

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ
С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ
ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

М. Ф. ДИМЕНТБЕРГ, Н. Е. ИСИРОВ

(Москва)

Один из основных методов решения задач динамики нестационарных линейных систем с внешними случайными воздействиями заключается в составлении задачи с начальными условиями для моментных функций обобщенных координат и скоростей и в последующем численном решении этой задачи на ЭЦВМ. Однако для одного широкого класса таких систем (а именно, систем с периодически изменяющимися параметрами, допускающими применение асимптотического метода Крылова — Боголюбова) удается построить достаточно полное аналитическое решение задачи, поскольку можно получить линейную систему укороченных уравнений с постоянными параметрами. Это обстоятельство отмечено в [1], где, в частности, рассмотрен случай суммарного комбинационного резонанса. Однако для этого случая в [1] составлены лишь выражения для коэффициентов передачи по амплитудам; кроме того, вывод укороченных уравнений дан не совсем последовательно — эти уравнения содержат зависящие от времени коэффициенты, которые затем исключаются при помощи дополнительной замены переменных. Отметим, что возможность построения аналитических решений особенно важна с точки зрения решения обратных задач — задач идентификации систем данного типа. Пути решения некоторых задач идентификации для систем с одной степенью свободы были намечены в работе [2]; в предлагаемой работе в п. 4 дано развитие исследований таких обратных задач.

1. Будем исследовать стохастические движения системы, описываемой матричным уравнением

$$Mz'' + Cz' + Kz + \Lambda z \sin 2vt = \xi(t) \quad (1.1)$$

в предположении, что при $\xi=0$ тривиальное решение $z=0$ системы (1.1) устойчиво. Здесь $z(t)$ — n -мерный вектор-столбец с координатами $z_i(t)$; M, C, K, Λ — постоянные $n \times n$ -матрицы, причем матрицы M, K — симметричные и M — положительно-определенная. Через $\xi(t)$ обозначен векторный стационарный центрированный случайный процесс. Будем считать его широкополосным по отношению к системе (1.1). Такое допущение не ограничивает общности анализа, поскольку в случае узкополосных внешних возмущений можно дополнить уравнение (1.1) дифференциальным уравнением формирующего фильтра, выражающим $\xi(t)$ через векторный процесс типа белого шума; полученную «расширенную» систему можно исследовать при помощи того же метода, что и систему (1.1).

Полагая величины C, Λ, ξ малыми, перейдем к нормальным координатам порождающей системы, воспользовавшись для этого в (1.1) заменой $z = Sx$, где S — матрица нормированных по отношению к M собственных векторов задачи о собственных значениях $(K - \Omega^2 M)z = 0$. В результате получим систему n уравнений

$$x_i'' + 2 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j' + \Omega_i^2 x_i + \Omega_i^2 \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_j \sin 2vt = \xi_i(t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (1.2)$$

где $\alpha_{ij}, \Omega_i^2, \Omega_i^2 \lambda_{ij}$ — элементы матриц $1/2 S'CS, S'KS, S'AS$ соответственно,

$\xi_i(t)$ — элемент вектора $S'\zeta(t)$ (штрихом сверху обозначается транспонирование матрицы).

Как известно [3, 4], главные области неустойчивости системы (1.2) при $\xi_i(t) \equiv 0$ расположены вблизи значений $v \approx \Omega_i$ (основные резонансы), или $v \approx 1/2(\Omega_i + \Omega_j)$ (комбинационные резонансы); $i, j = 1, \dots, n$. Будем исследовать систему (1.2) в этих же диапазонах частот, используя первое приближение асимптотического метода Крылова — Боголюбова [5] (отметим, что, привлекая высшие приближения этого метода, можно исследовать также и окрестности резонансов более высоких порядков). Для первого из указанных вариантов выделим те m нормальных координат $x_k(t)$ ($1 \leq m \leq n$), которым соответствуют малые расстройки $|\Delta_k| = |v - \Omega_k|$, и введем для них новые переменные $x_{kc}(t), x_{ks}(t)$ согласно зависимостям

$$x_k(t) = x_{kc}(t) \cos vt + x_{ks}(t) \sin vt, \quad x_k'(t) = v[-x_{kc}(t) \sin vt + x_{ks}(t) \cos vt] \quad (1.3)$$

