**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1977**

УДК 517.9

О РЕЗОНАНСАХ В СИСТЕМАХ С КРАТНЫМИ ЧАСТОТАМИ

К. Г. ВАЛЕЕВ, К. Ф. ВОЙЦЕХОВСКАЯ

(Киев)

Рассматривается сложный резонансный случай в системе с периодическими коэффициентами, когда порождающая система имеет кратные собственные частоты. Найдены условия устойчивости и показано, что возможно расширение областей неустойчивости при увеличении коэффициентов сопротивления.

1. Рассматриваются уравнения динамической устойчивости упругих систем [1, 2], приведенные к виду

$$[E+\mu P_2(\theta t)]\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}+\mu P_1(\theta t)\frac{d\mathbf{y}}{dt}+[C+\mu P_0(\theta t)]\mathbf{y}=0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{y}$ — m-мерный вектор, E — единичная матрица, C — диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами $\omega_1^2, \ldots, \omega_m^2$, $P_r(\tau)$ — 2π-периодические вещественные матрицы, имеющие вид

$$P_r(\tau)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}P^{(rl)}e^{il\tau},\qquad P^{(rl)}=\|\pi_{js}^{(rl)}\|_1^m,\qquad \sum_{l=-\infty}^{\infty}\|l^{(r)}P^{(rl)}\|<\infty \tag{1.2}$$

$$(r=0,1,2;\ j,s=1,\ldots,m)$$

Везде дальше предполагаем, что при $\mu=0$ система уравнений (1.1) имеет q равных собственных частот

$$\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_q=0.5n\theta_0\equiv\omega \qquad (1\leqslant q\leqslant m;\ n=1,2,\ldots) \tag{1.3}$$

Предполагаем еще, что для остальных собственных частот ω_j выполнено условие отсутствия резонанса

$$\omega_1\pm\omega_s\neq l\theta_0,\quad \omega_j\mp\omega_s\neq l\theta_0 \qquad (j,\ s=q+1,\ldots,m;\ l=0,1,2,\ldots)$$

Используя метод Хилла, ищем решение системы (1.1) в виде ряда

$$\mathbf{y}=e^{pt}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\mathbf{y}_s e^{is\theta t} \tag{1.4}$$

Для векторов $\mathbf{y}_s$ получим бесконечную систему уравнений

$$[E(p+ik\theta)^2+C]\mathbf{y}_k+\mu\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{2}P^{(r,k-s)}(p+is\theta)^r\mathbf{y}_s=0 \tag{1.5}$$

В работах [3, 4] показано, что при достаточно малых значениях $|\mu|$ в рассматриваемом случае для определения характеристических показателей, близких к $i\omega_1$, можно получить уравнение при помощи определителя порядка $2q$. Преобразуем бесконечный определитель Хилла для системы

(1.5) в определитель порядка $2q$ и получим для характеристических показателей уравнение

$$\Delta(p,\theta,\mu)=\begin{vmatrix} E\sigma+\mu B^{(0,0)} & \mu B^{(0,-n)} \\ \mu B^{(-n,0)} & E\varkappa+\mu B^{(-n,-n)} \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{array}{l}\sigma\equiv p^2+\omega^2\\ \varkappa\equiv(p-in\theta)^2+\omega^2\end{array} \tag{1.6}$$

Элементы $b_{sr}^{(g,h)}$ матриц $B^{(g,h)}$ определяются рядами [5]:

$$b_{sr}^{(g,h)}=z_{sr}^{(g,h)}-\mu\sum_{\chi=-\infty}^{\infty}{\sum_{\alpha=1}^{m}}'\frac{z_{s\alpha}^{(g,\chi)}z_{\alpha r}^{(\chi,h)}}{(p+\chi\theta i)^2+\omega_\alpha^2}+\ldots,$$

$$z_{sr}^{(g,h)}\equiv\sum_{j=0}^{2}\pi_{sr}^{(j,g-h)}(p+h\theta i)^j$$

Штрих у суммы означает, что при суммировании выпускаются слагаемые, знаменатель которых обращается в нуль при $\theta=\theta_0$, $p=i\omega$.

