МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1977

УДК 531.8

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ГРУЗА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

В. М. МАМАЛЫГА, Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

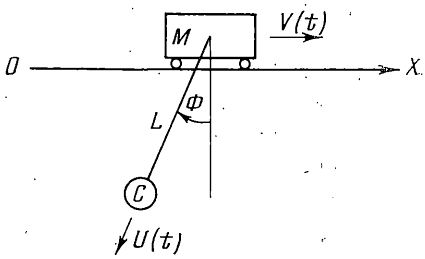
(Москва)

Рассматривается управляемая механическая система в виде висящего груза (маятника) с изменяемой длиной подвеса. Управление осуществляется двумя двигателями: один из них передвигает точку подвеса по горизонтальной прямой, а другой осуществляет подъем или опускание груза. Требуется переместить груз в вертикальной плоскости из одного положения в другое и погасить его колебания. Рассматриваемая задача важна в связи с исследованием и автоматизацией режимов работы широко распространенных подъемно-транспортных установок типа мостовых кранов. Построены способы управления, решающие поставленную задачу при реальных ограничениях на возможности двигателей и близкие к оптимальному быстродействию. Используются оптимальные режимы, полученные в работах [1-4] и реализованные практически на мостовом кране в Одесском институте инженеров морского флота.

1. Постановка задачи. Пусть точка подвеса M математического маятника C может перемещаться вдоль горизонтальной оси OX со скоростью $V(t)$, а длина подвеса L изменяться со скоростью $U(t)$ (см. фиг. 1). Обозначим через X координату точки подвеса M, а через Φ — угол отклонения маятника C от вертикали (фиг. 1).

Требуется переместить груз C из состояния покоя в момент $t=0$ снова в состояние покоя, погасив его колебания в конце процесса транспортировки. Горизонтальное перемещение должно равняться A, а начальная и конечная длины подвеса равны соответственно L_0 и L_1. Граничные условия запишутся в виде

$$X(0)=X^{\cdot}(0)=\Phi(0)=\Phi^{\cdot}(0)=0,\quad L(0)=L_0$$
$$X(T)=A,\ X^{\cdot}(T)=\Phi(T)=\Phi^{\cdot}(T)=0,\quad L(T)=L_1 \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Через T обозначено время окончания процесса. Без ограничения общности будем считать, что груз опускается: $L_1 \geqslant L_0$. В противном случае можно обратить время и поменять местами начальную и конечную точки. Кроме того, за счет выбора направления оси X можно всегда считать, что $A \geqslant 0$. На управляющие функции U и V наложены ограничения

$$0 \leqslant U \leqslant U_0,\quad 0 \leqslant V \leqslant V_0 \tag{1.2}$$

где U_0 и V_0 — заданные постоянные величины.

Задача состоит в отыскании управляющих функций U и V, удовлетворяющих ограничениям (1.2) и реализующих для системы граничные условия (1.1). Длительность процесса T должна быть равна или близка времени оптимального быстродействия.

Введем безразмерные константы d, b, c и перейдем к безразмерным переменным x, φ, l, t', v, u по формулам

$$
\begin{gathered}
x=X/V_0T_*,\quad \varphi=\Phi\sqrt{L_1g}/V_0,\quad l=L/L_1,\quad T_*=\sqrt{L_1/g},\quad t'=t/T_* \\
T'=T/T_*,\ v=V/V_0,\ u=U/\sqrt{L_1g}, \\
d=A/V_0T_*,\ b=L_0/L_1,\ c=U_0/\sqrt{L_1g}
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Здесь g — ускорение силы тяжести. Далее предполагается, что $L_1>0$. Если же $L_1=0$, то решение задачи оптимального быстродействия, очевидно, и представляет собой перемещение груза по прямой OX с максимальной горизонтальной скоростью V_0 и нулевой длиной подвеса.