Выражения (1.3) подставляются в соответствующие m уравнений (1.2), и в результате для амплитуд x_{kc}, x_{ks} получается система $2m$ линейных уравнений первого порядка в стандартной форме. Применение к этой системе метода усреднения [6] приводит к системе $2m$ линейных укороченных уравнений с постоянными коэффициентами, содержащих в правых частях процессы $\eta_{kc}(t), \eta_{ks}(t)$ типа белого шума с интенсивностями, пропорциональными $\Phi_{\xi_k \xi_k}(v)$ (здесь и в дальнейшем через $\Phi(\omega)$ обозначаются спектральные плотности процессов, указываемых индексами при Φ), причем процессы η_{kc}, η_{ks} ($k = 1, \dots, m$) некоррелированы между собой.

В случае суммарного комбинационного резонанса ($v \approx 1/2(\Omega_i + \Omega_j)$) вводим следующие преобразования переменных:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_{ic}(t) \cos(2v - \Omega_j)t + x_{is}(t) \sin(2v - \Omega_j)t \\ x_i'(t) &= (2v - \Omega_j)[-x_{ic}(t) \sin(2v - \Omega_j)t + x_{is}(t) \cos(2v - \Omega_j)t] \\ x_j(t) &= x_{jc}(t) \cos \Omega_j t + x_{js}(t) \sin \Omega_j t \\ x_j'(t) &= \Omega_j[-x_{jc}(t) \sin \Omega_j t + x_{js}(t) \cos \Omega_j t] \end{aligned}$$

Подстановка выражений (1.4) соответственно в i - и j -е уравнения (1.2) приводит к системе четырех уравнений первого порядка в стандартной форме. После усреднения получается система четырех линейных укороченных уравнений с постоянными коэффициентами, содержащая, в частности, параметр расстройки

$$\Delta = \frac{(2v - \Omega_j)^2 - \Omega_i^2}{2(2v - \Omega_j)} \approx 2v - (\Omega_i + \Omega_j) \quad (1.5)$$

Наконец, если среди собственных частот Ω существуют такие Ω_k, Ω_l , что $\Omega_k \approx \Omega_i, \Omega_l \approx \Omega_j$ (где $\Omega_i + \Omega_j \approx 2v$), то для процессов $x_k(t), x_l(t)$ вводятся преобразования вида (1.4). Система укороченных уравнений будет содержать дополнительные расстройки $\Delta + \Omega_i - \Omega_k, \Omega_j - \Omega_l$.

2. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, положив в (1.2) $n=1$; индекс номера нормальной обобщенной координаты здесь опускается. Воспользовавшись заменой переменных (1.3), получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} x_c' &= -\alpha(1-2r)x_c - \alpha\delta x_s + \eta_c(t), \quad x_s' = -\alpha(1+2r)x_s + \alpha\delta x_c + \eta_s(t) \\ r &= \lambda\Omega^2 / 8v\alpha \approx \lambda\Omega / 8\alpha, \quad \delta = \Delta / \alpha, \quad \Delta = (v^2 - \Omega^2) / 2v \approx v - \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\eta_c(t), \eta_s(t)$ — эквивалентные некоррелированные белые шумы с одинаковыми интенсивностями $D = \pi\Phi_{\xi\xi}(v) / v^2$.

Будем исследовать стационарное решение системы (2.1), полагая выполненным неравенство

$$2r / (1 + \delta^2)^{1/2} < 1 \quad (2.2)$$

представляющее условие устойчивости системы (2.1) при $\eta_c=0, \eta_s=0$, а следовательно, условие устойчивости в первом приближении системы (1.2) ($n=1$) при $\xi=0$. При помощи любого из методов линейной статистической динамики нетрудно получить следующее выражение для совместной плотности вероятности $p(x_c, x_s)$ процессов $x_c(t), x_s(t)$:

$$p(x_c, x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2(1-\mu^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{Q_{ss}x_c^2 - 2Q_{cs}x_cx_s + Q_{cc}x_s^2}{2\sigma^4(1-\mu^2)} \right] \quad (2.3)$$

$$\sigma^2 = 1/2(Q_{cc} + Q_{ss}), \quad \mu = [Q_{cs}^2 + 1/4(Q_{cc} - Q_{ss})^2]^{1/2}\sigma^{-2}$$

$$Q_{cc}, Q_{ss} = \sigma_0^2(1 + \delta \pm 2r)/\rho, \quad Q_{cs} = 2r\delta\sigma_0^2/\rho, \quad \rho = 1 - 4r^2 + \delta^2, \quad \sigma_0^2 = D/2\alpha \quad (2.4)$$