2. В первом приближении уравнение (1.6) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 2i\omega\zeta E+B^{(0,0)} & B^{(0,-n)} \\ B^{(-n,0)} & 2i\omega(i\delta-\zeta)E+B^{(-n,-n)} \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{array}{l}p=i\omega+\mu\zeta\\ n\theta=n\theta_0+\mu\delta\end{array} \tag{2.1}$$

При $|B^{(0,-n)}|\neq0$ это уравнение может быть представлено при помощи определителя порядка q

$$\det[4\omega^2(\zeta^2-i\delta\zeta)E+2i\omega\zeta(Q-B^{(0,0)})-2\omega\delta B^{(0,0)}+QB^{(0,0)}-\Lambda]=0 \tag{2.2}$$

$$\Lambda\equiv B^{(0,-n)}B^{(-n,0)},\qquad Q\equiv B^{(0,-n)}B^{(-n,-n)}B^{(0,-n)^{-1}}$$

Пусть усредненные по времени значения матриц $P_r(\theta t)$ равны нулю, т. е.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P_r(\theta t)\,dt=P^{(r,0)}=0\qquad(r=0,1,2) \tag{2.3}$$

При этом уравнение (2.1) существенно упрощается и представляется при помощи определителя порядка q в виде

$$\det[4\omega^2\zeta(\zeta-i\delta)E-B^{(0,-n)}B^{(-n,0)}]=0$$

Оно распадается на q скалярных уравнений

$$4\omega^2\zeta(\zeta-i\delta)=\lambda_\alpha\qquad(\alpha=1,\ldots,q) \tag{2.4}$$

в которых λ_α — собственные числа матрицы Λ

$$\Lambda=B^{(0,-n)}B^{(-n,0)} \tag{2.5}$$

$$B^{(0,-n)}=\|\pi_{sr}^{(0,n)}-i\omega\pi_{sr}^{(1,n)}-\omega^2\pi_{sr}^{(2,n)}+O(\mu)\|_1^q$$

$$B^{(-n,0)}=\|\pi_{sr}^{(0,-n)}+i\omega\pi_{sr}^{(1,-n)}-\omega^2\pi_{sr}^{(2,-n)}+O(\mu)\|_1^q$$

Из рассмотрения уравнений (2.4) вытекают следующие простые признаки устойчивости для системы уравнений (1.1):

I. Если среди собственных чисел λ_α матрицы Λ (2.5) есть хотя бы одно невещественное, то нулевое решение системы (1.1) неустойчиво при $\mu\neq0$.

Действительно, если $\lambda_\alpha=u_\alpha+iv_\alpha$, то согласно уравнению (2.4) вещественная часть ζ удовлетворяет уравнению

$$64\omega^4(\mathrm{Re}\,\zeta)^4+16\omega^2(\omega^2\delta^2-u_\alpha)(\mathrm{Re}\,\zeta)^2-v_\alpha^2=0$$

Следовательно, при $v_\alpha \neq 0$ и любых u_α, δ найдется хотя бы одно значение ζ, для которого $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Значит, при $v_\alpha \neq 0$ характеристический показатель $p = i\omega + \mu\zeta$ имеет $\operatorname{Re} p > 0$.

II. Необходимым условием устойчивости решений системы (1.1) является условие неположительности всех собственных чисел матрицы Λ.

Необходимость условия $\lambda_\alpha \leqslant 0$ следует из того, что при устойчивости решения системы (1.1) характеристические показатели $p = i\omega + \mu\zeta$, имеющие согласно (2.4) вид

$$p = i\omega + \frac{1}{2} i\mu\delta \pm \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\lambda_\alpha}{\omega^2} - \delta^2\right)^{1/2} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q)$$

должны в окрестности точки $\delta = 0$ $(\theta = \theta_0)$, $\mu = 0$ удовлетворять условию $\operatorname{Re} p \leqslant 0$, что возможно при $\lambda_\alpha \leqslant 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, q$.

III. Пусть все собственные числа λ_α матрицы Λ вещественные и наибольшее из них λ_1 положительно. Тогда при условии

$$|\theta - \theta_0| < |\mu| \lambda_1^{1/2} n^{-1} \omega^{-1} + O(\mu^2)$$

решения системы (1.1) будут неустойчивы.

