

АВТОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ  
С СУХИМ ТРЕНИЕМ И С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

А. А. АЛИФОВ, К. В. ФРОЛОВ

(Москва)

Впервые взаимодействие автоколебательной системы с источником энергии изучалось в трудах В. О. Кононенко [1, 2] в предположении, что жесткость колебательной системы не зависит от источника. Однако в ряде технических приложений жесткость автоколебательной системы не является постоянной и изменяется во времени. Такие примеры рассматривались в работах [3-5] в предположении, что мощность источника энергии ограничена.

Предлагаемая работа посвящена дальнейшему развитию теории автоколебательных систем с источником энергии. Рассматривается автопараметрическая колебательная система сначала с одной, а затем с несколькими массами в предположении, что жесткость системы не является величиной постоянной.

1. Рассмотрим широко известную модель фрикционной автоколебательной системы с непрерывно движущейся лентой со скоростью  $V=r\dot{\varphi}$ , где  $\varphi$  — угол вращения ротора двигателя (фиг. 1). Движение ленты осуществляется за счет двигателя с известной заранее характеристикой  $L=L(\dot{\varphi})$  зависимости момента  $L$  от скорости вращения  $\dot{\varphi}$ . В систему включены линейные демпферы с коэффициентами демпфирования  $k_1, \dots, k_n$ , а также демпферы сухого трения с коэффициентами трения  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ .

Предполагается, что жесткости системы изменяются по периодическому закону  $c_i(\varphi) = c_i + b_i \cos \varphi$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), где  $c_i, b_i$  — постоянные, причем величины  $b_i$  — малые.

Сила трения, возникающая между массой  $m_n$  и лентой, аппроксимируется представленной на фиг. 2 функцией [6]:

$$T(U_n) = q(\operatorname{sgn} U_n - \alpha_1 U_n + \alpha_3 U_n^3), \quad U_n = V - \dot{x}_n$$

Здесь  $q, \alpha_1, \alpha_3$  — положительные постоянные; множитель  $q$  в данном случае равен:  $q = m_n g f$ ;  $f$  — коэффициент сухого трения.

Задачу будем рассматривать при условии  $V > \dot{x}_n$ ,  $V > 0$ .

Уравнения движения автоколебательной системы с одной массой имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + b_1 \cos \varphi) x_1 = -k_1 \dot{x}_1 - \vartheta_1 \frac{\dot{x}_1}{|x_1|} + T(U_1)$$

$$I\ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - H_0(\varphi) - rT(U_1) \quad (1.1)$$

Здесь  $I$  — суммарный момент инерции вращающихся частей;  $L(\dot{\varphi})$  и  $H_0(\varphi)$  — непрерывные, медленно изменяющиеся функции, описывающие соответственно движущий момент источника и момент сил сопротивления вращению, приведенные к оси вращения ротора;  $r$  — радиус шкива, приводящего в движение ленту.

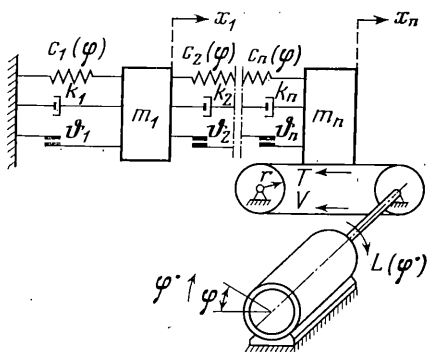
Используя предположения, принятые в работе [1], а также то, что величины  $k_1, \vartheta_1$  малые, в систему (1.1) вводим малый параметр  $\varepsilon$ . При этих предположениях уравнения (1.1) примут вид

$$x_1'' + \omega_1^2 x_1 = \frac{\varepsilon}{m_1} \left[ -b_1 x_1 \cos \varphi - k_1 \dot{x}_1 - \vartheta_1 \frac{\dot{x}_1}{|x_1|} + T(U_1) \right]$$

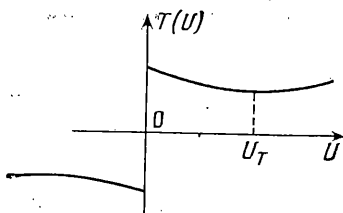
$$\varphi'' = \frac{\varepsilon}{I} [M(\varphi) - rT(U_1)] \quad (1.2)$$

$$\omega_1^2 = c_1/m_1, \quad M(\varphi) = L(\varphi) - H_0[\varphi]$$

Так как параметрическая система активно взаимодействует с источником энергии в области основного параметрического резонанса, будем рас-



Фиг. 1



Фиг. 2

считать движения в области, где расстройка  $\omega_1 - 1/2\varphi'$  имеет порядок  $\varepsilon$ . Следуя методу теории возмущений [7], при помощи замены переменных

$$x_1 = A \cos \psi, \quad \dot{x}_1 = -A\omega_1 \sin \psi, \quad \varphi' = \Theta, \quad \psi = 1/2\varphi + \Xi$$