Нетрудно убедиться, что величина σ^2 есть дисперсия процесса $x(t)$ в системе с постоянными параметрами, получаемой из (1.2) ($n=1$) при $\lambda=0$. Величина σ^2 есть среднее за период значение дисперсии $\langle x^2 \rangle$ процесса $x(t)$, так как согласно (1.3), (2.4)

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 [1 + \mu \cos 2(vt - \theta)] \quad (2.5)$$

Из (2.3), (2.4) следует, что

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 / (1 - \mu^2), \quad \mu = 2r / (1 + \delta^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

Перейдя в (2.3) к новым переменным b, φ согласно зависимостям $x_c = b \cos \varphi, x_s = b \sin \varphi$, получим совместную плотность вероятности амплитуды $b(t)$ и фазы $\varphi(t)$:

$$p(b, \varphi) = \frac{b}{2\pi\sigma^2(1-\mu^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{b^2[1 - \mu \cos 2(\varphi - \theta)]}{2\sigma^2(1-\mu^2)} \right\} \quad (2.7)$$

$$\theta = 1/2 \arctg [2Q_{cs} / (Q_{cc} - Q_{ss})] = 1/2 \arctg \delta$$

Наконец, проинтегрировав (2.7) по φ и по b соответственно от нуля до 2π и от нуля до бесконечности, найдем одномерные плотности вероятности $p(b)$ и $w(\varphi)$ амплитуды и фазы

$$p(b) = \frac{b}{\sigma^2(1-\mu^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{b^2}{2\sigma^2(1-\mu^2)} \right] I_0 \left[\frac{\mu b^2}{2\sigma^2(1-\mu^2)} \right] \quad (2.8)$$

$$w(\varphi) = \frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{2\pi[1 - \mu \cos 2(\varphi - \theta)]} \quad (2.9)$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Разумеется, распределения (2.8), (2.9) существуют лишь при $\mu < 1$ (ср. с условием (2.2)). Вычислив согласно (2.8) среднее значение $\langle b^2 \rangle$ квадрата амплитуды по формуле

$$\langle b^2 \rangle = \int_0^\infty b^2 p(b) db$$

(см. [7]), получим, как и следовало ожидать, $\langle b^2 \rangle = 2\sigma^2$.

Покажем как исследуется система с одной степенью свободы, если случайное воздействие $y(t)$ является узкополосным. Будем считать его сформированным из широкополосного процесса $\xi(t)$ при помощи фильтра второго порядка. Соответственно рассматриваем уравнения

$$x'' + 2\alpha x' + \Omega^2 x (1 + \lambda \sin 2vt) = y, \quad y'' + 2\beta y' + \omega_0^2 y = \xi(t), \quad \omega_0 \approx \nu, \quad \beta \ll \omega_0 \quad (2.10)$$

Воспользовавшись заменой переменных (1.3) и положив, кроме того $y(t) = y_c(t) \cos vt + y_s(t) \sin vt, y'(t) = \nu[-y_c(t) \sin vt + y_s(t) \cos vt]$ (2.11)