Справедливость утверждения следует из того, что при условиях

$$|\mu\delta| < |\mu| \lambda_1^{1/2} \omega^{-1} + O(\mu^2), \quad \lambda_1 > 0, \quad n(\theta - \theta_0) = \mu\delta$$

разность $\lambda_1 \omega^{-2} - \delta^2$ будет положительной, а это соответствует характеристическому показателю с положительной вещественной частью.

IV. Если система (1.1) является возвратной [6] (не меняет своего вида при замене t на $-t$; является самосопряженной при всех θ или лишь линейной неособой заменой переменного отличается от сопряженной системы или системы, полученной заменой t на $-t$), то для устойчивости решений системы (1.1) при достаточно малых значениях $|\mu|$ достаточно, чтобы все собственные числа λ_α матрицы Λ (2.5) были отрицательными и различными.

При выполнении этих условий все решения ζ уравнения (2.4), а значит и все характеристические показатели $p = i\omega + \mu\zeta$ будут чисто мнимыми и различными, что соответствует ограниченности решения ([7] гл. IV).

Если среди вещественных собственных чисел λ_α матрицы Λ есть положительные, то на плоскости θ, μ к точке $\theta = \theta_0$, $\mu = 0$ примыкает широкая область неустойчивости с уравнениями границ

$$\theta = \theta_0 \pm \mu \lambda_1^{1/2} n^{-1} \omega^{-1} + O(\mu^2) \tag{2.6}$$

где λ_1 — наибольшее собственное число матрицы Λ.

Пример 2.1. Укажем условия устойчивости решений системы уравнений

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{y} + 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\theta t) P_k \mathbf{y} = 0 \qquad (\omega > 0) \tag{2.7}$$

Пусть имеем резонансный случай $n\theta_0 = 2\omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Матрица (2.5) принимает простой вид

$$\Lambda = P_n P_{-n} \qquad P_n = \|\pi_{sr}^{(n)}\|_1^m$$

Решения системы (2.7) устойчивы, если все собственные числа матрицы Λ вещественные и отрицательные. Если среди всех вещественных чисел матрицы Λ есть положительные, то на плоскости параметров θ, μ к точке примыкает область неустойчивости вида (2.6). Решения системы (2.7) неустойчивы, если среди собственных чисел матрицы Λ есть комплексные.

В частном случае для системы двух уравнений второго порядка получим результат работы [8]. Полагая $P_n=\|\overset{(n)}{\pi}_{sr}\|_1{}^2$, находим, что матрица Λ

$$\Lambda=\left\|\begin{matrix}\overset{(n)}{\pi}_{11} & \overset{(n)}{\pi}_{12}\\ \overset{(n)}{\pi}_{21} & \overset{(n)}{\pi}_{22}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\overset{(-n)}{\pi}_{11} & \overset{(-n)}{\pi}_{12}\\ \overset{(-n)}{\pi}_{21} & \overset{(-n)}{\pi}_{22}\end{matrix}\right\|,\qquad \overset{(-n)}{\pi}_{sr}=\overset{(n)}{\pi}_{sr}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2}={}^1/_2[(\overset{(n)}{\pi}_{11})^2+2\overset{(n)}{\pi}_{12}\overset{(n)}{\pi}_{21}+(\overset{(n)}{\pi}_{22})^2]\pm$$

$$\pm{}^1/_2\{(\overset{(n)}{\pi}_{11}+\overset{(n)}{\pi}_{22})^2[(\overset{(n)}{\pi}_{11}-\overset{(n)}{\pi}_{22})^2+4\overset{(n)}{\pi}_{12}\overset{(n)}{\pi}_{21}]\}^{1/2}$$

Следовательно, при условии $(\overset{(n)}{\pi}_{11}-\overset{(n)}{\pi}_{22})^2+4\overset{(n)}{\pi}_{12}\overset{(n)}{\pi}_{21}>0$ к точке $\mu=0,\ \theta=2\omega n^{-1}$ примыкает область неустойчивости с границами

$$\theta=2\omega n^{-1}\pm0.5\mu\omega^{-1}n^{-1}\sqrt{2}\{\overset{(n)2}{\pi}_{11}+2\overset{(n)}{\pi}_{12}\overset{(n)}{\pi}_{21}+\overset{(n)2}{\pi}_{22}+$$

$$+|\overset{(n)}{\pi}_{11}+\overset{(n)}{\pi}_{22}|[(\overset{(n)}{\pi}_{11}-\overset{(n)}{\pi}_{22})^2+4\overset{(n)}{\pi}_{12}\overset{(n)}{\pi}_{21}]^{1/2}\}^{1/2}$$