приводим систему (1.2) к стандартной форме

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_1 m_1} \left\{ -b_1 A \cos \psi \cos \varphi + k_1 \omega_1 A \sin \psi + \vartheta_1 \frac{\omega_1 A \sin \psi}{|-\omega_1 A \sin \psi|} + T[(r\Theta + \omega_1 A \sin \psi)] \right\} \sin \psi$$

$$\frac{d\Xi}{dt} = \omega_1 - \frac{\Theta}{2} - \frac{\varepsilon}{\omega_1 m_1 A} \left\{ -b_1 A \cos \psi \cos \varphi + k_1 \omega_1 A \sin \psi + \vartheta_1 \frac{\omega_1 A \sin \psi}{|-\omega_1 A \sin \psi|} + T[(r\Theta + \omega_1 A \sin \psi)] \right\} \cos \psi$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{I} \{ M(\Theta) - rT[(r\Theta + \omega_1 A \sin \psi)] \} \quad (1.3)$$

решение которой в первом приближении ищем в виде

$$A = a + \varepsilon u_1, \quad \Xi = \xi + \varepsilon u_2, \quad \Theta = \Omega + \varepsilon u_3 \quad (1.4)$$

Здесь  $a, \xi, \Omega$  — медленно изменяющиеся значения искомых переменных, которые составляют главную часть решения;  $\varepsilon u_1, \varepsilon u_2, \varepsilon u_3$  — малые вибрационные члены.

Для определения  $a$ ,  $\xi$  и  $\Omega$  усредняем (1.3) с учетом замены  $u = \Omega r$ ,  $A_1 = \omega_1 a$ .

Усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\varepsilon r}{I} \left[ M \left( \frac{u}{r} \right) - rT(u) - \frac{3}{2} r \alpha_3 q u A_1^2 \right], \\ \frac{dA_1}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2m_1} \left[ -\frac{b_1 A_1}{2\omega_1} \sin 2\xi + k_1 A_1 + \frac{4\vartheta_1}{\pi} + q A_1 \left( 3\alpha_3 u^2 - \alpha_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 A_1^2 \right) \right] \\ \frac{d\xi}{dt} &= \omega_1 - \frac{\dot{u}}{2r} + \frac{\varepsilon b_1}{4\omega_1 m_1} \cos 2\xi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $4\vartheta_1/\pi$  определено в предположении, что  $A_1 > 0$ . Для стационарного движения имеем

$$\begin{aligned} M(u/r) - rT(u) - \frac{3}{2} r \alpha_3 q u A_1^2 = 0 \\ -\frac{1}{2} b_1 A_1 \omega_1^{-1} \sin 2\xi + k_1 A_1 + \frac{4\vartheta_1}{\pi} + q A_1 (3\alpha_3 u^2 - \alpha_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 A_1^2) = 0 \\ \omega_1^{-1} \dot{u} r^{-1} + b_1 (4\omega_1 m_1)^{-1} \cos 2\xi = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из последних двух уравнений (1.6) для амплитуды и фазы автопараметрических колебаний имеем соотношения

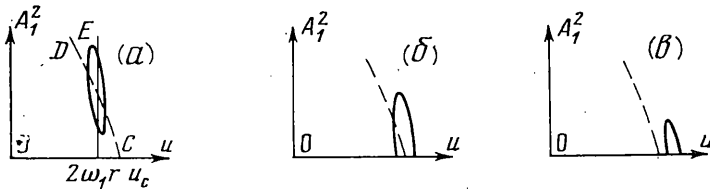
$$\begin{aligned} A_1^3 - H(u) A_1 + B = 0 \quad (1.7) \\ \operatorname{tg} 2\xi = \frac{3\alpha_3 q r [A_1^3 - 4(u_0^2 - u^2) A_1 + B]}{4m_1 A_1 (u - 2\omega_1 r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(u) &= 4 \{ u_0^2 - u^2 \pm b_1 (6\alpha_3 q \omega_1)^{-1} [1 - 4\omega_1^2 m_1^2 b_1^{-2} r^{-2} (u - 2\omega_1 r)^2]^{1/2} \} \\ B &= 16\vartheta_1 (3\alpha_3 q \pi)^{-1}, \quad u_0^2 = (\alpha_1 q - k) (3\alpha_3 q)^{-1} \end{aligned}$$

Из (1.7) следует, что фаза автопараметрических колебаний зависит от амплитуды колебаний и скорости источника.

Как видно из первых уравнений (1.6) и (1.7), значение скорости  $u$  не может быть выбрано произвольно. Стационарные значения скорости зависят от характеристики источника энергии, амплитуды колебания и демпфирующих элементов.

Уравнение для определения амплитуды колебаний решаем графически, и искомые значения амплитуды находим как точки пересечения графиков функций  $f_1(A_1) = B + A_1^3$ ,  $f_2(A_1) = H(u) A_1$ .

