

О ПОГРЕШНОСТЯХ АМОРТИЗИРОВАННЫХ ГИРОПРИБОРОВ,
 ВЫЗВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

В. О. КОНОНЕНКО, **М. А. ПАВЛОВСКИЙ**

(Киев)

Решению задач виброзащиты гироскопических и других приборов в предположении независимости движения в направлении каждой из главных координат амортизированного основания посвящены работы [1, 2] и др.

Рассматриваемая задача посвящена анализу пространственных колебаний амортизированного гироскопа, возникающих в силу нелинейных связей между координатами [3-6] и вызывающих погрешности гироскопов из-за их уходов и появления постоянных составляющих углов поворота основания на амортизаторах. Пространственные колебания гироскопов, жестко установленных на вибрирующем основании, достаточно исследованы в работах [7, 8] и др.

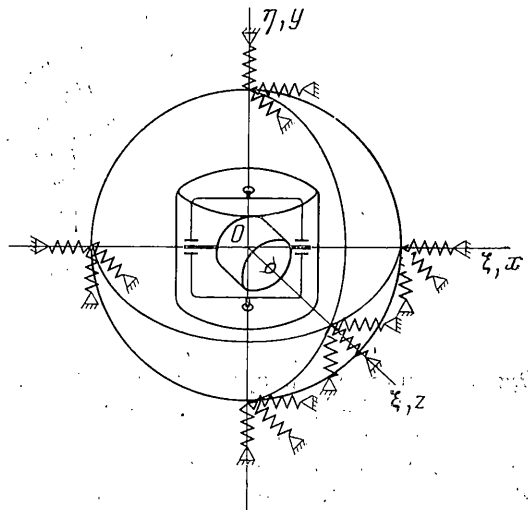
1. Рассмотрим движение гироскопа в кардановом подвесе, корпус которого расположен на амортизаторах (фиг. 1).

Заметим, что наличие карданового подвеса существенно меняет характер взаимосвязи колебаний корпуса на амортизаторах и гироскопа по сравнению с рассмотренным в работе [6] и др. случаем пространственных колебаний тела, несущего вращающийся ротор.

В рассматриваемой задаче при угловых колебаниях корпуса на амортизаторах происходит его «обкатка» относительно гироскопа. При этом моменты инерции всей системы будут переменными в системе координат, неизменно связанной с корпусом. Наряду с этим из-за моментов трения и особенностей динамики карданового подвеса [9] возникают связанные нелинейные колебания всей системы, которые при определенных условиях приводят к уходам гироскопа и появлению постоянной составляющей углов поворота корпуса относительно основания.

Изучение этих погрешностей гироскопов в условиях пространственных колебаний является основной целью излагаемой работы.

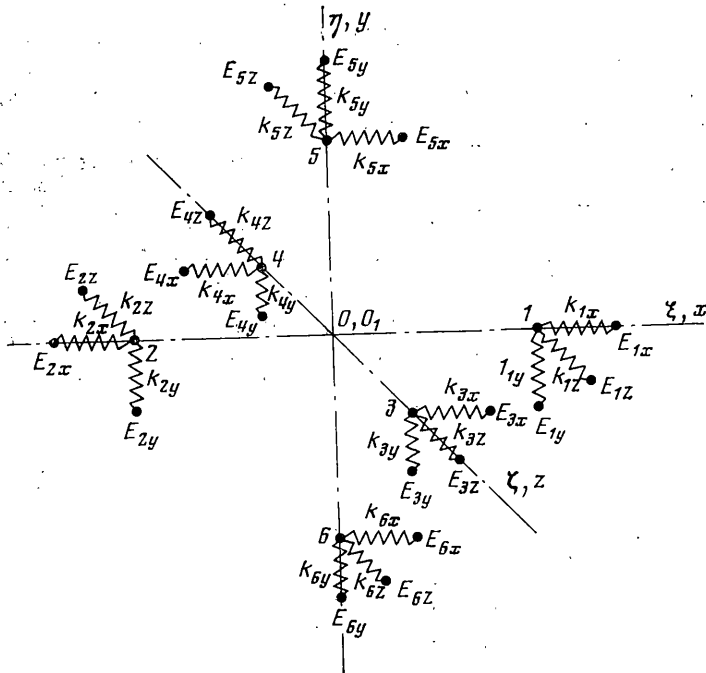
Для общности результатов предположим, что корпус прибора соединен с основанием при помощи шести амортизаторов (фиг. 2), каждый из которых представим состоящим из трех упругих элементов, концы которых 1, 2, ..., 6 и E_{ij} ($i=1, 2, \dots, 6$, $j=x, y, z$) шарнирно соединены с те-



Фиг. 1.

лом и основанием $[3-6]$. Предполагается, что точки закрепления амортизаторов находятся на одинаковом расстоянии r от центра жесткости системы. Упругие элементы имеют одинаковые длины l , но разные жесткости k_{ij} ($i=1, 2, \dots, 6, j=x, y, z$). Допустим, что энергия в системе рассеивается не только благодаря силам вязкого трения, но и вследствие несовершенной упругости элементов, что характерно для современных резинометаллических амортизаторов.

Введем следующие системы координат (фиг. 3): $O_0\xi_0\eta_0\xi_0$ — неподвижная система координат; $O\xi\eta\xi$ — поступательно движущаяся система координат, неизменно связанная с основанием; $Sxyz$ — неизменно связанная с корпусом прибора с началом координат в центре масс, точке S ;



Фиг. 2

$O_1x_1y_1z_1$ — системы координат, неизменно связанные с наружной ($j=1$), внутренней ($j=2$) рамками и ротором ($j=3$).

В начальный момент точки O_0, O, S, O_1 и оси всех систем координат совпадают. Положение корпуса прибора в системе координат $O\xi\eta\xi$ определяется шестью обобщенными координатами: тремя линейными перемещениями центра масс ξ, η, ζ и тремя углами Эйлера ψ, θ, φ , выбранными по способу А. Н. Крылова (фиг. 4 [1]). Положение главной оси гироскопа в системе координат $Sxyz$ зададим углами α, β поворота рамок карданового подвеса (фиг. 5). Уравнение вращения гироскопа вокруг главной оси рассматривать не будем, считая угловую скорость ротора неизменной.