3. Условие (2.3) можно ослабить и заменить условием

$$\overset{(r,0)}{\pi}_{js}=0\quad(j\neq s,r=0,1,2),\quad \overset{(0,0)}{\pi}_{jj}=\rho,\quad \overset{(1,0)}{\pi}_{jj}=\nu,\quad \overset{(2,0)}{\pi}_{jj}=\gamma\quad{\scriptstyle(j,s=1,\ldots,q)}$$

Уравнение (2.4) для характеристических показателей, близких к $i\omega$, принимает вид

$$\omega^2(2\zeta+\nu)^2-2i\omega^2\delta(2\zeta+\nu)+(\rho-\omega^2\gamma)(\rho-\omega^2\gamma-2\omega\delta)=\lambda_\alpha\tag{3.1}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$$

При $\nu>0$ приходим к следующему признаку устойчивости решений системы уравнений (1.1), заключающемуся в выполнении неравенств:

$$\operatorname{Re}\lambda_\alpha+(0.5\omega^{-1}\nu^{-1}\operatorname{Im}\lambda_\alpha)^2-\omega^2\nu^2-(\rho-\omega^2\gamma-\omega\delta)^2<0\quad(\alpha=1,\ 2,\ldots,\ q)\tag{3.2}$$

Если хотя бы одно из неравенств (3.2) заменяется на противоположное, то решения системы (1.1) неустойчивы. Для устойчивости решений системы (1.1) при всех достаточно малых значениях $|\mu|$, $|\theta-\theta_0|$ достаточно выполнения неравенств

$$\operatorname{Re}\lambda_\alpha+(0.5\omega^{-1}\nu^{-1}\operatorname{Im}\lambda_\alpha)^2-\omega^2\nu^2<0\quad(\alpha=1,2,\ldots,\ q)$$

Другими словами, решения системы (1.1) устойчивы в резонансном случае (1.3), если все собственные числа матрицы Λ (2.5) попадают на комплексной плоскости $\lambda=u+iv$ (фиг. 1) в область, определяемую неравенством $u<\omega^2\nu^2-0.25\omega^{-2}\nu^{-2}v^2$.

Если хотя бы одно из этих неравенств заменяется на противоположное, то на плоскости θ, μ к точке $\theta=\theta_0$, $\mu=0$ примыкает широкая область неустойчивости с уравнениями границ

$$n\theta=2\omega+\mu(\rho\omega^{-1}-\omega\gamma)\pm\mu\{\max[\operatorname{Re}\lambda_\alpha+(0{,}5\omega^{-1}\nu^{-1}\operatorname{Im}\lambda_\alpha)^2-\omega^2\nu^2]\}^{1/2}$$

4. Рассмотрим случай двукратной резонансной частоты

$$\omega_1=\omega_2=0.5n\theta_0\equiv\omega\tag{4.1}$$

при действии сил сопротивления с различными коэффициентами ν_1, ν_2. Уравнение (2.1) является уравнением четвертой степени с вещественными коэффициентами

$$z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=0,\qquad z=2\omega\zeta-i\omega\delta\tag{4.2}$$

причем коэффициенты a_s равны суммам главных миноров s-го порядка матрицы A

$$A=\left\| \begin{matrix} i(\omega\delta E - B^{(0,0)}) & -iB^{(0,-n)} \\ iB^{(-n,0)} & -i(\omega\delta E - B^{(-n,-n)}) \end{matrix} \right\|, \quad B^{(g,h)}=\| b_{rk}^{(g,h)} \|_1^2 \tag{4.3}$$