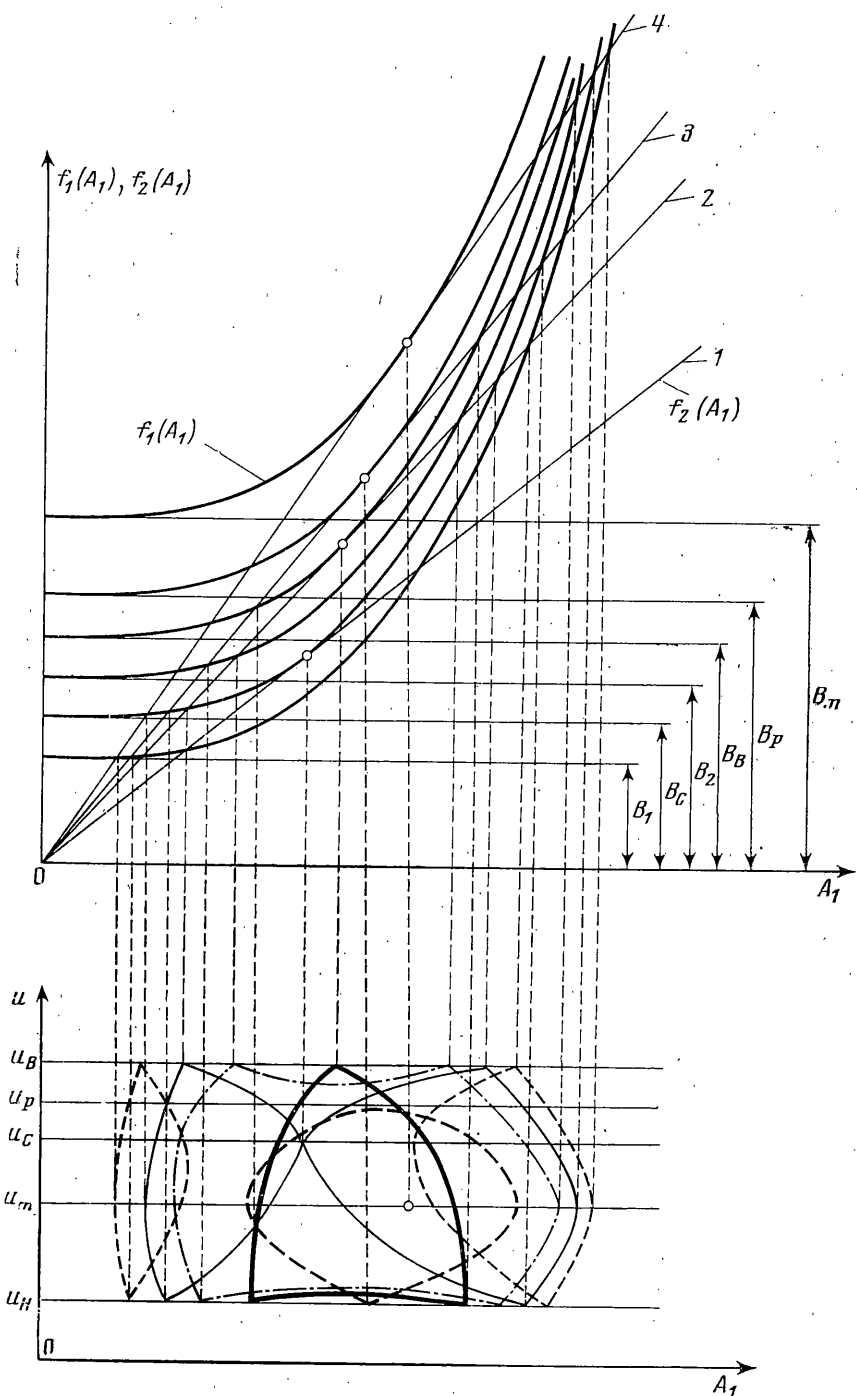


Фиг. 3

Резонансная кривая автопараметрической системы, построенная по первому уравнению (1.7) без учета демпфера сухого трения ( $\vartheta_1 = 0$ ), представлена на фиг. 3. Отметим, что в зависимости от параметров системы и глубины модуляции резонансные кривые могут располагаться (это следует из первого уравнения (1.7)) по-разному (на фиг. 3 показаны три возможных варианта) относительно скелетной линии, которая описывается функцией

$$f(u) = u_0^2 - u^2 \quad (1.8)$$

и соответствует «чистым» автоколебаниям в системе.



Фиг. 4

Из фиг. 3 видно, что резонансные кривые имеют наклон в левую сторону, что обусловлено характером скелетной линии  $DC$ . А также вершина резонансной кривой (точка  $E$ ) смещена влево от вертикальной линии, проведенной через точку, определяемую выражением  $u=2\omega_1 r$ , и соответствующей «чистому» резонансу.

Значение скорости, при которой имеется  $T_{\min}$  и скелетная функция обращается в нуль (точка  $C$ ), определяется из выражения

$$U_T = u_C = (\alpha_1 / 3\alpha_3)^{1/2} \quad (1.9)$$

Следует отметить, что наличие линейного демпфера сдвигает точку  $C$  в левую сторону и при этом значения скорости  $U_T$  для определения  $T_{\min}$  и положения точки  $C$  скелетной функции не совпадают, и имеет место  $u_C = u_0 < U_T$ .