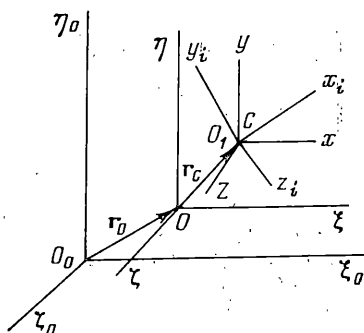
Зависимость реакции P_{ij} упругих элементов от деформации Δl_{ij} прием в виде

$$P_{ij} = k_{ij}[\Delta l_{ij} + a_{ij}\Delta l_{ij}^3 + \Phi_{ij}^{\pm}(\Delta l_{ij})] \quad (1.1)$$

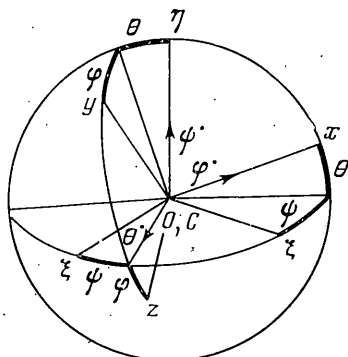
где a_{ij} — постоянный коэффициент; $\Phi_{ij}^{\pm}(\Delta l_{ij})$ — функция, характеризующая рассеяние энергии в амортизаторе, которое определяется экспериментально. Эта функция имеет характерную петлеобразную форму, в связи с чем для ее описания удобно использовать известное выражение [10]:

$$\Phi_{ij}^{\pm} = \mp \frac{\eta_n}{n} [(\Delta l_{ij*} \pm \pm \Delta l_{ij})^n - 2^{n-1} \Delta l_{ij*}^n] \quad (1.2)$$

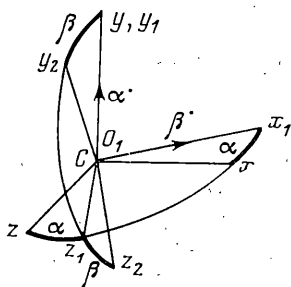
Здесь η_n и n — постоянные величины, определяемые экспериментально; Δl_{ij*} — амплитуда циклической деформации амортизатора.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Так же, как и в работах [3-6], будем рассматривать движение корпуса на амортизаторах в системе координат $O\xi\eta\zeta$, неизменно связанной с основанием. Для составления уравнений движения воспользуемся основными теоремами динамики. При этом уравнения поступательного движения не будут отличаться по форме записи от соответствующих уравнений, приведенных в работах [4, 5].

Уравнения же вращательного движения, воспользовавшись методикой работы [1], представим в форме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y + N_x \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z + N_y \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x + N_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{vmatrix}$$

(1.3)

$$\begin{aligned} & I_{y_1} \omega_{y_1} + A_{zx} \omega_{x_1} \omega_{z_1} + (B_y \omega_{y_2} + B_{xz} \omega_{x_2} \omega_{z_2} - H \omega_{x_2}) \cos \beta - \\ & - (B_z \omega_{z_2} + B_{xy} \omega_{x_2} \omega_{y_2}) \sin \beta = -f_1 \dot{\alpha}; \quad B_x \omega_{x_2} - B_{y_2} \omega_{y_2} \omega_{z_2} + H \omega_{y_2} = -f_2 \dot{\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{M_{\delta}}{m_{\delta}} = - \left[\lambda_{\delta}^2 x_{\delta} + \mu (h_{\delta} x_{\delta}^* + S_{\delta} x_{\delta}^3 + f_{\delta g} + \sum_{i,j} S_{\delta ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k} S_{\delta ijk} x_i x_j x_k) \right] \quad (\delta=4, 5, 6)$$

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x_1} \omega_{x_1}^* + A_{yz} \omega_{y_1} \omega_{z_1} - f_2 \beta^* \\ I_{z_1} \omega_{z_1}^* + A_{xy} \omega_{x_1} \omega_{y_1} + (B_y \omega_{y_2}^* + B_{xz} \omega_{x_2} \omega_{z_2} - H \omega_{x_2}) \sin \beta + (B_z \omega_{z_2}^* + B_{xy} \omega_{x_2} \omega_{y_2}) \cos \beta \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$N_y = -f_1 \alpha^*$$

λ_{δ} — частота собственных колебаний корпуса в направлении координаты x_{δ} ; $x_1 = \xi$; $x_2 = \eta$; $x_3 = \zeta$; $x_4 = \psi$; $x_5 = \theta$; $x_6 = \varphi$; $x_7 = \alpha$; $x_8 = \beta$; μ — малый параметр, введенный так же, как и в работе [4]; K_x, K_y, K_z — проекции кинетического момента корпуса, вычисленного относительно центра масс C , на связанные оси; H — кинетический момент гироскопа; N, M — главный момент сил воздействия корпуса прибора на наружную рамку и основания на корпус соответственно; $I_{x_i}, I_{y_i}, I_{z_i}$ — моменты инерции наружной ($i=1$) и внутренней рамок карданового подвеса относительно связанных осей; I, I_e — осевой и экваториальный моменты инерции ротора; $\|a_{ik}\|$ — преобразующая матрица; $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$ — проекции угловой скорости тела i на связанные оси; $B_x = I_{x_2} + I_e, B_y = I_{y_2} + I_e, B_z = I_{z_2}, B_{xy} = I_{y_2} - I_{x_2}, B_{zx} = I_{x_2} + I_e - I_{z_2}, B_{yz} = I_{y_2} + I_e - I_{z_2}, A_{xy} = I_{y_1} - I_{x_1}, A_{yz} = I_{z_1} - I_{y_1}, A_{zx} = I_{x_1} - I_{z_1}, f_{\delta g}$ — моменты сил трения гистерезисного типа; f_1, f_2 — коэффициенты моментов сил вязкого трения относительно осей вращения наружной и внутренней рамок карданового подвеса; $S_{\delta}, S_{\delta ij}, S_{\delta ijk}$ — постоянные коэффициенты.

Приведенные уравнения (1.3) должны быть дополнены кинематическими соотношениями, которые легко получить, воспользовавшись фиг. 4, 5.