Устойчивость решений системы (1.1) в случае (4.1) обеспечивается выполнением условий Рауса — Гурвица для уравнения (4.2). На границе области неустойчивости должны выполняться условия

$$a_4 \geqslant 0, \quad \Delta_3 \equiv a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_4 a_1^2 \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Рассмотрим для простоты частный случай

$$b_{11}^{(0,0)} = i\omega\nu_1, \quad b_{22}^{(0,0)} = i\omega\nu_2, \quad b_{12}^{(0,0)} = b_{21}^{(0,0)} = 0 \tag{4.5}$$

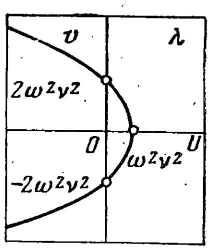
и обозначим для удобства записи $b_{sr} \equiv b_{sr}^{(0,-n)}$, $b_{sr}^* \equiv b_{sr}^{(-n,0)}$.

Из (4.2) — (4.4) находим, что величина δ, определяющая положение и ширину области неустойчивости системы (1.1), в случае (4.1), (4.5) удовлетворяет условиям

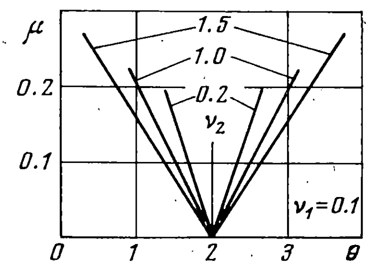
$$\left| \begin{matrix} B^{(0,0)} - \omega\delta E & B^{(0,-n)} \\ B^{(-n,0)} & B^{(-n,-n)} - \omega\delta E \end{matrix} \right| \geqslant 0 \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} 4\omega^2\delta^2 + 2(\nu_1^{-1} - \nu_2^{-1})\,\mathrm{Im}(b_{12}b_{21}^*)\,\delta - \nu_1^{-1}\nu_2^{-1}(\nu_1+\nu_2)^2\,\mathrm{Re}(b_{12}b_{21}^*) + \\ + \omega^2(\nu_1+\nu_2)^2 - 2(|b_{11}|^2 + |b_{22}|^2) + \omega^{-2}(\nu_1+\nu_2)^{-2}(|b_{11}|^2 - |b_{22}|^2)^2 + \\ + \omega^{-2}\nu_1^{-1}\nu_2^{-1}[2\mathrm{Re}\,(b_{12}b_{21}b_{11}^*b_{22}^*) + (|b_{11}|^2 + |b_{22}|^2)\,\mathrm{Re}\,(b_{12}b_{21}^*) - \\ - (\mathrm{Im}(b_{12}b_{21}^*))^2] \geqslant 0 \end{gathered}$$

Из последнего неравенства следует, что в случае кратного резонанса за счет слагаемого $\nu_1^{-1}\nu_2^{-1}(\nu_1+\nu_2)^2\mathrm{Re}(b_{12}b_{21}^*)$ возможно расширение об-



Фиг. 1

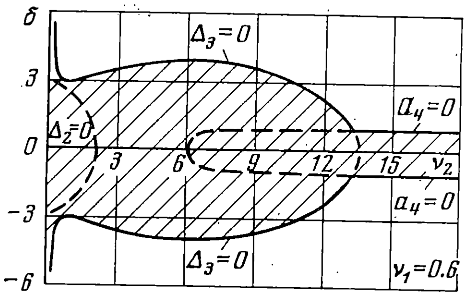


Фиг. 2

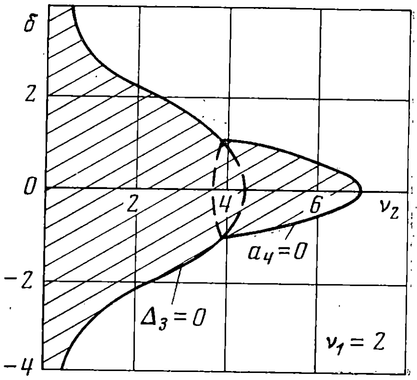
ласти неустойчивости при увеличении коэффициентов сопротивления. На фиг. 2 представлены границы областей неустойчивости в первом приближении при $\nu_1=0.1$, $\omega=1$, $b_{11}=1$, $b_{22}=-1$, $b_{12}=b_{21}=2\sqrt{2}$ и при различных значениях коэффициента ν_2. Аналогичное явление в случае комбинационного резонанса было ранее обнаружено и исследовано в работах [5, 9] и др.