В переменных (1.3) уравнения движения в случае малых колебаний и соотношения (1.1), (1.2) примут вид

$$
\begin{gathered}
l\varphi^{\cdot\cdot}+2l^{\cdot}\varphi^{\cdot}+\varphi=x^{\cdot\cdot},\ x^{\cdot}=v,\ l^{\cdot}=u \\
x(0)=x^{\cdot}(0)=\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=0,\ l(0)=b\leqslant1,\ 0\leqslant u\leqslant c \\
x(T)=d,\ x^{\cdot}(T)=\varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=0,\ l(T)=1,\ 0\leqslant v\leqslant 1
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Поставленная задача возникает при исследовании грузоподъемных машин типа мостовых кранов. Управление осуществляется путем горизонтального перемещения тележки и подъема или опускания груза при помощи лебедки. Ограничения (1.2) отражают тот факт, что механизмы крана имеют предельные скорости, причем включение их в направлении, обратном заданному направлению перемещения, нежелательно.

Предполагается, что скорости U, V могут изменяться практически мгновенно. У малых грузоподъемных машин, снабженных асинхронными двигателями, время переходного процесса много меньше периода колебаний груза, а тормозная система обеспечивает практически мгновенную остановку, поэтому эти условия выполняются на практике с хорошей точностью.

Соотношения (1.4) содержат три постоянных параметра d, b, c, которые связаны с исходными константами формулами (1.3). Точное аналитическое решение задачи оптимального быстродействия ($T\to\min$) для (1.4) представляет значительные трудности в силу нелинейности системы дифференциальных уравнений (1.4) и ее сравнительно высокой размерности.

Реализация на практике законов оптимального быстродействия, которые могут быть рассчитаны на ЭВМ, также будет представлять известные трудности: оптимальные управления будут содержать много точек переключения и, кроме того, зависеть от трех параметров d, b, c. Поэтому ниже предлагаются некоторые достаточно простые (квазиоптимальные) способы управления с небольшим числом точек переключений, удовлетворяющие (1.4). Эти управления построены на основе сочетания оптимальных законов для более простых задач с постоянной длиной подвеса [2–4].

2. Простейшие типы движения груза. Укажем те простейшие движения, из которых будет комбинироваться решение исходной задачи управления. Время t всюду отсчитывается от начала соответствующего режима.

(a) Опускание груза с максимальной скоростью при отсутствии колебаний и перемещения точки подвеса $\varphi=\varphi^{\cdot}=x^{\cdot}=0$, $x=\text{const}$, $l^{\cdot}=u=c$.

(b) Оптимальный по быстродействию разгон маятника из состояния покоя до поступательного движения при постоянной длине подвеса $l=\text{const}$. В момент окончания разгона T_b накладываются условия $\varphi(T_b)=\varphi^{\cdot}(T_b)=0$, $v(T_b)=1$. Это движение согласно [4] имеет вид

$$
v(t)=\begin{cases} 1 & \text{при}\quad 0<t<{}^1/_2T_b,\quad T_b={}^2/_3\pi\sqrt{l} \\ 0 & \text{при}\quad {}^1/_2T_b<t<T_b,\quad v(T_b)=0 \end{cases}
\tag{2.1}
$$

(c) Оптимальное по быстродействию торможение (до покоя) поступательно движущегося маятника при постоянной длине подвеса. Этот режим движения аналогичен b и задается в виде

$$v(t)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0<t<{}^1/_2T_b, \quad T_b={}^2/_3\pi\sqrt{l} \\ 1 & \text{при} \quad {}^1/_2T_b<t<T_b, \quad v(T_b)=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

(d) Горизонтальное перемещение системы без колебаний с опусканием груза $\varphi=\varphi^{\cdot}=0$, $x^{\cdot}=v=\mathrm{const}$, $l^{\cdot}=u(t)$, $0\leqslant v\leqslant 1$. Здесь скорость $u(t)$ может быть произвольной функцией, удовлетворяющей ограничениям из (1.4).