получим после усреднения по методу Крылова — Боголюбова систему четырех укороченных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= -\alpha(1-2r)x_c - \alpha\delta x_s - y_s/2\nu \\ \dot{x}_s &= -\alpha(1+2r)x_s + \alpha\delta x_c + y_c/2\nu \\ \dot{y}_c &= -\beta y_c + \eta_c(t), \quad \dot{y}_s = -\beta y_s + \eta_s(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Стационарная совместная плотность вероятности процессов $x_c(t)$, $x_s(t)$, определяемых системой уравнений (2.12), по-прежнему дается зависимостью (2.3), но выражения для постоянных Q_{cc} , Q_{ss} , Q_{cs} будут

$$\begin{aligned} Q_{cc}, Q_{ss} &= D\rho_1^{-1}[(1+\beta_1)(1+\delta^2)+4r^2 \pm 2r(2+\beta_1)] \\ Q_{cs} &= 2D\rho_1^{-1}r\delta(2+\beta_1), \quad \beta_1 = \beta/\alpha \\ \rho_1 &= 8\nu^2\alpha^3\beta_1(1+\delta^2-4r^2)[\delta^2-4r^2+(1+\beta_1)^2] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Одномерные плотности вероятности $p(b)$, $w(\varphi)$ в случае узкополосного возбуждения также будут определяться выражениями (2.8), (2.9), если в них заменить параметры μ и σ^2 на величины

$$\mu_1 = \mu(2+\beta_1)/(1+\beta_1+\mu^2), \quad \sigma_1^2 = D\rho_1^{-1}[(1+\beta_1)(1+\delta^2)+4r^2] \quad (2.14)$$

При $\mu < 1$ всегда будет $\mu_1 \geq \mu$ ($\mu_1 \rightarrow \mu$ при $\beta/\alpha \rightarrow \infty$). Отсюда видно, в частности, что согласно (2.8), (2.9), (2.14) уменьшение ширины спектра возбуждения в системе (2.10) приводит к возрастанию степени неравномерности распределения фазы и (при фиксированном σ_0) к увеличению среднего квадрата амплитуды.

3. Рассмотрим суммарный комбинационный резонанс в системе с двумя степенями свободы с широкополосными внешними случайными возмущениями. Воспользовавшись в уравнениях (1.2) заменой переменных (1.4) ($n=2$, $i=1$, $j=2$), после применения метода Крылова — Боголюбова получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1c} &= -\Delta x_{1s} - \alpha_{11}x_{1c} + 1/4\lambda_{12}[\Omega_1^2/(2\nu - \Omega_2)]x_{2c} + \eta_{1c}(t) \\ \dot{x}_{1s} &= \Delta x_{1c} - \alpha_{11}x_{1s} - 1/4\lambda_{12}[\Omega_1^2/(2\nu - \Omega_2)]x_{2s} + \eta_{1s}(t) \\ \dot{x}_{2c} &= -\alpha_{22}x_{2c} + 1/4\lambda_{21}\Omega_2 x_{1c} + \eta_{2c}(t), \quad \dot{x}_{2s} = -\alpha_{22}x_{2s} - 1/4\lambda_{21}\Omega_2 x_{1s} + \eta_{2s}(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где случайные возмущения η являются некоррелированными процессами типа белого шума; интенсивности шумов η_{1c} , η_{1s} одинаковы и равны

$$D_1 = \pi\Phi_{\xi_{1i}}(2\nu - \Omega_2)/(2\nu - \Omega_2)^2 \approx \pi\Phi_{\xi_{1i}}(\Omega_1)/\Omega_1^2$$

а интенсивности шумов η_{2c} , η_{2s} одинаковы и равны $D_2 = \pi\Phi_{\xi_{2i}}(\Omega_2)/\Omega_2^2$.

Из решения системы уравнений (3.1) можно получить аналитические выражения для моментов процессов x_{ic} , x_{is} ($i=1, 2$), хотя эти выражения получаются достаточно громоздкими. Приведем в качестве примера формулы для дисперсий этих процессов в частном случае $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} \langle x_{ic}^2 \rangle = \langle x_{is}^2 \rangle &= \frac{1/2 D_i}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} \left[1 + \frac{\alpha_{ii}^2 + \gamma_{ij}^2 D_j / D_i}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} \right] \quad (i=1, 2; j=3-i) \\ \gamma_{12} &= 1/4\lambda_{12}[\Omega_1^2/(2\nu - \Omega_2)] \approx 1/4\lambda_{12}\Omega_1, \quad \gamma_{21} = 1/4\lambda_{21}\Omega_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

По зависимостям (3.2) можно рассчитывать средние за период значения дисперсий $s_{ji}^2 \langle x_i^2 \rangle = 1/2 s_{ji}^2 (\langle x_{is}^2 \rangle + \langle x_{ic}^2 \rangle)$ высокочастотной ($i=2$) и низкочастотной ($i=1$) компонент исходных процессов z_j ($j=1, 2$).