Пример 4.1. Рассмотрим устойчивость решений по первому приближению системы двух уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 + 2\mu(\nu_1 - \sin\theta t)\frac{dy_1}{dt} + 4\sqrt{2}\,\mu\cos\theta t y_2 = 0 \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} + y_2 + 2\mu(\nu_2 + \sin\theta t)\frac{dy_2}{dt} + 4\sqrt{2}\,\mu\cos\theta t y_1 = 0 \\ |\mu| < 1, \quad \nu_1\nu_2 > 0, \quad \theta_0 = 2 \end{gathered} \tag{4.7}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Полагая $p=i+\mu\zeta$, $\theta=2+\mu\delta$, $2\zeta=z+i\delta$, получаем уравнение (4.2) в виде

$$z^4+2(\nu_1+\nu_2)z^3+[2\delta^2+(\nu_1+\nu_2)^2+2(\nu_1\nu_2-9)]z^2+$$
$$+2(\nu_1+\nu_2)(\delta^2+\nu_1\nu_2-9)z+\delta^4+(\nu_1^2+\nu_2^2-18)\delta^2+(\nu_1\nu_2-9)^2-(\nu_1-\nu_2)^2=0$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$z=-0.5(\nu_1+\nu_2)\pm0.5\{32+[\nu_1-\nu_2\pm2(1-\delta^2)^{1/2}]^2\}^{1/2}$$

Следовательно

при $\nu_1\nu_2>|\nu_1-\nu_2|+9$ частота $\theta_0=2$ сильно устойчива;

при $8\leqslant\nu_1\nu_2\leqslant|\nu_1-\nu_2|+9$ к частоте $\theta_0=2$ примыкает область неустойчивости с границами

$$\theta=2\pm\mu\{9-0.5(\nu_1^2+\nu_2^2)+0.5|\nu_1-\nu_2|[(\nu_1+\nu_2)^2-32]^{1/2}\}^{1/2}$$

при $\nu_1\nu_2\leqslant8$ к частоте $\theta_0=2$ примыкает область неустойчивости с границами

$$\theta=2\pm\mu[1+0.25\nu_1^{-1}\nu_2^{-1}(\nu_1+\nu_2)^2(8-\nu_1\nu_2)]^{1/2} \qquad (4.8)$$

Из формулы (4.8) следует, что при выполнении условия

$$2[1-(1-\nu_s^2)^{1/2}]\leqslant\nu_1\nu_2\leqslant2[1+(1-\nu_s^2)^{1/2}] \quad (s=1,\ 2)$$

увеличение сопротивления приводит к расширению области неустойчивости системы (4.7) (на фиг. 3 область неустойчивости заштрихована, ее ширина пропорциональна величине δ). Последующее увеличение сопротивления при условии

$$\nu_1\nu_2>2[1+(1-\nu_s^2)^{1/2}] \quad (s=1,\ 2)$$

приводит к сужению области неустойчивости. Если $\nu_1>1$, то при увеличении ν_2 область неустойчивости сужается (фиг. 4).

Использованный способ решения пригоден при исследовании устойчивости параметрически возмущаемых гироскопических систем. Для этого уравнения движения целесообразно привести к виду (1.1).

Поступила 9 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mettler E.* Stability and vibration problems of mechanical systems under harmonic excitation. Proc. Internat. conf. dynamic stability of structures. Evanston, 1965, Oxford – New York, Pergamon Press, 1967.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
3. *Якубович В. А.* О динамической устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1958, т. 121, № 4.
4. *Валеев К. Г.* К методу Хилла в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
5. *Валеев К. Г.* Об опасности комбинационных резонансов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
6. *Хейл Дж. К.* Колебания в нелинейных системах. М., «Мир», 1966.
7. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
8. *Jagadish K. S.* The dynamic stability of degenerate systems under parametric excitation. Ingr-Arch., 1974, Bd 43, Nr 4, S. 240–246.
9. *Schmidt G., Weidenhammer F.* Instabilitäten gedämpfter rheolinearer Schwingungen. Math. Nachr, 1961, Bd 23, Nr 4–5, S. 301–318.