Существенное влияние на характер резонансной кривой оказывает демпфер сухого трения. Графическое решение (фиг. 4) уравнения (1.7) позволяет установить резонансную картину системы с демпфером сухого трения. Из (1.7) следует, что для вещественности амплитуды должны быть выполнены неравенства

$$u_H \leq u \leq u_B \quad (1.10)$$

Здесь  $u_H$  и  $u_B$  являются нижними и верхними границами ( $\varphi_1 = 0$ ) скорости и определяются из выражений

$$u_H = 2\omega_1 r^{-1/2} b_1 r (\omega_1 m_1)^{-1}, \quad u_B = 2\omega_1 r^{1/2} b_1 r (\omega_1 m_1)^{-1}$$

Кроме того, из условия  $A_1 > 0$  вытекает условие  $H(u) > 0$ , причем так как функция  $H(u)$  определяет собой переменный наклон функции  $f_2(A_1)$ , то из условия вещественности и конечности амплитуды также следует

$$H_{\min}(u) \leq H(u) \leq H_{\max}(u) \quad (1.11)$$

Из условия экстремума функции  $H(u)$  получаем следующее уравнение:

$$u^4 - \gamma_3 u^3 + \gamma_2 u^2 - \gamma_1 u + \gamma_0 = 0 \quad (1.12)$$

$$\gamma_0 = \omega_1^2 m_1^2 r^2 (3\alpha_3 q r)^{-2}, \quad \gamma_1 = \omega_1 r m_1^2 (3\alpha_3 q r)^{-2}$$

$$\gamma_2 = \frac{m_1^2}{4(3\alpha_3 q r)^2} \left[ 1 - \frac{(3\alpha_3 q r^2)^2}{\omega_1^2 m_1^4} (b_1^2 - 16\omega_1^4 m_1^2) \right], \quad \gamma_3 = 4\omega_1 r$$

корни которого подставляем в выражение  $H(u)$  и находим  $H_{\min}(u)$  и  $H_{\max}(u)$ . При этом функции  $f_2(A_1)$  с наклонами  $H(u)$ , соответствующими различным значениям скорости, образуют семейство и располагаются внутри сектора, границы которого определяются неравенствами (1.11).

Теперь, чтобы проследить эволюцию резонансных кривых в зависимости от  $\varphi_1$  (для достаточно общего случая фиг. 3, а), предположим, что определены  $H_{\min}(u)$  и  $H_{\max}(u)$  и пусть этим значениям наклонов соответствуют прямые 1 и 4 соответственно на фиг. 4, и известно  $B_C$ , соответствующее определенному значению  $\varphi_1$ . Далее, пусть прямые 2 и 3 соответствуют наклонам  $H_B(u_B)$  и  $H_H(u_H)$ , которые определяются из выражений

$$H_H(u_H) = 4(u_0^2 - u_H^2), \quad H_B(u_B) = 4(u_0^2 - u_B^2) \quad (1.13)$$

Так как  $u_H < u_B$ , то  $H_H(u_H) > H_B(u_B)$ .

С увеличением значения скорости (при неизменном  $B_C$ ) прямая  $f_2(A_1)$  от положения 3 ( $u = u_H$ ) начнет вращаться против часовой стрелки при положительном знаке перед корнем в уравнении (1.7) и по часовой стрелке при отрицательном знаке перед корнем. Граничными положениями прямой  $f_2(A_1)$  с наклонами  $H(u)$  являются прямая 4 при  $u = u_m$  и прямая 1 при  $u = u_C$ . Дальнейшее изменение скорости приведет к тому, что вращение прямой  $f_2(A_1)$  от положений 4 и 1 будет происходить по часовой стрелке при положительном корне в уравнении (1.7) и против часовой стрелки при отрицательном корне соответственно. При  $u = u_B$  прямая  $f_2(A_1)$  совпадет с прямой, которая занимает положение 2. Таким образом, резонансная кривая примет вид, показанный тонкими сплошны-

ми линиями. Как видно, она состоит из двух замкнутых кривых, имеющих одну точку касания, т. е. имеет место два совпавших корня (1.7).

Теперь рассмотрим влияние  $B$  (т. е.  $\vartheta_1$ ) на характер резонансных кривых. При  $0 < B_1 < B_c$  резонансная кривая состоит из двух замкнутых кривых (тонкие штриховые линии). При  $B_c < B_2 < B_B$  резонансная кривая состоит из одной замкнутой кривой (тонкие штрихпунктирные линии).

При дальнейшем возрастании  $B$  резонансная кривая приобретает при  $B = B_B$  вид, показанный сплошной жирной линией, а затем при  $B = B_p$  вид, показанный жирной штриховой линией. При  $B = B_m$  резонансная кривая стягивается в точку.

Из условия равенства производных функций  $f_1(A_1)$  и  $f_2(A_1)$  в точке их касания получаем следующее уравнение для определения значений скорости, при которых имеются два совпавших корня уравнения (1.7):

$$u^4 + \rho_2 u^2 - \rho_1 u + \rho_0 = 0 \quad (1.14)$$

$$\rho_0 = \sqrt[4]{16} [\rho^2 + r^2 h^2 (16 \omega_1^4 m_1^2 - b_1^2)], \quad \rho_1 = r m_1^2 h^2 \omega_1^3, \quad \rho_2 = \sqrt[4]{4} (2\rho + \omega_1^2 m_1^2 h^2) \\ h = 2(3\alpha_3 q \omega_1 r)^{-1}, \quad \rho = \eta_{1,2} - 4u_0^2, \quad \eta_1 = 3(B^2/4)^{1/2}, \quad \eta_2 = \sqrt[3]{2}(B^2/2)^{1/2}$$