4. Воспользуемся полученными результатами для решения некоторых задач идентификации колебательных систем с периодическим параметрическим возбуждением на основании статистического анализа процессов $x(t)$ или $z(t)$. Задачи 1, 2, 4, 5 относятся к системе с одной степенью свободы либо к такой системе, в которой нет близких между собой собствен-

ных частот Ω , и при анализе системы, возбуждаемой в окрестности одного из основных параметрических резонансов, взаимодействием между колебаниями по различным степеням свободы можно пренебречь. Задача 3 рассматривается для системы с двумя степенями свободы. Во всех задачах случайные возмущения предполагаются широкополосными.

1. *Обнаружение периодического возбуждения.* Выражение (2.9) вместе с известным [8] выражением для $w(\varphi)$ в случае суммы гауссовского случайного процесса и синусоидального сигнала показывает, что необходимым и достаточным признаком наличия периодического возбуждения ($\lambda \neq 0$) является неравномерность распределения фазы на интервале $[0, 2\pi)$.

2. *Различение систем с параметрическим и с внешним периодическим возбуждением.* Как видно из (2.9), функция $w(\varphi)$ в первом случае имеет два максимума на интервале $[0, 2\pi)$; во втором случае, как известно, максимум будет только один [8]. Этот критерий был предложен в работах [9, 10].

3. *Обнаружение комбинационного резонанса:* проверка гипотезы о том, что в системе (1.4) с $n=2$ ($i=1, j=2$) хотя бы один из параметров $\lambda_{12}, \lambda_{21}$ отличен от нуля, против альтернативы $\lambda_{12}=\lambda_{21}=0$. Анализ соотношений, приведенных в п.3, показывает, что признаком наличия комбинационного резонанса является отличие от нуля коэффициента корреляции центрированных составляющих амплитуд процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (или амплитуд низкочастотной и высокочастотной компонент измеряемой в эксперименте линейной комбинации этих процессов — скажем, компонент процесса $z=Sx$).

Задачи 1–3 можно назвать задачами качественной идентификации. Ниже приводятся две задачи идентификации, которые можно назвать «полукачественными»: они состоят в оценке тех или иных количественных показателей для принятой модели наблюдаемой системы, но не связаны с необходимостью полной оценки всех ее параметров.

4. *Оценка запаса устойчивости.* Пусть наблюдается движение системы с неизвестными параметрами a_1, a_2, \dots, a_p , вызванное действием «естественных» широкополосных случайных возмущений при нормальном функционировании системы. Пусть условие надежного функционирования системы (скажем, условие ее устойчивости) в пространстве параметров a_k имеет вид $F(a_1, \dots, a_p) > 0$. Требуется оценить величину F , которую можно рассматривать как показатель запаса устойчивости системы, на основании статистического анализа колебательных процессов. Такая характеристика может использоваться для сравнительного анализа запаса устойчивости различных систем (например, для оценки влияния тех или иных конструктивных изменений на степень близости машины или конструкции к границе области устойчивости); на основании опыта практической эксплуатации могут задаваться и количественные нормативные значения запаса устойчивости. Наконец, запас устойчивости во многих случаях характеризует также степень чувствительности системы к различного рода возмущениям и поэтому может служить показателем качества функционирования. Интересный пример в этом отношении представляет работа [11], где установлена четкая связь между запасом устойчивости дисковых пил (по скорости вращения) и качеством работы (точностью распила).

Для системы (1.2) (при $n=1$) условие устойчивости имеет вид $\mu < 1$ (см. (2.2)) и можно положить $F=1-\mu$, хотя, как будет видно из дальнейшего, в качестве запаса устойчивости лучше рассматривать величину $F=1-\mu^2$. Из выражения (2.9) видно, что параметр μ можно оценить по известной из эксперимента реализации узкополосного процесса $x(t)$ (не

определяя при этом все параметры системы) как коэффициент неравномерности фазы $\varphi(t)$ этого процесса

$$\mu = (w_{\max} - w_{\min}) / (w_{\max} + w_{\min}) \quad (4.1)$$

Здесь w_{\max} , w_{\min} — соответственно максимальное и минимальное значения функции $w(\varphi)$ на интервале $[0, 2\pi)$.

