

О СФЕРИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
С ИЗМЕНЯЕМОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ МАСС
В НЬЮТОНОВОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Д. В. ЛЕБЕДЕВ

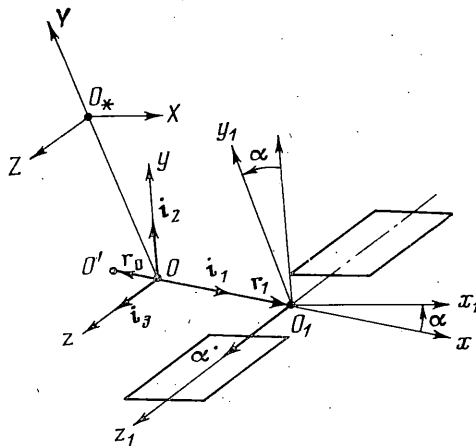
(Киев)

Рассматривается задача о движении вокруг центра масс системы твердых тел с изменяемой геометрией масс в ньютоновом поле тяготения. Механическая система состоит из основного (несущего) тела и двух однородных панелей массой M . Исследуется влияние движения панелей, отслеживающих направление на Солнце, на движение относительно центра масс системы тел, движущейся по круговой орбите радиуса R .

Для решения задачи используются асимптотические методы нелинейной механики [1, 2] и аппарат кватернионов [3].

1. Введем связанную с основным телом координатную систему $Oxyz$, центр O которой помещен в центре масс системы тел, а оси параллельны главным осям инерции несущего тела. С панелями свяжем систему $O_1x_1y_1z_1$, совпадающую с главными центральными осями инерции носимых тел.

Введем далее орбитальную $Ox_0y_0z_0$ и инерциальную O_*XYZ системы координат. Ось Ox_0 правого орбитального трехгранника направлена к притягивающему центру, а ось Oz_0 — по касательной к орбите в сторону движения объекта.



Фиг. 1

Взаимное положение координатных трехгранников $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$ определяется углом α (фиг. 1). Положение базиса $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат задается кватернионом $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, компонентами которого являются параметры Родрига — Гамильтона.

Направление OO_* на Солнце составляет с нормалью к плоскости орбиты угол σ .

Кинетическая энергия системы определяется выражением

$$2T = (M_0 + M) |V|^2 + M_0 (\omega \cdot r_0)^2 + M (\omega \cdot r_1)^2 + \omega \cdot I \omega + (\omega + \alpha \cdot i_3) \cdot \Theta (\omega + \alpha \cdot i_3) \quad (1.1)$$

где M_0 — масса несущего тела, r_0 и r_1 — радиус-векторы центров масс O' и O_1 несущего и носимого тел, ω — вектор угловой скорости вращения основ-

ного тела, \mathbf{V} — вектор скорости полюса O , \mathbf{I} и Θ — тензоры инерции несущего тела и панелей.

Предполагается, что матрицы тензоров инерции \mathbf{I} и Θ являются диагональными матрицами вида

$$\mathbf{I} = \text{diag}\{J_{x_0}, J_{y_0}, J_{z_0}\}, \quad \Theta = \text{diag}\{J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}\} \quad (1.2)$$

а радиус-векторы \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 равны

$$\mathbf{r}_0 = \{x_0, 0, 0\}, \quad \mathbf{r}_1 = \{x_1, 0, 0\} \quad (1.3)$$

Учитывая, что

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i}_1 + \omega_y \mathbf{i}_2 + \omega_z \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{V} = V_x \mathbf{i}_1 + V_y \mathbf{i}_2 + V_z \mathbf{i}_3$$

и принимая во внимание соотношения (1.2) и (1.3), запишем кинетическую энергию системы в виде

$$\begin{aligned} 2T = & (M_0 + M) (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + [J_x + (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \omega_x^2 + \\ & + [J_y - (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - \\ & - (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \omega_x \omega_y + 2J_{z_1} \omega_x \alpha^* + J_{z_1} \alpha^{*2} \\ & J_x = J_{x_0} + J_{x_1}, \quad J_y = J_{y_0} + J_{y_1} + M_0 x_0^2 + M x_1^2 \\ & J_z = J_{z_0} + J_{z_1} + M_0 x_0^2 + M x_1^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Используя уравнения Эйлера — Лагранжа [4], получим уравнения вращательного движения несущего тела с учетом относительного движения носимых тел

$$\begin{aligned} & [J_x + (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \omega_x^* - 1/2 (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \omega_y^* = \\ & = -1/2 (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \omega_x \omega_z + [J_y - J_z - (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \omega_y \omega_z - \\ & - (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \omega_x \alpha^* + [(J_{y_1} - J_{x_1}) \cos 2\alpha - J_{z_1}] \omega_y \alpha^* + M_x \\ & - 1/2 (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \omega_x^* + [J_y - (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \omega_y^* = \\ & = [J_z - J_x - (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \omega_x \omega_z + 1/2 (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \omega_y \omega_z + \\ & + [J_{z_1} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \cos 2\alpha] \omega_x \alpha^* + (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \omega_y \alpha^* + M_y \\ & J_z \omega_z^* = [J_x - J_y + 2(J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \omega_x \omega_y + \\ & + 1/2 (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha (\omega_x^2 - \omega_y^2) - J_{z_1} \alpha^{*2} + M_z \end{aligned} \quad (1.5)$$

В качестве внешних моментов M_x , M_y и M_z будем рассматривать гравитационные моменты, вычисляемые с точностью до членов второго порядка малости относительно l/R (l — характерный размер системы тел) по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{3\mu}{R^3} \left\{ [J_z - J_y + (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \beta_2 \beta_3 + \frac{1}{2} (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \beta_1 \beta_3 \right\} \\ M_y &= \frac{3\mu}{R^3} \left\{ [J_x - J_z + (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \beta_1 \beta_3 - \frac{1}{2} (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha \beta_2 \beta_3 \right\} \\ M_z &= \frac{3\mu}{R^3} \left\{ [J_y - J_x - 2(J_{y_1} - J_{x_1}) \sin^2 \alpha] \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{2} (J_{y_1} - J_{x_1}) \sin 2\alpha (\beta_2^2 - \beta_1^2) \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где μ — гравитационный параметр.