(e) Оптимальное по быстродействию перемещение груза из точки в точку при постоянной длине подвеса ($l=\mathrm{const}$). Это движение состоит из $2k+3$ участков постоянства скорости $v(t)$ и имеет следующий вид [2, 3] ($v(0)=v(T_e)=0$):

$$v(t)=1 \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{i-1} t_j<t<\sum_{j=1}^{i} t_j \quad (i=1,3,5,\ldots,2k+3)$$

$$v(t)=0 \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{i-1} t_j<t<\sum_{j=1}^{i} t_j \quad (i=2,4,\ldots,2k+2)$$

Здесь целое число k и длины интервалов t_j в принятых обозначениях определяются формулами

$$k(a)=\left[\frac{a}{2\pi}\right], \quad a=\frac{d}{\sqrt{l}}, \quad \beta_k(\tau)=\arcsin\left\{\frac{\sin(\tau/2)}{k+1}\right\}$$

$$t_1=t_{2k+3}=(\tau/2-\beta_k)\sqrt{l}, \; t_2=t_4=\ldots=t_{2k+2}=2\beta_k\sqrt{l}$$
$$t_3=t_5=\ldots=t_{2k+1}=2(\pi-\beta_k)\sqrt{l} \tag{2.3}$$

где [...] — целая часть, а $\tau(a)$ — единственный в полуинтервале $[0, 2\pi)$ корень трансцендентного уравнения

$$a=2\pi k+\tau-2(k+1)\beta_k(\tau) \tag{2.4}$$

Время быстродействия T_e задается равенством

$$T_e=\sum_{j=1}^{2k+3} t_j=(2\pi k+\tau)\sqrt{l} \tag{2.5}$$

В частном случае, когда $a/(2\pi)$ — целое число, скорость точки подвеса в задаче оптимального быстродействия постоянна и вместо формул (2.3) — (2.5) имеем

$$v=1 \text{ при } 0<t<T_e, \; T_e=d \tag{2.6}$$

(f) Квазиоптимальное по быстродействию перемещение груза из точки в точку при постоянной длине подвеса $l=\mathrm{const}$. Это движение, построенное в [3], отличается от оптимального тем, что содержит три участка постоянства скорости, т. е. один участок покоя. Оно задается соотношениями

$$v(t)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0<t<t_1, \qquad t_1+t_2<t<T_f \\ 0 & \text{при} \quad t_1<t<t_1+t_2, \quad t=0, \quad t=T_f \end{cases}$$

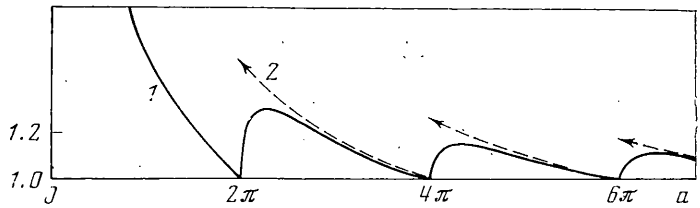
Здесь t_1, t_2, t_3, T_f определяются по формулам

$$t_1=t_3+2\pi k\sqrt{l}, \quad T_f=\sum_{j=1}^{3} t_j, \quad k=[a/(2\pi)], \quad \xi=a-2\pi k$$

$$
\begin{gathered}
\eta=0,\ T_f=2\pi k\sqrt{l}\ \text{при}\ \xi=0\\
\eta=\pi+\xi/2,\ T_f=(2\pi k+\pi+\xi/2)\sqrt{l}\ \text{при}\ 0<\xi<2\pi\\
t_2=0,\ t_3=0\ \text{при}\ 0\leqslant\eta<\pi\\
t_2=(2\pi-\eta)\sqrt{l},\ t_3=(\eta-\pi)\sqrt{l}\ \text{при}\ \pi\leqslant\eta<2\pi
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

Из перечисленных движений можно построить три простых способа управления, решающих поставленную задачу о перемещении груза, а именно: 1, aea; 2, afa; 3, abdca.

Режимы aea и afa содержат один свободный параметр — длину l на участках e и f соответственно. В режиме abdca имеется два свободных параметра — постоянные длины l_1 и l_2 при движениях b, c. Эти параметры



Фиг. 2

естественно выбрать так, чтобы минимизировать суммарное время передвижения T.

3. Анализ и оптимизация режимов движения. При реализации режима aea суммарное время передвижения T_1 согласно соотношениям (1.4), (2.5) задается формулой $T_1=(1-b)/c+T_e(l)$. Параметр l найдем из условия $\min T_1$ по l при ограничении $b\leqslant l\leqslant 1$.