Уравнение (1.14) позволяет найти значение  $\vartheta_{1*}$ , при котором резонансная кривая стягивается в точку. Для определения  $\vartheta_{1*}$  предположим, что из (1.12) найдено значение скорости  $u_m$ , соответствующее  $H_{\max}(u)$ . Подставив  $u_m$  в (1.14) и считая  $B$  (т. е.  $\vartheta_1$ ) неизвестным, находим

$$\vartheta_{1*} = \alpha_3 q \pi (\eta_0^3/3)^{1/2}, \quad \eta_0 = u_0^2 - u_m^2 \pm (\rho_1 u_m - \kappa_1 u_m^2 - \kappa_2)^{1/2} \\ \kappa_1 = \sqrt[4]{4} \omega_1^2 m_1^2 h^2, \quad \kappa_2 = \sqrt[4]{16} r^2 h^2 (16 \omega_1^4 m_1^2 - b_1^2) \quad (1.15)$$

Амплитуда колебаний при этом равна

$$A_1^* = (B_*/2)^{1/2}, \quad B_* = 16\vartheta_{1*} (3\alpha_3 q \pi)^{-1} \quad (1.16)$$

Таким образом, при  $\vartheta_1 > \vartheta_{1*}$  уравнение (1.7) не будет иметь действительного решения, удовлетворяющего условию  $A_1 > 0$ . Этот результат позволяет сделать следующий практически важный вывод, что при помощи демпфера сухого трения возможно устранение нежелательных стационарных, резонансных автопараметрических колебаний на половинной частоте источника возбуждения.

Для анализа устойчивости стационарных режимов колебаний рассмотрим устойчивость стационарных решений уравнений (1.6). Пользуясь критериями Рауса — Гурвица, получим критерии устойчивости в виде

$$N - F_1 - \frac{IF_3}{4\pi m_1 r A_1} - \frac{I b_1 F_2}{2m_1 \omega_1 r} < 0 \quad (1.17) \\ b_1 F_2 F_3 \left[ N - F_1 + \frac{r\pi (6\alpha_3 q u)^2 A_1^3}{F_3} + \frac{12\pi \omega_1 \alpha_3 q u m_1^2 A_1^3}{r b_1 F_2 F_3} (u - 2\omega_1 r) \right] < 0 \\ \left[ N - F_1 - \frac{IF_3}{4\pi m_1 r A_1} - \frac{I b_1 F_2}{2m_1 \omega_1 r} \right] \left[ \frac{r(2\pi b_1 A_1 F_2 + \omega_1 F_3)}{4\pi I m_1 \omega_1 A_1} (N - F_1) - \right. \\ \left. - \frac{b_1 F_2 F_3}{8\pi \omega_1 m_1^2 A_1} + \frac{(3\alpha_3 q u A_1)^2}{I m_1} \right] + \frac{b_1 r (3\alpha_3 q u A_1)^2}{2\omega_1 m_1^2} F_2 + \\ + \frac{b_1 F_2 F_3}{8\pi \omega_1 m_1^2 A_1} (N - F_1) + \frac{3\alpha_3 q u A_1^2}{2r} (u - 2\omega_1 r) > 0$$

В этих неравенствах

$$N = \frac{d}{du} M \left( \frac{u}{r} \right) \quad F_1 = r q \left( 3\alpha_3 u^2 - \alpha_1 + \frac{3}{2} \alpha_3 A_1^2 \right)$$

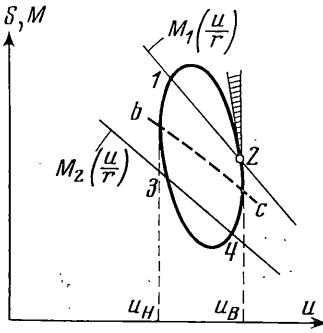
$$F_2 = \pm [1 - 4\omega_1^2 m_1^2 b_1^{-2} r^{-2} (u - 2\omega_1 r)^2]^{1/2}, \quad F_3 = 3\alpha_3 q \pi A_1^3 - 8\vartheta_1$$

Знак  $F_2$  определяется знаком корня в уравнении (1.7). При положительном знаке перед корнем в уравнении (1.7) следует брать  $F_2$  с положительным знаком, а при отрицательном — с отрицательным.

Ввиду сложности критериев устойчивости движения системы общий качественный анализ их затрудняется. Однако чтобы получить некоторые представления о выполнимости отдельных критериев устойчивости, рассмотрим второй критерий (1.17), который согласно [2] преобразуем к виду

$$F_2 F_3 \frac{d}{du} \left[ M \left( \frac{u}{r} \right) - S(u) \right] < 0, \quad S(u) = r T(u) + {}^{3/2} r \alpha_3 q u A_1^2 \quad (1.18)$$

Так как функция  $S(u)$  пропорциональна  $A_1^2$ , то график ее будет подобен графику резонансной кривой. Для случая  $\vartheta_1 = 0$  она показана на фиг. 5 и соответствует резонансной кривой фиг. 3, а. Здесь линия  $bc$  выполняет роль «скелетной» линии и разделяет график  $S(u)$  на верхнюю и нижнюю ветви, которые соответствуют верхней и нижней ветвям резонансной кривой. На этой же фигуре показаны две различные характеристики  $M(u/r)$  источника энергии. Точки пересечения характеристик  $M(u/r)$  и  $S(u)$  определяют стационарные значения скорости  $u$ .