5. *Оценка уровня параметрического усиления.* Эта задача представляет собой один из частных вариантов задачи о «разделении источников вибраций», которая формулируется следующим образом: на основании анализа колебательных процессов оценить степень влияния на эти процессы каждого из нескольких источников возбуждения. В системе (1.2) ($n=1$) влияние источника $\sin 2vt$ зависит от влияния источника $\xi(t)$, причем в случае $\xi(t) \equiv 0$ в системе вообще нет никаких колебаний. Поэтому задачу о «разделении источников» поставим так: на основании измерений процесса $x(t)$ определить тот уровень вибраций, который имел бы место в системе при отсутствии параметрического возбуждения ($\lambda=0$).

Решение задачи дает формула (2.6), которую можно также переписать в виде

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 (1 - \mu^2), \quad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 1/2 \langle b^2 \rangle \quad (4.2)$$

где $\langle x^2 \rangle$ — среднее за период значение дисперсии процесса $x(t)$. Параметр μ можно оценить опять-таки при помощи формулы (4.1).

Возможен и другой путь, не связанный с измерением плотности вероятности фазы и основанный на определении плотности вероятности $w(y)$ квадрата амплитуды $y=b^2$ процесса $x(t)$. В соответствии с известными [8] правилами нахождения плотности вероятности функции от случайной величины из (2.8) получаем

$$w(y) = [(1 - \mu^2)^{1/2} / 2\sigma_0^2] \exp(-y/2\sigma_0^2) I_0(\mu y/2\sigma_0^2) \quad (4.3)$$

Отсюда находим

$$\frac{d}{dy} (\ln w) |_{y=0} = -\frac{1}{2\sigma_0^2} \quad (4.4)$$

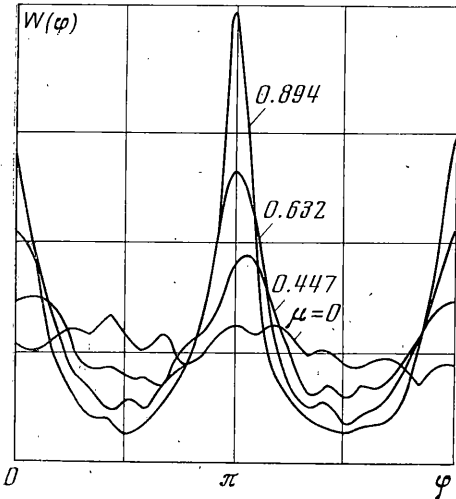
так что величину σ_0^2 можно оценить по угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $\ln w(y)$ в точке $y=0$. Этот способ, разумеется, является более грубым и должен рассматриваться как вспомогательный. Однако он имеет и два преимущества: допускает более простую реализацию на аналоговой аппаратуре (без обращения к ЭЦВМ) и должен давать более точные результаты в тех случаях, когда частота параметрического возбуждения может флуктуировать в процессе эксперимента, причем этот возмущающий процесс недоступен для измерений.

Полученный результат может применяться на практике для оценки эффективности таких мер по снижению вибраций систем (например, изгибных колебаний трубопровода с периодическими пульсациями расхода жидкости), которые устраняют источник параметрического возбуждения.

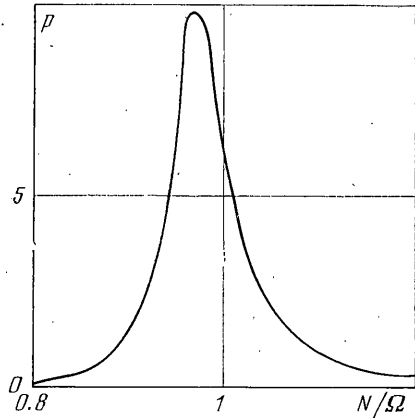
5. Для проверки предложенных методов идентификации была проведена серия численных экспериментов. Дифференциальное уравнение (1.2) при $n=1$, $\alpha/\Omega=0.02$ интегрировалось численно на ЭЦВМ БЭСМ-3М и М-220 методом Рунге — Кутты с шагом $\Delta t' = 0.2$ ($t' = \Omega t / 2\pi$) при значениях $\xi(t)$, задававшихся датчиком случайных чисел. Статистические характеристики установленного узкополосного процесса $x(t)$, его огибающей $b(t)$ и фазы $\varphi(t)$ определялись на основании анализа участка реализации, содержащего около 3000 периодов $x(t)$.