Первое слагаемое в формуле для T_1 не зависит от l, поэтому достаточно найти минимум T_e из (2.5). Преобразуем T_e к виду $T_e=d\Psi(a)$, где

$$
\Psi(a)=\Psi_*(a)/a,\quad \Psi_*(a)=2\pi k(a)+\tau(a)\quad (a>0)
\tag{3.1}
$$

Из выражения (2.3) для a и неравенств $b\leqslant l\leqslant 1$ получим ограничения на a вида $d\leqslant a\leqslant d/\sqrt{b}$. Таким образом, искомая задача минимизации T_1 сведена в терминах новой переменной a к определению $\min\Psi(a)$ по a при ограничениях $d\leqslant a\leqslant d/\sqrt{b}$.

Функция $\Psi_*(a)$ из (3.1) задает время оптимального быстродействия как функцию расстояния. Эта функция изучена в [3], согласно которой имеют место следующие ее свойства. Функция $\Psi_*(a)$ строго возрастает и верны соотношения

$$
\begin{gathered}
\Psi_*(a)\geqslant a\ \text{при}\ a>0,\ \Psi_*(a)=\pi(1+a/(2\pi))\ \text{при}\ a\leqslant 2\pi\\
\Psi_*(2\pi i)=2\pi i\quad\text{при}\quad i=1,2,\ldots,\lim_{a\to\infty}\Psi_*(a)/a=1
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

На основании свойств (3.2) и соотношений (3.1) имеем (фиг. 2)

$$
\begin{gathered}
\Psi(a)\geqslant 1\ \text{при}\ a>0,\ \Psi(a)={}^1/_2+\pi/a\ \text{при}\ a\leqslant 2\pi\\
\Psi(2\pi i)=1\ \text{при}\ i=1,2,\ldots,\ \lim_{a\to\infty}\Psi(a)=1
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

На интервалах $2\pi i<a<2\pi(i+1)$ функция $\Psi(a)$ имеет единственный внутренний максимум. Отсюда и из неравенств $d\leqslant a\leqslant d/\sqrt{b}$ вытекает, что при $d<2\pi\sqrt{b}$ имеем $a<2\pi$, и $\min\Psi$ по a достигается в точке $a=d/\sqrt{b}$. Это соответствует режиму управления с тремя ($k=0$) участками постоянства горизонтальной скорости v.

В остальных случаях, т. е. при $d \geqslant 2\pi\sqrt{b}$, оптимальное управление $v(t)$ может содержать один либо более трех участков постоянства скорости. Если при некотором целом $i \geqslant 1$ выполняется включение $2\pi i \in [d, d/\sqrt{b}]$, то на отрезке $[d, d/\sqrt{b}]$ имеется хотя бы одна точка $a_i = 2\pi i$, где достигается абсолютный минимум функции $\Psi(a)$, равный согласно (3.3) $\Psi(a_i) = 1$. В качестве оптимального значения a здесь следует выбрать любое из этих $a_i = 2\pi i$, удовлетворяющих условию $a_i \in [d, d/\sqrt{b}]$. При этом согласно (2.6) имеем $v(t) \equiv 1$ для всего режима e.

Если же при $d \geqslant 2\pi\sqrt{b}$ условие $2\pi i \in [d, d/\sqrt{b}]$ не выполнено, то абсолютный минимум функции $\Psi(a)$ недостижим. Из свойства унимодальности $\Psi(a)$ следует, что $\min \Psi$ по a — достигается на одной из границ отрезка $[d, d/\sqrt{b}]$. Поэтому нужно по формулам (2.3), (2.4), (3.1) вычислить значения $\Psi(d)$ и $\Psi(d/\sqrt{b})$ и сравнить их, при этом можно воспользоваться фиг. 2. Если $\Psi(d) \geqslant \Psi(d/\sqrt{b})$, то $\min \Psi$ по a достигается в точке $a = d/\sqrt{b}$, в противном случае — при $a = d$.

Таким образом, при любых параметрах задачи указано, как выбрать a. Следовательно, указана и оптимальная длина подвеса l для участка e, равная согласно (2.3) $l = (d/a)^2$. На начальном участке a производится изменение длины от начального значения b до l, а на заключительном участке a — от l до 1. Режим aea полностью рассчитан.