Для дальнейшего анализа, следуя работам [3-6], представим тригонометрические функции углов и угловые скорости $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$ в виде разложения в степенные ряды. Причем тригонометрические функции углов ψ, θ, φ разложим в ряды в окрестности нуля, а угловые скорости $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$ ($i=1, 2$) — в окрестности заданного положения главной оси гироскопа в неподвижной системе координат, соответствующего условию отсутствия ухода гироскопа

$$\omega_{x_2}^{(0)} = 0, \quad \omega_{y_2}^{(0)} = 0 \quad (1.5)$$

Углы поворота рамок карданового подвеса α, β представим в виде

$$\alpha = \alpha_{(0)} + \alpha_1, \quad \beta = \beta_{(0)} + \beta_1 \quad (1.6)$$

С учетом равенств (1.5) легко получить следующие соотношения:

$$\beta_{(0)}^* = -\omega_{x_1}^{(0)}, \quad \alpha_{(0)}^* = -\omega_y - \omega_{z_1}^{(0)} \operatorname{tg} \beta_{(0)}, \quad \omega_{y_1}^{(0)} = -\omega_{z_1}^{(0)} \operatorname{tg} \beta_{(0)}, \quad \omega_{z_2}^{(0)} = \omega_{z_1}^{(0)} \cos \beta_{(0)}^{-1} \quad (1.7)$$

При этом выражения для $\alpha_{(0)}, \beta_{(0)}$ должны удовлетворять равенству (1.5).

Удержим в дальнейшем величины третьего порядка малости относительно произведений координат и их скоростей.

Задачу будем решать при упрощающем предположении

$$\varphi = 0 \text{ и при } t=0; \quad \alpha_0 = \alpha(t=0) = 0, \quad \beta_0 = \beta(t=0) \neq 0 \quad (1.8)$$

Воспользовавшись выражениями для кардановых ошибок гироскопа [1], а также учитывая соотношения (1.7) для заданных начальных усло-

вий (1.8), найдем

$$\beta_{(0)} \approx \beta_0 - (\psi\theta + 1/2\theta^2 \operatorname{tg} \beta_0) + O(x^3), \quad \alpha_{(0)} \approx -(\psi + \theta \operatorname{tg} \beta_0) + O(x^3) \quad (1.9)$$

С учетом выражений (1.5)–(1.7) и (1.9) нетрудно выполнить указанное разложение угловых скоростей ω_{xi} , ω_{yi} , ω_{zi} ($i=1, 2$) в степенные ряды.

Окончательно уравнения движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_v'' + \lambda_v^2 x_v &= -\mu Q_v(\dots) + L_v m_v^{-1} \quad (v=1, \dots, 4) \\ \theta'' + \lambda_5^2 \theta + \mu_{23} u' - \mu_{24} \lambda v &= -\mu R_1(\dots) \\ -\mu_{32} \theta'' + u' - \lambda v &= -\mu R_2(\dots), \quad \lambda u + v' = -\mu R_3(\dots) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь λ – частота нутации гироскопа; $R_i(\dots)$, $Q_v(\dots)$ – совокупность малых членов в соответствующих уравнениях движения системы; L_v – возмущающий момент;

$$\begin{aligned} u &= \alpha^* A_{33}^{1/2}, \quad v = \beta^* A_{44}^{1/2}, \quad \lambda = H \cos \beta_0 (A_{33} A_{44})^{-1/2}, \quad \lambda_5 = (k_5 A_{22}^{-1})^{1/2} \\ \mu_{23} &= B_{yz} \sin \beta_0 \cos \beta_0 (A_{22} A_{33}^{1/2})^{-1} \\ \mu_{24} &= A_{33}^{1/2} A_{22}^{-1} \operatorname{tg} \beta_0, \quad \mu_{32} = (I_{y_1} + I_{z_2}) A_{33}^{-1/2} \operatorname{tg} \beta_0 \\ A_{33} &= I_{y_1} + (I_{y_2} + I_e) \cos^2 \beta_0 + I_{z_2} \sin^2 \beta_0 \\ A_{22} &= I_z + I_{x_1} + I_{z_2}, \quad A_{44} = I_{x_2} + I_e \end{aligned}$$

Пусть $L_b = l_b \sin \omega_b t$ ($b=5, 6, 7, 8$), а остальные $L_v=0$; тогда при $\mu=0$ система (1.10) допускает частные решения вида

$$x_v = 0, \quad x_y^* = 0 \quad (v \neq b), \quad x_b = q \sin \omega_b t, \quad q = l_b (\lambda_b^2 - \omega_b^2)^{-1} \quad (1.11)$$

Это значит, что под действием внешней периодической силы будут иметь место колебания системы только в направлении координаты x_b , по отношению к которой действует внешняя сила. Такое представление о характере движения может оказаться не соответствующим действительным движениям изучаемой системы, описываемой нелинейными уравнениями (1.10). Задачей работы является определение тех условий, при которых может иметь место возбуждение пространственных колебаний системы.

Выразив u через v , три последних уравнения (1.10) перепишем в форме

$$\begin{aligned} \lambda(\theta'' + \lambda_5^2 \theta) - \mu_{23}(v'' + \mu_{24} \lambda^2 v) &= -\mu(\lambda R_1 - \mu_{23} R_3^*) \\ \lambda \mu_{32} \theta'' + v'' + \lambda^2 v &= \mu(\lambda R_2 - R_3^*) \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. Перейдем к построению приближенного решения. Система уравнений (1.12) при $\mu=0$ имеет две частоты собственных колебаний ω_{10} и ω_{20} , приближенно равные

$$\omega_{10}^2 \approx \lambda^2 \frac{1 + \sigma_2}{1 + \sigma_1}, \quad \omega_{20}^2 \approx \frac{\lambda_5^2}{1 + \sigma_2 + \lambda_5^2 \lambda^{-2}}, \quad \sigma_1 = \mu_{32} \mu_{23} > 0, \quad \sigma_2 = \mu_{32} \mu_{24} > 0 \quad (2.1)$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда одна из собственных частот (2.1) удовлетворяет одному из трех резонансных соотношений

$$\omega_{j0}^2 = k^2 \omega_b^2 + \mu \Delta_j \omega, \quad \omega_{j0}^2 = \omega_{j0}^2 + \mu \Delta_j \omega \quad (j=1, 2) \quad (2.2)$$

