальное значение касательных напряжений составляет примерно 20% от величины давления p_0 в падающей волне. Зависимость



Фиг. 4

τ' от h при постоянном α более заметна, чем зависимость p_2/p_0 от h ; например, при $\alpha=0.48$ рад τ' монотонно возрастает от $\tau'=296 \cdot 10^{-1}$ при $h=0.16$ до $\tau'=399 \cdot 10^{-2}$ при $h=0.22$.

Интенсивность упругих поперечных волн $\Delta \tau_1'$ монотонно возрастает при увеличении α . Максимальное значение составляет примерно 10% от величины давления p_0 . В области $y < 0$ касательные напряжения ведут себя аналогичным образом, причем численные значения оказываются на порядок меньше соответствующих величин в полупространстве $y > 0$. Типичные зависимости давления и касательных напряжений от α в полупространстве $y > 0$ показаны на фиг. 4, а, б.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за внимание к работе.

Поступила 23 X 1975г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
2. Скобеев А. М. О некоторых плоских задачах динамики грунтов. Инж. ж. МГТ, 1966, № 1.
3. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Задача о поршне для уравнений динамики грунтов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
4. Скобеев А. М., Ковшов А. Н. Отражение пластической волны, падающей под углом на жесткую стенку. Инж. ж. МГТ, 1973, № 1.