Перейдем к рассмотрению аналогичного режима afa, время реализации которого согласно формулам (1.4), (2.7) имеет вид

$$T_2 = \begin{cases} (1-b)/c+d & \text{при } a = 2\pi i \quad (i=1,2,\ldots) \\ (1-b)/c+d\{{}^1/_2+\pi([a/(2\pi)]+1)/a\} & \text{при } a \neq 2\pi i \quad (i=1,2,\ldots) \end{cases}$$

где $[\ldots]$ — целая часть числа.

Функция $T_2(a)$ монотонно убывает по a на интервалах, не содержащих точки $a_i = 2\pi i$, $i = 1, 2, \ldots$. В этих точках достигается ее абсолютный минимум, причем функция $T_2(a)$ здесь испытывает разрыв. Поэтому, если выполняется условие $a_i \in [d, d/\sqrt{b}]$, то оптимальное значение $a = a_i$ определяется так же, как и в режиме aea при выполнении этого условия.

Если имеет место неравенство $d \leqslant 2\pi\sqrt{b}$, то функции T_1 и T_2 совпадают, так как квазиоптимальный режим f не отличается от оптимального режима e, имеющего три участка постоянства скорости $v(t)$. Лишь в случае, когда выполнено неравенство $d > 2\pi\sqrt{b}$ и включение $a_i \in [d, d/\sqrt{b}]$ не имеет места, квазиоптимальный режим отличается от оптимального. Так как $T_2(a)$ в этом случае монотонно убывает на интервале $(d, d\sqrt{b})$, то минимум достигается при $a = d/\sqrt{b}$, т. е. при $l = b$.

Итак, для режима afa имеется два случая. Если выполнено условие $a_i \in [d, d/\sqrt{b}]$, то $a = a_i$ и $l = (d/a_i)^2$; режим f состоит из одного участка. В противном случае $l = b$, т. е. опускание груза a вначале отсутствует, а квазиоптимальный режим f состоит из трех участков.

Заметим, что оптимальному режиму e соответствует управление со многими точками переключения и поэтому естественно заменить его более простым и близким по функционалу квазиоптимальным режимом f, т. е. использовать движение типа afa.

На фиг. 2 пунктирной линией (*2*) представлен график функции $\Psi^* = {}^1/_2 + \pi([a/(2\pi)]+1)/a$, являющейся аналогом Ψ, для режима f. На отрезке $[0, 2\pi]$ функции Ψ и Ψ^* совпадают. Максимальное отличие $\delta\Psi = \Psi^* - \Psi$ равно 0.5 и имеет место при $a \to 2\pi + 0$.

Рассмотрим последний режим abdca. Пусть во время разгона b и торможения c приведенные длины подвеса груза соответственно равны l_1 и $l_2 = l_1 + cz$. Используя формулы (1.4), (2.1), (2.2), вычислим время T_3 для режима abdca

$$T_3 = d + (1-b)/c + {}^1/_3\pi(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_1+cz}) - z$$

Значение параметров l_1 и z определим из условия $\min T_3$ по l_1 и z при вытекающих из (1.4) ограничениях

$$b \leqslant l_1 \leqslant l_1 + cz \leqslant 1, \quad {}^1/_3\pi(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_1+cz}) + z \leqslant d \tag{3.4}$$

Функция T_3 монотонно возрастает по l_1 и поэтому ее минимум достигается при наименьшем значении l_1, допускаемом неравенствами (3.4). Левая часть последнего неравенства (3.4) монотонно возрастает по l_1. Следовательно, если это неравенство выполнено при некоторых l_1^*, z, то оно будет заведомо выполнено также при $l_1=b\leqslant l_1^*$ и том же z. Поэтому положим $l_1=b$. В силу монотонности левой части упомянутого неравенства по z его можно привести к виду $z\leqslant z_0$, где z_0 — положительный корень уравнения $z_0+{}^1/_3\pi\sqrt{b+cz_0}=d-{}^1/_3\pi\sqrt{b}$, равный

$$z_0=d-\frac{\pi\sqrt{b}}{3}+\frac{\pi^2c}{18}-\frac{\pi}{6}\left(4c\left(d-\frac{\pi\sqrt{b}}{3}\right)+\frac{\pi^2c^2}{9}+4b\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