где $k=1/2, 1, 2$; $\omega_j^2 = k^2 \omega_b^2$; $\mu \Delta_j \omega$ – расстройка частот. Предполагается, что другие частоты системы не резонансные. Преобразуем систему уравнений (1.10) к так называемой стандартной форме при помощи следую-

щих формул замены переменных:

$$x_v = C_v e^{i\lambda_v t} + D_v e^{-i\lambda_v t} \quad (v \neq b) \quad x_b = C_b e^{i\lambda_b t} + D_b e^{-i\lambda_b t} + \frac{1}{2} i q (e^{i\omega_b t} - e^{-i\omega_b t}) \quad (2.3)$$

$$\theta = \Lambda_5 + \sum_{j=1}^2 (C_j e^{i\omega_j t} + D_j e^{-i\omega_j t}), \quad v = \Lambda_8 + \sum_{j=1}^2 v_j (C_j e^{i\omega_j t} + D_j e^{-i\omega_j t})$$

Здесь $v_j = \mu_{32} \lambda \omega_j^2 (\lambda^2 - \omega_j^2)^{-1}$ — коэффициент, представляющий отношения амплитуд для линейной части однородных уравнений (1.9). Формулы для производных x_v , x_b , θ , v записываются в общепринятой в соответствии с методом усреднения форме [11].

Подставив переменные x_v , x_b , θ , v и их производные в уравнения (1.10), (1.12) и усреднив их, можно убедиться, что $C_v \rightarrow 0$, $D_v \rightarrow 0$, $C_b \rightarrow 0$, $D_b \rightarrow 0$, а остальные переменные могут быть найдены из системы уравнений

$$\lambda^2 \Lambda_8 = -\langle \mu \Phi_2^\circ \rangle, \quad \lambda \lambda_5^2 \Lambda_5 - \mu_{24} \lambda^2 \Lambda_8 = -\langle \mu \Phi_1^\circ \rangle \quad (2.4)$$

$$(-1)^j 2\Delta \frac{dC_j}{dt} = e^{-i\omega_j t} \mu (b_{3-j} \Phi_1^\circ - d_{3-j} \Phi_2^\circ)$$

$$(-1)^{j+1} 2\Delta \frac{dD_j}{dt} = e^{i\omega_j t} \mu (b_{3-j} \Phi_1^\circ - d_{3-j} \Phi_2^\circ)$$

$$d_j = (\lambda - \mu_{23} v_j) i \omega_j, \quad b_j = (\lambda \mu_{32} + v_j) i \omega_j \quad (j=1,2), \quad \Phi_2^\circ = \Phi_2$$

$$a_{34j} = [\lambda_5^2 + \lambda^2 (1 + \sigma_2) - 2(1 - \sigma_1) \omega_j^2] (\lambda^2 - \omega_j^2)^{-1}, \quad \Phi_1^\circ = \Phi_1 + \lambda a_{34j} \Delta_j \omega \theta_j$$

$$\Delta = d_1 b_2 - b_1 d_2 = \omega_1 \omega_2 (v_2 - v_1) (1 + \sigma_1)$$

Если, например, $x_b = \psi$, то выражения Φ_1° , Φ_2° с учетом (2.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu \Phi_1^\circ = & \mu \lambda \left\{ h_{51} \theta_j^* + S_5 \theta_j^3 + \Delta_j \omega^\circ \theta_j + S_{545} \psi \theta_j + S_{156} \theta_j^2 \theta_j + S_{155} \theta_j \theta_j^* - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} a_{10} \omega_j^2 \psi^2 \theta_j + d_{555} \theta_j^2 + d_{544} \psi^2 - \mu_{23} a_{32} \lambda^{-1} [2\psi^* \theta^* + (\theta_j^2 - \omega_j^2 \theta_j^2) \operatorname{tg} \beta_0 - \right. \\ & \left. - (\omega_j^2 + \omega_b^2) \psi \theta] - \mu_{23} a_{35} \lambda^{-1} (\psi^* \theta_j^2 + 2\psi^* \theta_j^* \theta_j) + (a_{16} - \mu_{23} a_{36} \lambda^{-1}) \frac{d}{dt} (\psi \theta_j^* \theta_j) + \right. \\ & \left. + a_{15} \frac{d}{dt} \left(\psi^* \psi \theta_j + \psi^* \theta_j^2 \operatorname{tg} \beta_0 + \frac{\theta_j^* \psi^2}{2} \right) + a_{14} (\psi^* \theta_j^* \theta_j - \omega_j^2 \theta_j^2 \psi) + a_{17} \psi \theta_j^2 + \right. \\ & \left. + a_{18} \psi \theta_j^2 + a_{112} \psi^* \psi \theta_j + a_{113} \psi^* \theta_j^2 + a_{110} \psi \theta_j^* \theta_j + a_{111} \theta_j^2 \theta_j^* \right\} + [I_{zy} \psi^* (1 - \frac{1}{2} \theta_j^2) + \\ & + (I_y - I_x) \psi^2 \theta_j - I_{yx} (\psi^2 + \psi \psi^*) + (I_y - I_x) \psi^* \psi \theta_j - I_{xz} \psi^* \theta_j^* + I_{zx} \psi \theta_j^* \theta_j] A_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mu \Phi_2^\circ = & \mu \lambda (h_{52} \theta_j^* + S_6 \theta_j^3 + \dots) \\ h_{51} = & q_{51} + h_5 (1 - \frac{1}{4} q^2) - \mu_{23} a_{31} \lambda^{-1}, \quad \Delta_j \omega^\circ = a_{34j} \Delta_j \omega - q_{50} \\ h_{52} = & \frac{1}{\mu A_{33}^{1/2}} f_1 (v_{j1} + \operatorname{tg} \beta_0) + a_{31} \lambda^{-1}, \quad v_{j1} = \frac{v_j}{\lambda A_{33}^{1/2}}, \quad v_{j2} = \frac{v_j}{A_{44}^{1/2}} \end{aligned}$$

$$S_5 = S_5^{(1)} + \mu_{23} \omega_j^2 \lambda^{-1} a_{37}, \quad \mu S_5^{(1)} = A_{22}^{-1} (h_5 a_5 + a_{13}^\circ + a_{19}^\circ)$$

$$\mu S_{545} = A_{22}^{-1} [k_{545} - I_{zx} (\omega_b^2 - \omega_j^2)], \quad k_{545} = r^3 l^{-1} (k_{1z} + k_{2z})$$

$$\mu d_{555} = f_2 v_{j2} A_{22}^{-1} (v_{j1} + \operatorname{tg} \beta_0), \quad S_{155} = a_{11} + 2\mu_{23} \omega_j^2 a_{33} \lambda^{-1}$$

$$\mu d_{544}^\circ = k_{544} A_{22}^{-1} = \frac{1}{2} A_{22}^{-1} r^3 l^{-1} (k_{1y} - k_{2y}), \quad \mu a_{31} = f_2 v_{j2} A_{44}^{-1/2}$$

$$\mu a_{37} = -H A_{44}^{-1/2} v_{j1} \sin \beta_0 \operatorname{tg} \beta_0, \quad v_{j3} = \cos^{-1} \beta_0 + v_{j1} \sin \beta_0$$

и т. д.