На фиг. 1 приведены типичные кривые $w(\varphi)$, полученные при $\nu = \Omega$ и различных μ . Фаза $\varphi(t)$ измерялась относительно «опорного сигнала» $\sin 2vt$ (при этом, разумеется, точки максимумов этого сигнала выбирались через одну), а плотность вероятности $w(\varphi)$ нормировалась на интервале $[0, 2\pi)$. По результатам первых расчетов в подпрограмму выделения огибающей и фазы была внесена поправка:

если сдвиг по оси времени t' между двумя последовательными максимумами x составлял менее $2\pi/7\omega$, то в массив значений огибающей и фазы вносились лишь значения, соответствующие первому максимуму. Таким образом «сложный цикл» процесса $x(t)$, содержащий положительные минимальные и отрицательные максимальные значения x (подобные циклы иногда появлялись при малых амплитудах), рассматривался как один период. Это «сглаживание» позволило повысить точность статистических оценок. Во всех случаях при $\lambda \neq 0$ получались кривые $w(\varphi)$, имевшие по одному четко выраженному максимуму в каждом из интервалов $[0, \pi)$ и $[\pi, 2\pi)$. Некоторые различия между экспериментальными значениями $w(\varphi)$ и $w(\varphi+\pi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$) объясняются тем, что для совпадения двух участков кривой $w(\varphi)$ необходимо набрать достаточно большую статистику «переворотов» фазы, т.е. переходов значений $\varphi(t)$ из $[0, \pi)$ в $[\pi, 2\pi)$ и обратно, а математическое ожидание времени до такого перехода, вообще говоря, в несколько раз больше времен корр-



Фиг. 1



Фиг. 2

ляции амплитуды и фазы. Для рассматриваемой системы, однако, такое различие несущественно: согласно (2.9) значения $w(\varphi)$ и $w(\varphi+\pi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$) можно отождествить (подобно тому, как согласно программе статистической обработки фазам $\varphi \geq 2\pi$ и $\varphi < 0$ приписывались значения $\varphi \pm 2k\pi$, где k — наибольшая целая часть величины $\varphi/2\pi$). Поэтому параметр μ оценивался согласно формуле (4.1) по полусумме кривых $w(\varphi)$ и $w(\varphi+\pi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$).

Результаты численных экспериментов представлены в таблице. Здесь во втором столбце указаны значения μ , задававшиеся при численном интегрировании. Через σ^2 обозначена оценка дисперсии процесса $x(t)$, вычисленная по его реализации, а величина $\langle b^2 \rangle$ вычислялась по огибающей процесса. Видно, что различия в оценках σ^2 и $1/2 \langle b^2 \rangle$ всюду получились небольшими. Через $\mu_{(\varphi)}$ обозначена статистическая оценка μ по экспериментальной кривой $w(\varphi)$ согласно формуле (4.1). Наконец, $\sigma_{\sigma^2(\varphi)}$ и $\sigma_{\sigma^2(y)}$ — это экспериментальные оценки величины σ_{σ^2} , вычисленные соответственно по формулам (4.2) и (4.4), причем в (4.2) подставлялись значения σ^2 и $\mu_{(\varphi)}$, приведенные в таблице, а «касательная» к кривой $\ln w$ проводилась через точки $\ln w(y_1)$, y_1 и $1/2 [\ln w(y_2) + \ln w(y_3)]$, $1/2 (y_2 + y_3)$ (индексы указывают номер подынтервалов оси y , использовавшихся при построении гистограммы $w(y)$). Истинное значение σ_{σ^2} , задававшееся при численном интегрировании, составляло $\sigma_{\sigma^2}^2 = 12.5$, а экспериментальная оценка $\sigma_{\sigma^2}^2$ указана в первой строке таблицы ($\sigma_{\sigma^2}^2 = \sigma^2 |_{\mu=0} = 12.325$); в пределах точности метода Крылова — Боголюбова это значение должно быть одинаковым для всех вариантов расчета, представленных в таблице.