Окончательно неравенства (3.4) с учетом (3.5) при $l_1=b$ можно переписать в виде

$$0\leqslant z\leqslant \min\{z_0,\ (1-b)/c\}=\varkappa \tag{3.6}$$

Неравенство $z_0\geqslant0$ является условием возможности осуществления режимов типа abdca. Перейдем к определению минимума T_3 по z при ограничениях (3.6) и при $l_1=b$. Для этого достаточно найти минимум по z при $l_1=b$ той части слагаемых в T_3, которая зависит от z, а именно $\Theta(z)={}^1/_3\pi\sqrt{b+cz}-z$.

Функция $\Theta(z)$ унимодальна и имеет единственный максимум при $z=z_*=({}^1/_{36}\pi^2c^2-b)/c$. Отсюда и из неравенств (3.6) вытекает, что в зависимости от параметров d, b, c реализуется один из двух типов движений abdca. Оба типа возможны лишь при условии $z_0\geqslant0$, где z_0 определено формулой (3.5), и для каждого из них имеем $l_1=b$, т. е. участок a, по существу, отсутствует.

Движение $(\text{abdca})_1$ имеет место, если параметры d, b, c удовлетворяют хотя бы одному из следующих двух неравенств:

$$\varkappa\leqslant z_*,\quad \Theta(0)={}^1/_3\pi\sqrt{b}\leqslant\Theta(\varkappa)$$

В этом случае минимум $\Theta(z)$ реализуется при $z=0$. Следовательно, имеем $l_1=l_2=b$, и на участках b, d, c необходимо двигаться с постоянной длиной подвеса $l=b$. После этого следует режим a, в котором груз опускается от $l=b$ до $l=1$. Время движения при этом вычисляется по формуле

$$T_3=d+(1-b)/c+{}^2/_3\pi\sqrt{b}$$

Движение $(\text{abdca})_2$ реализуется, если параметры d, b, c удовлетворяют неравенству $\Theta(0)>\Theta(\varkappa)$. В этом случае искомый минимум функции $\Theta(z)$ достигается при $z=\varkappa$. Следовательно, на участке d груз необходимо опустить до значения $l=b+c\varkappa$. Время движения T_3 определяется формулой

$$T_3=d+(1-b)/c+{}^1/_3\pi(\sqrt{b}+\sqrt{b+c\varkappa})-\varkappa$$

Движение abdca в отличие от рассмотренных выше режимов aea и afa реализуемо лишь при условии $z_0\geqslant0$. Можно показать, что движение $(\text{abdca})_1$, в том случае, когда оно имеет место, всегда требует большего времени, чем движение aea и превышает время режима afa, если выполнено включение $a_i\in[d,\ d/\sqrt{b}]$.

В том случае, когда включение не выполнено, разница времен δT задается формулой

$$\delta T=T_2-T_3=\frac{d}{6\chi}\left(2\pi+6\pi\left[\frac{\chi}{2\pi}\right]-3\chi\right)$$

Здесь $\chi=d/\sqrt{b}\geqslant{}^2/_3\pi$, так как необходимым и достаточным условием существования режима $(\text{abdca})_1$ является очевидное неравенство $d\geqslant{}^2/_3\pi\sqrt{b}$. Выражение для δT в зависимости от параметра χ может иметь разные знаки.

Укажем также простейший случай, когда режим движения $(abdca)_2$ дает меньшее время, чем движение типа aea и afa. Для этого рассмотрим режим $(abdca)_2$ при достаточно больших значениях d с $\varkappa=(1-b)/c$ и сравним $T_3(\varkappa)=d+{}^1/_3\pi(\sqrt{b}+1)$ с минимальным временем $T_0=d+(1-b)/c$ режимов aea, afa.

Отсюда следует, что при достаточно больших значениях d всегда можно указать такое малое значение $c=c_*$ (в силу того, что T_3 не зависит от c), чтобы имело место неравенство $T_0>T_3$. Отметим, что некоторым преимуществом движения abdca является отсутствие колебаний груза на среднем участке d.