Коэффициенты q_{51} , q_{50} получены после разложения функции рассеяния энергии Φ_5^\pm в ряд Фурье и удержания в нем только первой гармоники. Они находятся из тождества

$$k_5 \Phi_5^\pm = \mu A_{22} (-q_{50} \theta_j + q_{51} \theta_j^*) \quad (2.6)$$

Усредняя (2.5), получим следующие уравнения для огибающих:

$$(-1)^j 2\Delta \frac{dC_j}{dt} = \mu \lambda b_{3-j} [(\Delta_{rj} \omega + 3S_{rj}^\circ C_j D_j + i\omega_j h_{rj}) C_j + G_{1k}]$$

$$(-1)^{j+1} 2\Delta \frac{dD_j}{dt} = \mu \lambda b_{3-j} [(\Delta_{rj} \omega + 3S_{rj}^\circ C_j D_j - i\omega_j h_{rj}) D_j + \bar{G}_{1k}]$$

$$h_{rj} = h_{51} - \kappa_{3-j} h_{52} + \frac{1}{2} S_{11rj} q^2 + \frac{1}{4} S_{10rj} \rho^2 \quad \kappa_{3-j} = d_{3-j} b_{3-j}^{-1}$$

$$\Delta_{rj} \omega = \Delta_j \omega^\circ - \frac{1}{4} q^2 (S_{2rj} + \omega_b^2 S_{7rj}), \quad 3S_{rj}^\circ = 3(S_5 + \kappa_{3-j} S_6) + \omega_j^2 S_{1rj} \quad (2.7)$$

\bar{G}_{1k} — является комплексно-сопряженной величиной с G_{1k} ; $r=5$ — индекс резонирующей координаты.

При $k=1/2$

$$G_{1k} = -iu_0 D_j, \quad u_0 = \frac{1}{2} S_{rbr}^* q, \quad \omega_j = \frac{1}{2} \omega_b, \quad i = \sqrt{-1}$$

При $k=2$

$$S_{rbr}^* = S_{545} - a_{32} \lambda^{-1} (\mu_{23} + \kappa_{3-j}) (\omega_j - \omega_b)^2$$

$$\omega_j = 2\omega_b, \quad G_{1k} = \bar{G}_{1k} = -\frac{1}{4} d_{rbb} q^2, \quad d_{rbb} = \bar{d}_{rbb} - 2\omega_b^2 I_{yz}$$

При $k=1$

$$\omega_j = \omega_b, \quad G_{1k} = \frac{1}{4} S_{2rj}^* q^2 D_j - \frac{1}{2} q \omega_b S_{5rj} + d_{50} q - \frac{1}{2} f_2^* q \omega_b \operatorname{tg} \beta_0 (C_j^2 + 2C_j D_j) +$$

$$+ \frac{1}{2} S_{6rj} q \omega_j q C_j^2 + \frac{1}{2} i [S_{3rj} \omega_b^2 q (C_j^2 - 2C_j D_j) - S_{4rj} \omega_b \omega_j q C_j^2 +$$

$$+ S_{9rj} \omega_j^2 q (C_j^2 + 2C_j D_j) + \frac{1}{2} f_2^\circ \omega_b q^2 D_j]$$

$$f_2^\circ = \mu^{-1} [f_2 A_{22}^{-1} - \kappa_{3-j} f_1 A_{33}^{-1/2} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0)] + S_{11rj} \omega_j \omega_b^{-1}$$

$$f_2^* = \mu^{-1} (f_2 A_{22}^{-1} - \kappa_{3-j} f_1 A_{33}^{-1/2}), \quad S_{1rj} = S_{156} + \kappa_{3-j} S_{256}$$

$$S_{2rj} = \frac{1}{2} a_{10} \omega_j^2 - (\omega_b^2 + \frac{1}{2} \omega_j^2) (a_{15} + \kappa_{3-j} a_{25}) + (I_y - I_x) \omega_b^2, \dots$$

$$S_{11rj} = \kappa_{3-j} \mu^{-1} f_1 A_{33}^{-1/2} \operatorname{tg} \beta_0$$

3. Исследуем устойчивость решений. Непосредственно из уравнения (2.7) следует, что при резонансе типа $2\omega_j = \omega_b$ системе (2.7) удовлетворяют как нулевые значения переменных $C_j = D_j = 0$, так и $C_j = \text{const}$, $D_j = \text{const}$. Для того, чтобы стационарное решение, отличное от нуля, было единственным, необходимо, чтобы одновременно выполнялось условие устойчивости состояния $C_j = \text{const}$, $D_j = \text{const}$ и условие неустойчивости состояния $C_j = D_j = 0$, т. е. условие возбуждения колебаний.

При резонансах типа $\omega_j = \omega_b$, $\omega_j = 2\omega_b$ колебания возбуждаются при любых значениях параметров. Для получения условий устойчивости стационарных колебаний составим уравнения в вариациях δC_j , δD_j . Следует учитывать, что $(2\Delta / i\lambda b_{3-j}) > 0$ при $j=2$, $(2\Delta / i\lambda b_{3-j}) < 0$ при $j=1$.