Фиг. 5

Знак производной, входящей в (1.18), легко определяется из графика функции  $M(u/r) - S(u)$ . Анализ показывает, что при крутых характеристиках источника энергии (для точки 2 в пределах заштрихованного сектора) два первых критерия (1.17) выполняются и при выполнении третьего критерия точки 1 и 2 будут соответствовать устойчивым стационарным движениям и реализуется верхняя ветвь резонансной кривой. А также, в зависимости от наклона характеристики источника энергии и точек пересечения графиков  $M(u/r)$  и  $S(u)$ , на нижней ветви могут располагаться точки, соответствующие устойчивым (точка 3) и неустойчивым (точка 4) режимам движения.

В случае  $\vartheta_1 \neq 0$  анализ критериев устойчивости в зависимости от эволюции резонансных кривых и соответственно кривых  $S(u)$  аналогичен и поэтому для краткости здесь не приводится.

Более точное приближенное решение для угловой скорости двигателя, соответствующее (1.4), при улучшенном первом приближении имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega - \frac{2r}{I\Omega} \left[ \left( k_1 A_1 + \frac{4\vartheta_1}{\pi} - \frac{b_1 A_1}{2\omega_1} \sin 2\xi \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \xi \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4} r \alpha_3 q \Omega A_1^2 \sin(\varphi + 2\xi) + \frac{1}{12} \alpha_3 q A_1^3 \cos 3 \left( \frac{\varphi}{2} + \xi \right) \right] \quad (1.19)$$

Из выражения (1.19) видно, что наличие в автоколебательной системе изменяющегося параметра заметно влияет на колебания источника энергии и в результате появляются дополнительные гармоники.

2. Уравнения движения системы с  $n$  степенями свободы записываются в виде

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= [b_2 (x_2 - x_1) - b_1 x_1] \cos \varphi + \\ &+ k_2 (x_2 - x_1) - k_1 x_1 + \vartheta_2 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|} - \vartheta_1 \frac{x_1}{|x_1|} \\ m_2 x_2'' + c_2 (x_2 - x_1) - c_3 (x_3 - x_2) &= [b_3 (x_3 - x_2) - b_2 (x_2 - x_1)] \cos \varphi + \\ &+ k_3 (x_3 - x_2) - k_2 (x_2 - x_1) + \vartheta_3 \frac{x_3 - x_2}{|x_3 - x_2|} - \vartheta_2 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|} \\ \dots \dots \dots \\ m_{n-1} x_{n-1}'' + c_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2}) - c_n (x_n - x_{n-1}) &= [b_n (x_n - x_{n-1}) - \\ &- b_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2})] \cos \varphi + k_n (x_n - x_{n-1}) - k_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2}) + \\ &+ \vartheta_n \frac{x_n - x_{n-1}}{|x_n - x_{n-1}|} - \vartheta_{n-1} \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} m_n x_n'' + c_n (x_n - x_{n-1}) &= T(U_n) - b_n (x_n - x_{n-1}) \cos \varphi - \\ &- k_n (x_n - x_{n-1}) - \vartheta_n \frac{x_n - x_{n-1}}{|x_n - x_{n-1}|} \\ I\ddot{\varphi} &= L(\varphi) - H_0(\varphi) - rT(U_n) \end{aligned}$$

Принимая такие же предположения, как в п. 1, и предполагая, что в системе существует одночастотный (например с частотой  $\omega_s$ ) режим, а также, что частоты  $\omega_s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) являются простыми корнями характеристического уравнения системы (2.1), взятой без правых частей и без последнего уравнения, и величины  $\pm \nu \omega_s$  ( $\nu=2, 3, \dots$ ) этому характеристическому уравнению не удовлетворяют, переходя к квазинормальным координатам, преобразуем систему (2.1) к виду

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{I} F(\varphi, \mu_{ns} y_s), \quad y_s'' + \omega_s^2 y_s = \frac{\varepsilon}{M_s} \sum_{i=1}^n F_i \mu_{is} \quad (2.2)$$

Здесь

$$F = L(\varphi) - H_0(\varphi) - rT[(r\varphi - \mu_{ns} y_s)], \quad M_s = \sum_{i=1}^n m_i \mu_{is}^2$$

$$\sum_{i=1}^n F_i \mu_{is} = -E_s y_s \cos \varphi - D_s y_s - Z(y_s) + \mu_{ns} T[(r\varphi - \mu_{ns} y_s)]$$

$$E_s = \sum_{i=1}^n b_i (\mu_{is} - \mu_{(i-1)s})^2, \quad D_s = \sum_{i=1}^n k_i (\mu_{is} - \mu_{(i-1)s})^2$$

$$Z(y_s) = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \frac{(\mu_{is} - \mu_{(i-1)s})^2 y_s}{|\mu_{is} - \mu_{(i-1)s}| y_s}$$



Переход от уравнений (2.1) к уравнениям (2.2) осуществляется при помощи замены переменных

$$x_j = \sum_{\sigma=1}^n \mu_{j\sigma} y_{\sigma} \quad (\sigma, j=1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

в которой  $\mu_{j\sigma} = \Delta_j(\omega_{\sigma}^2)$  — алгебраическое дополнение элемента  $j$ -го столбца и последней строки характеристического определителя системы.