Построенные выше режимы, вообще говоря, не являются оптимальными, однако они переходят в оптимальные в некоторых предельных случаях, а именно при $(1-b)/c\ll d$ и $(1-b)/c\gg d$. Эти случаи отвечают большому отличию между временем горизонтального перемещения и временем опускания груза.

4. Разгон и торможение груза с переменной длиной подвеса. Выше рассматривались такие движения, в которых колебания груза происходят только при постоянной длине подвеса. Рассмотрим более сложные, но и более выгодные режимы, когда оба двигателя работают при качающемся грузе. Предварительно построим режим разгона при краевых условиях

$$\Phi(0)=\Phi^{\cdot}(0)=V(0)=\Phi(T)=\Phi^{\cdot}(T)=0,\quad V(T)=V_0 \tag{4.1}$$

и при длине подвеса, изменяющейся по линейному закону $L=L_0+U_0t$ или $L=L_0-U_0t$. Требуется минимизировать время процесса T.

Сначала рассмотрим разгон с опусканием груза $L=L_0+U_0t$. Введем параметр α и перейдем к безразмерным переменным Ψ, v, t' по формулам

$$\Psi=\sqrt{L_0g}\Phi/V_0,\quad t'=\sqrt{g/L_0}t,\quad v=V/V_0,\quad \alpha=U_0/\sqrt{L_0g} \tag{4.2}$$

В переменных (4.2) уравнение колебаний груза (1.4), краевые условия (4.1) и ограничение $0\leqslant V\leqslant V_0$ примут вид

$$(1+\alpha t)\Psi^{\cdot\cdot}+2a\Psi^{\cdot}+\Psi=v^{\cdot},\quad 0\leqslant v\leqslant 1 \tag{4.3}$$

$$\Psi(0)=\Psi^{\cdot}(0)=v(0)=\Psi(T)=\Psi^{\cdot}(T)=0,\quad v(T)=1 \tag{4.4}$$

При $\alpha=0$ режимы оптимального разгона b и торможения с получены в [4] и приведены выше. Для $\alpha\neq 0$ построим аналогичное (2.1) управление $v(t)$ с минимальным числом участков, а именно

$$v(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<t<t_*,\ t\geqslant T\\ 0 & \text{при } t_*<t<T\end{cases} \tag{4.5}$$

Уравнение (4.3) интегрируется в бесселевых функциях на интервалах $[0,t_*)$ и $(t_*,T]$. Сопрягая эти решения в точке $t=t_*$ и удовлетворяя граничным условиям (4.4) с учетом соотношений (4.5), получим всего шесть условий для четырех постоянных интегрирования (на двух интервалах) и для двух параметров t_*, T. После преобразований имеем систему двух трансцендентных уравнений

$$[J_1(2/\alpha)N_0(p)-N_1(2/\alpha)J_0(p)]R+RY=[N_1(q)J_0(p)-J_1(q)N_0(p)]Y$$
$$[N_1(2/\alpha)J_1(p)-J_1(2/\alpha)N_1(p)]R=[N_1(p)J_1(q)-N_1(q)J_1(p)]Y$$
$$Y=J_0(2/\alpha)N_1(2/\alpha)-N_0(2/\alpha)J_1(2/\alpha),\quad R=J_0(q)N_1(q)-J_1(q)N_0(q)$$
$$p=2\sqrt{1+\alpha t_*}/\alpha,\quad q=2\sqrt{1+\alpha T}/\alpha$$

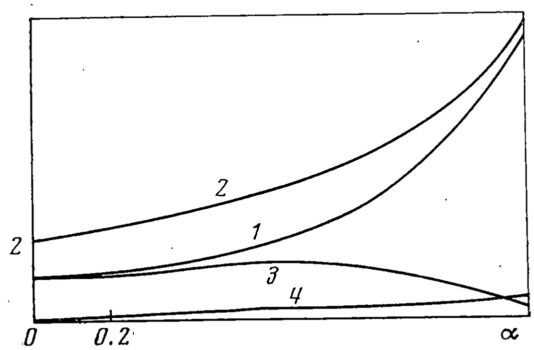
Здесь J_0, J_1 и N_0, N_1 — функции Бесселя и Неймана соответствующих порядков. Значения T и t_* в зависимости от α находились численно на ЭВМ, причем выбирались корни, соответствующие наименьшему T.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов — графики зависимостей $t_*(\alpha)$ (кривая *1*), $T(\alpha)$ (кривая *2*) и $t^*(\alpha)=T(\alpha)-t_*(\alpha)$ (кривая *3*). При $\alpha=0$ в соответствии с (2.1) $t_*=t^*=\pi/3$.