Выполнив необходимые преобразования, условия устойчивости и возбуждения колебаний (для $k=1/2$) запишем в виде

$$2\omega_j [h_{rj} + \frac{1}{2} (n-1) q_{r1}] + \Gamma_k > 0$$

$$3X^2 + 4XY + Y^2 - 2d_{1jh} X - 2d_{2jh} Y + d_{3jh} > 0 \quad (k=1/2, 1, 2)$$

$$(\Delta_{rj} \omega)^2 + \omega_j^2 h_{rj}^2 < u_0^2 \quad (k=1/2) \quad (3.1)$$

$$\Gamma_k = \begin{cases} \frac{1}{2} q \rho [\cos \chi (2S_{grj} \omega_j^2 - S_{4rj} \omega_b^2) + S_{6rj} \omega_j \sin \chi] & \text{при } k=1 \\ 0 & \text{при } k=1/2, 2 \end{cases}$$

$$X = 3S_{rj}^{\circ} C_j D_j, \quad Y = \Delta_{rj} \omega^{-1/2} (n-1) q_{r0}$$

При $k=2$ имеем $d_{\nu jk}=0$, $\nu=1, 2, 3$. При $k=1/2$ имеем $d_{2jk}=0$

$$d_{3jk} = (n-1) u_0 [\omega_j q_{r1} \cos 2\chi - q_{r0} \sin 2\chi] - u_0^2, \quad d_{1jk} = -2u_0 \sin 2\chi$$

При $k=1$ ($\omega_j = \omega_b$) имеем

$$-2d_{1jk} = 2S_{3rj} \omega_b^2 q \rho \sin \chi - \frac{1}{2} S_{2rj} q^2 \cos \chi + S_{4rj} \omega_b q \rho \sin \chi + S_{6rj} \omega_j q \rho \cos \chi + \\ + \frac{1}{2} (S_{3rj} - \omega_j^2 \omega_b^{-2} S_{9rj}) \omega_b q \rho \sin \chi - 2f_2^* \operatorname{tg} \beta_0 \omega_b q \rho \cos \chi$$

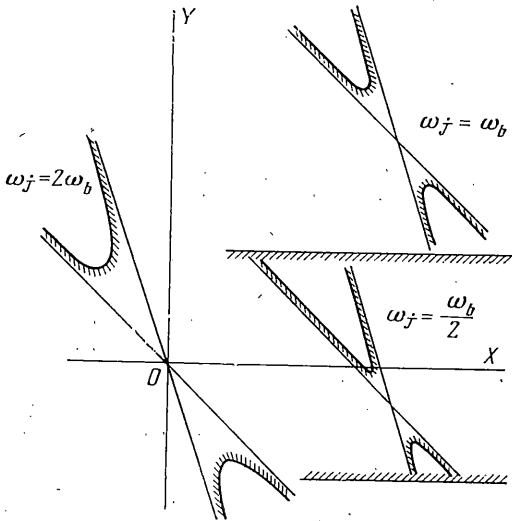
$$-2d_{2jk} = \frac{1}{2} \omega_b^2 q \rho (S_{4rj} - 2S_{3rj}) \sin \chi - \frac{1}{2} q \rho (2f_2 \omega_b \operatorname{tg} \beta_0 - \omega_j S_{6rj}) \cos \chi$$

$$d_{3jk} = -\frac{1}{2} \omega_j [h_{rj} + \frac{1}{2} (n-1) q_{r1}] S_{4rj} \omega_b^2 q \rho \cos \chi - \omega_b^2 q [S_{3rj} (S_{4rj} - S_{3rj})]^{1/4} \rho^2 \sin^2 \chi - \\ - \frac{1}{4} S_{4rj}^2 \rho^2 + \frac{1}{4} S_{2rj}^2 q^2 (n-1) (q_{r0} \cos 2\chi + \omega_j q_{r1} \sin 2\chi) + \dots$$

В первое условие устойчивости для резонансов типа $2\omega_j = \omega_b$ и $\omega_j = 2\omega_b$ слагаемое Γ_k не входит, а h_{rj} всегда положительно. Причем с ростом угла β_0 растет h_{rj} . Таким образом, наличие взаимосвязи колебаний гироскопа и корпуса на амортизаторах усиливает первое условие устойчивости этих резонансов.

Более сложная зависимость первого неравенства (3.1) от угла β_0 имеет место при главном резонансе ($\omega_j = \omega_b$), так как Γ_k является нечетной функцией угла β_0 . Причем $\Gamma_k = 0$ при $\beta_0 = 0$.

Второе условие устойчивости выполняется не при всех значениях параметров. В плоскости параметров X и Y границей второго неравенства являются гиперболы с угловыми коэффициентами (-1) и (-3) (фиг. 6). Область устойчивости лежит вне параболы. Из трех рассматриваемых типов резонанса наименьшей является область устойчивости субгармонического резонанса типа $\omega_j = \frac{1}{2} \omega_b$ из-за ограничения, обусловленного условием возбуждения, которое определяется на этой плоскости прямыми, параллельными оси $O\dot{X}$. Отметим, что для резонанса на обертоне внешней частоты $\omega_j = 2\omega_b$ координаты особой точки на плоскости $X\dot{Y}$ не зависят от величины угла β_0 .



Фиг. 6

Для субгармонического резонанса указанная зависимость наблюдается, однако она является слабой. Наиболее сильное влияние величина β_0 оказывает на координаты особой точки при главном резонансе.

При $\beta_0 = 0$ имеем $S_{\nu rj} = 0$ ($\nu=1, 4, 5, 6, 9, 10, 11$), и влияние гироскопа на условие устойчивости резонансных колебаний существенно ослабляется и будет проявляться в основном из-за величин второго и третьего порядка малости относительно произведения координат и их скоростей,

обусловленных моментами сил трения в опорах карданова подвеса и переменностью моментов инерции всей системы.

Отметим, что резонансные колебания системы на низшей частоте собственных колебаний развиваются значительно легче, чем на большей (частоте нутации).