Анализ результатов численного эксперимента указывает на удовлетворительную точность оценки параметра μ по степени «неравномерности» плотности вероятности фазы — во всяком случае, если величина μ не настолько мала, что эта степень неравномерности оказывается сопоставимой с уровнем статистического разброса значений $w(\varphi)$. Максимальная относительная погрешность оценки μ лишь в одном из вариантов составила 14.6%, а во всех остальных вариантах была менее 10%. Оценки σ_{σ^2} в основном получились удовлетворительными, хотя в непосредственной близости от границы области устойчивости ($\mu = 0.894$, $1 - \mu^2 = 0.2$) наблюдается рост относи-

δ	μ	σ^2	$1/2 \langle b^2 \rangle$	$\mu_{(\varphi)}$	$\sigma_{0(\varphi)}^2$	$\sigma_{0(y)}^2$
0	0	12.325	12.011			12.0
0	0.447	14.824	14.354	0.437	11.993	17.2
0	0.632	23.264	22.769	0.692	12.114	12.9
0	0.894	45.334	44.619	0.863	11.570	12.3
-1	0.447	17.048	16.700	0.485	13.035	12.5
-1	0.632	21.017	20.590	0.643	12.322	13.3
-1	0.894	70.105	68.177	0.862	18.014	11.5
-2	0.447	15.126	14.616	0.421	12.445	12.9
-2	0.632	20.175	19.407	0.538	14.331	13.2
-2	0.894	53.792	51.566	0.832	16.556	13.3

тельной погрешности этой оценки (компонента этой погрешности, связанная с относительной ошибкой в оценке $\mu_{(\varphi)}$, пропорциональна величине $2\mu_{(\varphi)}/[1-\mu_{(\varphi)}^2]$, что, однако, не очень существенно, поскольку в области близких к единице значений μ изложенная методика в целом четко указывает на значительное (в несколько раз) параметрическое усиление уровня внешних возмущений, а следовательно, на целесообразность конструктивных мер по устранению этого усиления в целях борьбы с вибрациями.

Отметим, что программа статистической обработки узкополосных случайных процессов включала вычисление плотности вероятности $p(N/\Omega)$ безразмерной «мгновенной частоты» $(t_{m+1}' - t_m')^{-1}$, где t_m' — точки максимумов процесса $x(t')$. Как и следовало ожидать, кривые $p(N/\Omega)$ были сильно «затянуты» в область больших значений N , и всегда выполнялось неравенство $\langle N \rangle > \nu$. Однако максимум величины $p(N/\Omega)$ всегда достигался при $N/\Omega = \nu/\Omega$ (см. типичную кривую на фиг. 2, построенную при $\nu/\Omega = 0.96$, $\mu = 0.894$). Это означает, что если опорный сигнал $\sin 2\nu t$ недостаточен для измерений и его частота заранее неизвестна, то можно определять плотность вероятности фазы $w(\varphi)$ на основании анализа одного лишь процесса $x(t)$, оценив величину ν как наиболее вероятное значение мгновенной частоты колебаний.

Поступила 2 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
2. Диментберг М. Ф. Колебания линейной системы с периодическим параметрическим и внешним случайным возбуждением. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 2.
3. Бологин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
4. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
6. Хасьминский Р. З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью. Теория вероятностей и ее применения. 1966, т. 11, № 3.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
8. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1. М., «Сов. радио», 1966.
9. Горбунов А. А., Диментберг М. Ф. Некоторые задачи диагностики для колебательной системы с периодическим параметрическим возбуждением. Изв. АН СССР. МТТ, 1974. № 2.
10. Dimentberg M. F. Response of a non-linear damped oscillator to combined periodic parametric and random external excitation. Internat. J. Non-linear Mech., 1976, vol. 11, No. 1.
11. Mote C. D., Holroyd S. Confirmation of the critical speed stability theory for symmetrical circular saws. Trans. ASME. Ser. B. J. Engng Industry, 1975, vol. 97, No. 3.