Используя фиг. 3, можно также рассчитать режимы торможения, когда требуется перевести систему из поступательного движения в состояние покоя, т. е.

$$\Psi(0)=\Psi^{\cdot}(0)=\Psi(T)=\Psi^{\cdot}(T)=v(T)=0,\ v(0)=1 \qquad (4.6)$$

Задача торможения сводится к задаче разгона, если в уравнении (4.3) и граничных условиях (4.6) положить $v'=1-v$, $\Psi'=-\Psi$. Поэтому режим торможения определяется равенством (4.5), в котором нужно поменять местами числа 0 и 1. Зависимости $t_*(\alpha)$ и $T(\alpha)$ остаются прежними (см. фиг. 3).



Фиг. 3

Обратимся к построению разгона и торможения маятника с длиной подвеса, изменяющейся по закону $L=L_0-U_0t$. В безразмерных переменных (4.2) уравнение движения примет вид, аналогичный (4.3)

$$(1-\alpha t)\Psi^{\cdot\cdot}-2\alpha\Psi^{\cdot}+\Psi=v^{\cdot},\quad 0\leqslant v\leqslant 1 \qquad (4.7)$$

а граничные условия сохранят форму (4.4).

Выполним в уравнении (4.7) линейную замену переменных $t=-A_1t_1+$ $+A_2$, $\Psi=A_3\Psi_1$, $v=1-v_1$ и подберем постоянные A_1, A_2, A_3 так, чтобы в переменных t_1, Ψ_1, v_1 соотношения (4.7) приняли вид (4.3). Оказывается, что этого можно добиться, если замену переменных осуществить по формулам

$$t=-\alpha t_1/\alpha_1+(\alpha_1^2-\alpha^2)/\alpha_1^2\alpha,\quad \Psi=\alpha_1\Psi_1/\alpha,\quad v=1-v_1 \qquad (4.8)$$

где α — заданное значение параметра (см. (4.2)); α_1 — соответствующий параметр уравнения вида (4.3) после замены (4.8).

Чтобы граничные условия (4.4) не нарушались при замене (4.8), потребуем взаимного соответствия моментов времени

$$t=0\Leftrightarrow t_1=T(\alpha_1),\ t=T'(\alpha)\Leftrightarrow t_1=0 \qquad (4.9)$$

Здесь $T(\alpha_1)$ — время разгона при опускании груза для параметра α_1 (фиг. 3), а $T'(\alpha)$ — искомое время разгона при подъеме груза для параметра α. Из соотношений (4.8), (4.9) получим

$$Q(\alpha_1)=\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\alpha_1T(\alpha_1)}}=\alpha,\qquad T'(\alpha)=\frac{\alpha_1^2-\alpha^2}{\alpha_1^2\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha_1}T(\alpha_1) \qquad (4.10)$$

Первое уравнение (4.10) служит для определения параметра α_1 по заданному α. На фиг. 3 построен график функции $Q(\alpha)$ (кривая 4). Эта функция монотонна, поэтому уравнение $Q(\alpha_1)=\alpha$ определяет единственное $\alpha_1>0$.

Второе соотношение (4.10) выражает время разгона $T'(\alpha)$ при подъеме груза. Таким образом, расчет режима разгона при подъеме груза сведен к рассчитанному ранее разгону при опускании груза, задаваемому формулами (4.5) и кривыми фиг. 3. Пересчет осуществляется по формулам (4.9), (4.10) и фиг. 3. Торможение при подъеме груза рассчитывается аналогично.

Предложенные режимы разгона и торможения при переменной длине подвеса могут быть использованы вместо движений b и c при построении движений, аналогичных abdca.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л.* Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
2. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное перемещение маятника. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* Об оптимальном перемещении висящего груза. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
4. *Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимальный разгон грузов. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.