4. Уравнения для стационарных значений амплитуд найдем, положив в (2.7) $C_j^* = D_j^* = 0$ и умножив первое уравнение на второе. В результате получим

$$^{1/4}\{[Y+X+^{1/2}(n-1)q_{r_0}]^2+\omega_j^2 h_{r_j}^2\}\rho^2=G_{1k}\bar{G}_{1k} \quad (4.1)$$

Учитывая значения переменных Y и X и представив q_{r_0} и q_{r_1} в виде $q_{r_0}=A_r \rho^{n-1}$, $\omega_j q_{r_1}=\varepsilon_n q_{r_0}$ ($n=3$), уравнение (4.1) при различных k можно переписать в форме

$$Q = \sum_{\nu=0}^4 m_{1\nu} \rho^4 \quad \text{при } k=1; \quad Q = \frac{1}{4} u_0^2 \rho^2 \quad \text{при } k = \frac{1}{2}$$

$$Q = \left(\frac{1}{4} d_{rbb} q^2 \right)^2 \quad \text{при } k=2 \quad (4.2)$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho^2 \left\{ (\Delta_j \omega_*)^2 + 2\Delta_j \omega_* A \rho^2 + A^2 \rho^4 + \omega_j^2 \left[h_*^2 + 2h_* \frac{\varepsilon_n A_r}{\omega_j} \rho^2 + \left(\frac{\varepsilon_n A_r}{\omega_j} \right)^2 \rho^4 \right] \right\}$$

$$\Delta_j \omega_* = a_{34j} \Delta_j \omega^{-1/2} q^2 (S_{2rj} + \omega_b^2 S_{1rj}), \quad A = ^{3/4} S_{rj}^\circ - A_r$$

$$h_* = h_{s2} + h_5 (1 - ^{1/4} q^2) - \mu_{23} a_{31} \lambda^{-1+^{1/2}} S_{11rj} q^2 + ^{1/4} S_{10rj} \rho^2$$

Уравнение амплитуд (4.2) должно быть дополнено уравнением для определения фазы χ , которое легко получить из (2.7), разделив одно уравнение на другое. В частности, при $\chi=0$ для $k=1$ имеем $m_{1\nu} > 0$ $\nu=0, 1, 2, 3, 4$. Это значит, что наличие взаимосвязи колебаний гироскопа и корпуса на амортизаторах может привести к увеличению амплитуды при главном резонансе при малых значениях угла β_0 . При $k=1/2$ и $k=2$ в зависимости от знака угла β_0 амплитуда резонансных колебаний может либо уменьшиться, либо увеличиться. Анализ уравнения (4.2) показывает, что амплитуда резонансных колебаний будет наименьшей при наличии трения гистерезисного типа в том случае, если упругая характеристика амортизаторов является мягкой ($S_{rj}^\circ < 0$).

В частном случае при $n=3$, когда отсутствуют расстройка $\Delta_j \omega_* = 0$ и вязкое трение $h_* = 0$, амплитуда при резонансах может быть найдена из уравнения

$$^{1/2} \rho^6 (A^2 + \varepsilon_n^2 A_r^2) = G_{1k} \bar{G}_{1k} \quad (4.3)$$

Причем, если $m_{10} = m_{11} = m_{13} = m_{14} = 0$, то при главном резонансе амплитуда ρ будет пропорциональна амплитуде возмущения в степени $1/3$; при субгармоническом — степени $1/2$; при супергармоническом — степени $2/3$. Это значит, что наибольшую опасность с ростом амплитуды возмущения может представлять супергармонический резонанс.

Отметим еще такой факт. Если $m_{10} = 0$, то и $m_{11} = 0$, и, следовательно, амплитуда главного резонанса будет определяться из такого же типа уравнений, как и амплитуда субгармонического резонанса порядка $1/2$.

5. Постоянные составляющие ухода гироскопа и углов поворота корпуса на амортизаторах найдем, усреднив уравнения (1.10)

$$\lambda \langle u \rangle = -\mu \langle R_3 \rangle, \quad \lambda \langle v \rangle = \mu \langle R_2 \rangle, \quad \lambda_5^2 \langle \theta \rangle = -\mu \langle R_1 \rangle + \mu_{24} \lambda \langle v \rangle \quad (5.1)$$

Подставив выражения для R_i в (5.1), получим

$$\begin{aligned} \langle \alpha^* \rangle &= \frac{(I_{y1} + I_{z2}) \langle \theta^* \rangle^2 \omega_j^2 \operatorname{tg} \beta_0}{(\lambda^2 - \omega_j^2) H \cos^2 \beta_0} \left(\frac{\lambda^2}{\omega_j^2 \cos \beta_0} - \frac{I_{y2} + I_e - I_{z2}}{A_{33}} \right) \times \\ &\times \left[1 + \frac{(I_{y1} + I_{z2}) \omega_j^2 \sin^2 \beta_0}{A_{32} (\lambda^2 - \omega_j^2)} \right] + \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1, 2 \\ \frac{(I_{y1} + I_{z2}) \omega_j^2 \operatorname{tg}^2 \beta_0}{A_{33} (\lambda^2 - \omega_j^2)} \times \\ \times [\langle \psi^* \theta_j^2 \rangle + \langle \psi \theta_j \theta_j^* \rangle (1 + \cos \beta_0)] + \frac{\langle \psi \theta_j \theta_j^* \rangle}{\cos \beta_0} & \text{при } k = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \langle \beta^* \rangle &= (H \cos \beta_0)^{-1} [(I_{x1} - I_{z1}) \langle \psi^* \theta_j^* \theta_j \rangle + f_1 \langle \psi^* \theta_j^2 \rangle (1 + \operatorname{tg} \beta_0) + f_1 \langle \psi \theta_j \theta_j^* \rangle \times \\ &\times (1 + \sin^2 \beta_0) \cos^{-2} \beta_0] \text{ при } k = 1/2 \quad (5.2) \\ \langle R_1 \rangle &= d_{555} \langle \theta^2 \rangle + d_{544} \langle \psi^2 \rangle + \\ &+ \begin{cases} S_{545} \langle \psi \theta_j \rangle & \text{при } k = 1 \\ a_{14} \langle \psi^* \theta_j^* \theta_j - \omega_j^2 \theta_j^2 \psi \rangle + a_{18} \langle \psi \theta_j^2 \rangle + a_{113} \langle \psi^* \theta_j^2 \rangle + a_{110} \langle \psi^* \psi \theta_j \rangle & \text{при } k = 1/2 \\ -1/2 \omega_j^2 a_{10} \langle \psi^2 \theta_j \rangle + a_{112} \langle \psi^* \psi \theta_j \rangle & \text{при } k = 2 \end{cases} \\ \mu a_{14} &= I_{x1} \nu_{j1} A_{22}^{-1}, \quad \mu a_{112} = -f_2 A_{22}^{-1}, \quad \mu a_{113} = -f_2 A_{22}^{-1} \operatorname{tg} \beta_0. \\ \mu a_{110} &= -f_2 A_{22}^{-1} (\nu_{j1} + \operatorname{tg} \beta_0) \\ \mu a_{18} &= A_{22}^{-1} (2c_{113} - \nu_{j1} \omega_j^2 I_{z1} + H \nu_{j1} - B \nu_{j1} \times \\ &\times \omega_j^2 \cos \beta_0 + \dots) \\ \mu a_{10} &= A_{22}^{-1} [A_{22} - 2c_{115} \omega_j^{-2} (B_j \nu_{j1} \cos \beta_0 - H \nu_{j1} \omega_j^{-2}) \sin \beta_0 - I_{z1} + \dots] \end{aligned}$$