Поступая аналогично п. 1 и рассматривая движения в области  $\omega_s^{-1/2}\varphi = \varepsilon\Delta$ , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \frac{\varepsilon r}{I} \left[ M \left( \frac{u_s}{r} \right) - rT(u_s) - \frac{3}{2} \alpha_3 q r u_s \mu_{ns}^2 A_{1s}^2 \right] \\ \frac{dA_{1s}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2M_s} \left[ -\frac{E_s A_{1s}}{2\omega_s} \sin 2\xi_s + D_s A_{1s} + L_s + \right. \\ &\quad \left. + q \mu_{ns}^2 A_{1s} \left( 3\alpha_3 u_s^2 - \alpha_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 \mu_{ns}^2 A_{1s}^2 \right) \right] \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= \omega_s - \frac{u_s}{2r} + \frac{\varepsilon E_s}{4\omega_s M_s} \cos 2\xi_s, \quad u_s = \Omega r, \quad A_{1s} = a_s \omega_s \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.4) при  $u_s^* = A_{1s}^* = \xi_s^* = 0$  доставляет уравнения для стационарных режимов движения системы, откуда следуют выражения для определения амплитуды и фазы колебаний

$$A_{1s}^3 - H_s(u_s) A_{1s} + B_s = 0 \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg} 2\xi_s = \frac{3\alpha_3 q r \mu_{ns}^4 [A_{1s}^3 - 4\mu_{ns}^{-2} (u_{0s}^2 - u_s^2) A_{1s} + B_s]}{4M_s A_{1s} (u_s - 2\omega_s r)}$$

$$H_s(u_s) = 4\mu_{ns}^{-2} \{ u_{0s}^2 - u_s^2 \pm E_s (6\alpha_3 q \omega_s \mu_{ns}^2)^{-1} [1 - 4\omega_s^2 M_s^2 E_s^{-2} r^{-2} (u_s - 2\omega_s r)^2]^{1/2} \}$$

$$B_s = \frac{4L_s}{3\alpha_3 q \mu_{ns}^4}, \quad L_s = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^n \vartheta_i |\mu_{is} - \mu_{(i-1)s}|, \quad u_{0s}^2 = \frac{\alpha_1 q \mu_{ns}^2 - D_s}{3\alpha_3 q \mu_{ns}^2}$$

Уравнение (2.5) показывает, что на амплитуду автопараметрических колебаний существенное влияние оказывают демпферы сухого трения.

Решение уравнения (2.5) подобно решению уравнения (1.7).

Критерии устойчивости движения системы с  $n$  степенями свободы записываются в виде

$$\begin{aligned} N_s - F_{1s} - \frac{IF_{3s}}{4rM_s A_{1s}} - \frac{IE_s F_{2s}}{2rM_s \omega_s} < 0 \\ E_s F_{2s} F_{3s} \left[ N_s - F_{1s} + \frac{r(6\alpha_3 q u_s \mu_{ns}^2)^2 A_{1s}^3}{F_{3s}} + \right. \\ \left. + \frac{12\alpha_3 q u_s \mu_{ns}^2 \omega_s M_s^2 A_{1s}^3}{rE_s F_{2s} F_{3s}} (u_s - 2\omega_s r)^{-1} \right] < 0 \\ \left[ N_s - F_{1s} - \frac{IF_{3s}}{4rM_s A_{1s}} - \frac{IE_s F_{2s}}{2rM_s \omega_s} \right] \left[ \frac{r(\omega_s F_{3s} + 2E_s A_{1s} F_{2s})}{4IM_s \omega_s A_{1s}} (N_s - F_{1s}) - \right. \\ \left. - \frac{E_s F_{2s} F_{3s}}{8\omega_s A_{1s} M_s^2} + \frac{(3\alpha_3 q r u_s A_{1s} \mu_{ns}^2)^2}{IM_s} \right] + \frac{rE_s (3\alpha_3 q u_s A_{1s} \mu_{ns}^2)^2}{2M_s^2 \omega_s} F_{2s} + \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$+ \frac{E_s F_{2s} F_{3s}}{8\omega_s A_{1s} M_s^2} (N_s - F_{1s}) + \frac{3\alpha_3 q u_s \mu_{ns}^2 A_{1s}^2}{2r} (u_s - 2\omega_s r) > 0$$

$$N_s = \frac{d}{du_s} M \left( \frac{u_s}{r} \right), \quad F_{1s} = r q \left( 3\alpha_3 u_s^2 - \alpha_1 + \frac{3}{2} \alpha_3 \mu_{ns}^2 A_{1s}^2 \right)$$

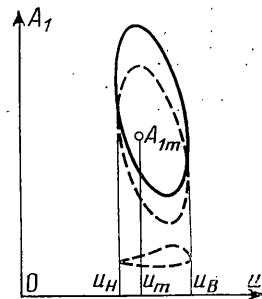
$$F_{2s} = \pm [1 - 4\omega_s^2 M_s^2 E_s^{-2} r^{-2} (u_s - 2\omega_s r)^2]^{1/2}, \quad F_{3s} = 3\alpha_3 q \mu_{ns}^4 A_{1s}^3 - 2L_s$$

Улучшенное первое приближение для угловой скорости ротора двигателя имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega - \frac{2r}{\Omega} \left[ \mu_{ns}^{-1} \left( D_s A_{1s} + L_s - \frac{A_{1s} E_s}{2\omega_s} \sin 2\xi_s \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \xi_s \right) - \frac{3}{4} \alpha_3 q r \Omega \mu_{ns}^2 A_{1s}^2 \sin 2 \left( \frac{\varphi}{2} + \xi_s \right) + \frac{1}{12} \alpha_3 q \mu_{ns}^3 A_{1s}^3 \cos 3 \left( \frac{\varphi}{2} + \xi_s \right) \right]$$