Из анализа выражений (5.2) следует, что для рассматриваемого случая пространственных колебаний ($\alpha_0=0$; $\varphi=0$) уход гироскопа с динамически уравновешенным ротором и рамками карданового подвеса равен нулю при взаимной перпендикулярности рамок ($\beta_0=0$) только для случаев главного резонанса и резонанса типа $\omega_j=2\omega_b$.

При субгармоническом резонансе типа $2\omega_j=\omega_b$ уход гироскопа имеет место при любом положении рамок, в том числе и при их взаимной перпендикулярности. Полагая в (5.2) $\beta_0=0$, получим формулу для этого ухода при $k=1/2$

$$\langle \alpha^* \rangle = \langle \psi \theta_j \theta_j^* \rangle, \quad \langle \beta^* \rangle = H^{-1} \left[(I_{x1} - I_{z1}) \langle \psi^* \theta_j^* \theta_j \rangle + f_1 \left\langle \theta_j \frac{d(\psi \theta_j)}{dt} \right\rangle \right] \quad (5.3)$$

Величина ухода гироскопа, вычисленного по формуле (5.3), может достигать заметных величин. Например, если, основываясь на результатах экспериментальных исследований работы [12], принять амплитуды ψ_a , θ_a колебаний в направлении соответствующих координат равными $\psi_a=4.85 \cdot 10^{-3}$; $\theta_a=10^{-2}$ и $\omega_b=120 \operatorname{сек}^{-1}$, $\beta_0=0$, то $\langle \alpha^* \rangle = 29.1 \cdot 10^{-6} \operatorname{сек}^{-1}$ (6 град/час). Величина ухода гироскопа относительно оси вращения внутренней рамки при этом на несколько порядков будет меньше.

Отметим, что при субгармоническом резонансе величина ухода гироскопа относительно оси вращения наружной рамки карданового подвеса, обусловленная членами третьего порядка относительно произведений координат и их скоростей, будет соизмеримой с величиной ухода, вызванного членами второго порядка, в том случае, если амплитуда ψ_a колебаний в направлении координаты ψ достигает величины, имеющей порядок $0.1\beta_0$.

Из формул (5.3) можно как частный случай с учетом принятых ограничений ($\alpha_0=0$, $\varphi=0$) получить формулы для ухода гироскопа, приведенные в работе [13] для главного резонанса.

Следует обратить внимание на тот факт, что при рассматриваемом субгармоническом резонансе величина ухода гироскопа относительно оси вращения наружной рамки, обусловленная членами третьего порядка

относительно произведений координат и их скоростей, не зависит от величины кинетического момента гироскопа. Объясняется это тем, что эти члены обусловлены изменением гироскопического момента $H\omega_{yz}$ вследствие приращений углов α_0 и β_0 , вызванных обкаткой корпуса прибора относительно гироскопа (см. (1.9)).

Наличие указанной обкатки является также причиной ухода гироскопа относительно оси внутренней рамки под действием момента сил вязкого трения ($f_1\alpha^*$) в опорах оси вращения наружной рамки и центробежного момента $(I_{z_1} - I_{z_2})\omega_{x_1}\omega_{z_1}$ при $k=1/2$.

Таким образом, при пространственных колебаниях амортизированного гироскопа в кардановом подвесе наибольших значений уход гироскопа может достигнуть при прочих равных условиях в случае возникновения субгармонического резонанса типа $\omega_j=1/2\omega_b$.

Постоянная составляющая угла поворота корпуса на амортизаторах может достигать наибольшего значения при главном резонансе прежде всего от слагаемого $\mu S_{543}\Phi\theta_j$, являющегося основным в развитии субгармонического резонанса. Численные оценки с использованием результатов экспериментальных данных [12] показывают, что величина упомянутой постоянной составляющей угла поворота корпуса на амортизаторах может достигать величины порядка нескольких угловых минут.

В заключение отметим, что способами исключения развития пространственных колебаний при субгармоническом резонансе ($2\omega_j=\omega_b$) для заданного уровня возмущения является повышение жесткости системы амортизации, увеличение в системе трения вязкого типа и расстройки частот.

Снижение амплитуды пространственных колебаний и, следовательно, уменьшение погрешностей гироскопов, при резонансах всех типов может быть достигнуто увеличением сил трения как вязкого, так и гистерезисного типа и применением амортизаторов с мягкой упругой характеристикой.

Поступила 16 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Павловский М. А. Уходы амортизированного гироскопа при угловой вибрации основания. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 5.
3. Кононенко В. О. О колебаниях твердого тела около центра масс. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 4.
4. Кононенко В. О. Пространственные нелинейные колебания твердых тел. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 2.
5. Ганиев Р. Ф., Фролов К. В. Об одной типичной задаче виброамортизации в нелинейной постановке. Машиноведение, 1965, № 4.
6. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. О нелинейных колебаниях твердого тела, несущего вращающийся ротор. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5.
7. Ганиев Р. Ф. Резонансные явления при нелинейных колебаниях твердых тел. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 12.
8. Ганиев Р. Ф., Лютий А. И. Устойчивость гироскопических систем в условиях резонансов. Машиноведение, 1973, № 5.
9. Климов Д. М. Замечание по динамике карданова подвеса. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 4.
10. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Киев, «Наукова думка», 1974.
11. Мигропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
12. Павловский М. А., Шеллер Б. А. Экспериментальные исследования нелинейных колебаний амортизированного прибора. Вестн. Киевск. политехн. ин-та. Сер. приборостроение, 1975, вып. 5.
13. Пельпор Д. С. Теория гироскопических стабилизаторов. М., «Машиностроение», 1965.