С целью проверки и расширения теоретических выводов о выполнении критериев, а также об эволюции резонансных кривых, были проведены расчеты на ЭВМ. При этом в качестве расчетных данных были выбраны следующие параметры системы:  $\omega_1 = 1 \text{ сек}^{-1}$ ,  $m_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \text{ см}^{-1}$ ,  $b_1 = 0.07 \text{ кг} \text{ см}^{-1}$ ,  $k_1 = 0.02 \text{ кг} \cdot \text{сек} \text{ см}^{-1}$ ,  $r = 0.57 \text{ см}$ ,  $q = 0.5 \text{ кг}$ ,  $\alpha_1 = 0.84 \text{ сек} \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 0.18 \text{ сек}^3 \text{ см}^{-3}$ , причем коэффициент трения  $\phi_1$  демпфера сухого трения изменялся в широкой области. Наклон  $N$  характеристики двигателя выбирался из области  $-\infty < N < 0$ .

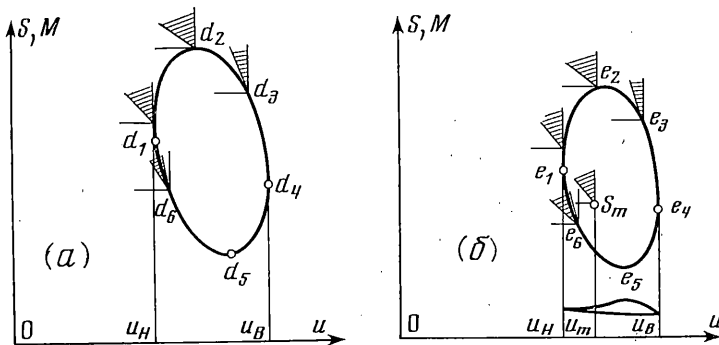
На фиг. 6 представлены две резонансные кривые, построенные по результатам вычислений. Сплошная линия на фигуре соответствует значению  $\phi_1 = 0$ , штрихлиния — значению  $\phi_1 = 0.012$ . Результаты вычислений подтвердили выводы об эволюции резонансных кривых в зависимости от  $\phi_1$ . Точка  $A_{1m}$  на фиг. 6 соответствует значению  $\phi_{1*} = 0.02932$ , при котором резонансная кривая стягивалась в точку.



Фиг. 6

Результаты расчетов критериев устойчивости для указанных выше значений  $\phi_1$  показаны на фиг. 7. Заштрихованные секторы определяют область наклонов  $N$ , соответствующих устойчивым стационарным режимам движения.

На фиг. 7, а представлены характеристики  $M(u/r)$  и  $S(u)$  при  $\phi_1 = 0$ . По мере движения от точки  $d_1$  к точке  $d_2$  на верхней ветви характеристики  $S(u)$  заштрихованный сектор увеличивается, а от точки  $d_2$  до точки  $d_4$  — уменьшается. В точке



Фиг. 7

$d_6$  нижней ветви удалось получить довольно узкий сектор, соответствующий устойчивым движениям. На участке  $d_6 d_4$  критерии устойчивости не выполнялись ни при таких наклонах. Отсюда следует вывод, что этот участок нижней ветви не реализуется.

На фиг. 7, б представлены  $S(u)$  и  $M(u/r)$  при  $\phi_1 = 0.012$  и при  $\phi_{1*} = 0.02932$  (точка  $S_m$ ). Как видно из фигуры, характеристика  $S(u)$  состоит из двух замкнутых кри-

вых, которые имеют формы, подобные резонансным кривым. На верхнем участке  $e_1 e_4$  при соответствующих значениях скорости  $u$  заштрихованные секторы получились несколько шире, чем на верхнем участке  $S(u)$  фиг. 7, а. В точке  $e_6$  на нижней ветви характеристики  $S(u)$  заштрихованный сектор получился шире, чем в точке  $d_6$ .

На нижней замкнутой кривой  $S(u)$  критерии устойчивости не выполнялись, т. е. соответствующие режимы не реализуются.

На фиг. 7, б точка  $S_m$  соответствует стягиванию кривой  $S(u)$  в точку при  $\Phi_{1*} = 0.02932$ . Как видно, при этом значении  $\Phi_1$  удалось получить сектор, соответствующий устойчивым стационарным режимам движения.

Поступила 25 V 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кононенко В. О. Взаимодействие автоколебательной системы с источником энергии. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 2.
2. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.
3. Frolov K. V. Parametric and autoparametric oscillations of some non-linear mechanical systems. Proc. 4th conference on non-linear oscillations, Prague, 1968.
4. Фролов К. В. Параметрические задачи динамики машин. Rev. Roum. Sci. Techn. Мés. Appl., t. 17, N 2, p. 265-290. Bucarest, 1972.
5. Фролов К. В. Параметрические колебания некоторых нелинейных систем с учетом свойств двигателя. Сб. тр. IX Югославского конгресса по теоретической и прикладной механике. Сплит, 1968.
6. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. М., «Мир», 1973.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4. М., Физматгиз, 1974.