Направляющие косинусы β_1 , β_2 , β_3 углов, образованных осями $Oxuz$ с направлением гравитационной вертикали, выражаются через параметры λ_i ($i=0, 1, 2, 3$) при помощи соотношений

$$\beta_1 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2, \quad \beta_2 = 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3), \quad \beta_3 = 2(\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3) \quad (1.7)$$

Относительное движение панелей описывается уравнением

$$J_{z1}(\alpha_* + \omega_z) + (J_{y1} - J_{x1}) \cos 2\alpha \omega_x \omega_y - 1/2 (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha (\omega_x^2 - \omega_y^2) = M_{\alpha} \quad (1.8)$$

Будем рассматривать четырехмерное гиперкомплексное пространство, образованное гиперкомплексными единицами i_1, i_2, i_3 , формально совпадающими с осями трехмерного базиса $Oxyz$.

Кинематическое уравнение, характеризующее движение связанного трехгранника $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат, запишем в кватернионной форме [3]:

$$2\Lambda' = \Lambda \cdot \omega - \omega_0 \cdot \Lambda, \quad \omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}, \quad \omega_0 = \{0, \omega_0, 0\} \quad (1.9)$$

Через ω_0 обозначена угловая скорость орбитального движения объекта, которая для круговой орбиты радиуса R вычисляется по формуле $\omega_0 = (\mu R^{-3})^{1/2}$.

Ориентация объекта в инерциальном пространстве определяется кватернионом $N = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, удовлетворяющим уравнению

$$2N' = N \cdot \omega \quad (1.10)$$

Для исследования динамики движения системы тел относительно орбитальной (инерциальной) системы координат уравнения (1.5), (1.8) совместно с уравнением (1.9) (соответственно (1.10)) должны быть дополнены программой изменения относительного движения панелей.

2. Обозначим через γ_1, γ_2 и γ_3 направляющие косинусы углов между осями координатной системы $O_1x_1y_1z_1$, связанной с панелями, и направлением OO_* на Солнце. Величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ находятся из уравнений Пуассона

$$\gamma_1' = (\omega_z + \alpha_*) \gamma_2 - \omega_y \gamma_3, \quad \gamma_2' = \omega_x \gamma_3 - (\omega_z + \alpha_*) \gamma_1 \quad (2.1)$$

$$\gamma_3' = \omega_y \gamma_1 - \omega_x \gamma_2$$

Программное движение панелей $\alpha_* = \alpha_*(t)$ формируется из условия «идеальной» освещенности панелей, в качестве которого принимается условие ортогональности осей O_1x_1 и O_*Y

$$\gamma_1 = \cos(O_1x_1, O_*Y) = 0 \quad (2.2)$$

Из уравнений (2.1) при условии (2.2) получим, что

$$\alpha_*' = \gamma_2^{-1} \gamma_3 \omega_y - \omega_z \quad (2.3)$$

при этом γ_2 и γ_3 изменяются по закону

$$\gamma_2 = \cos \left(\int \omega_x dt + \psi \right), \quad \gamma_3 = -\sin \left(\int \omega_x dt + \psi \right) \quad (2.4)$$

где ψ — произвольная постоянная интегрирования.

Подставляя (2.4) в соотношение (2.3), получим кинематическое уравнение, которому удовлетворяет программное движение панелей

$$\alpha_*' = -\omega_y \operatorname{tg} \left(\int \omega_x dt + \psi \right) - \omega_z \quad (2.5)$$

В дальнейших рассуждениях будем считать, что система управления движением панелей идеально отслеживает программный закон $\alpha_* = \alpha_*(t)$ изменения относительного движения носимых тел, т. е. в каждый момент времени имеет место равенство

$$\alpha - \alpha_* = 0 \quad (2.6)$$

3. Будем предполагать, что геометрия масс системы тел такова, что выполняются условия $J_x \ll J_y \approx J_z$, $J_y > J_z$. При этих условиях уравнения (1.5) вращательного движения несущего тела представим в форме

$$\begin{aligned} \omega_x^* &= \omega_y \omega_z + \varepsilon F_x(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_x^*, \omega_y^*, \alpha, \alpha^*) \\ \omega_y^* &= \varepsilon F_y(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_x^*, \omega_y^*, \alpha, \alpha^*) \\ \omega_z^* &= -\omega_x \omega_y + \varepsilon F_z(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \alpha, \alpha^*) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где ε — малый положительный параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной консервативной.

В уравнениях (3.1) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_x &= J_x^{-1} \{ -(J_{y1} - J_{x1}) \sin^2 \alpha \omega_x^* + 1/2 (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha \omega_y^* - \\ &- 1/2 (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha \omega_x \omega_z - [J_x - J_y + J_z + (J_{y1} - J_{x1}) \sin^2 \alpha] \omega_y \omega_z - \\ &- (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha \omega_x \alpha^* + [(J_{y1} - J_{x1}) \cos 2\alpha - J_{z1}] \omega_y \alpha^* + M_x \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} F_y &= J_y^{-1} \{ 1/2 (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha \omega_x^* + (J_{y1} - J_{x1}) \sin^2 \alpha \omega_y^* + \\ &+ [J_z - J_x - (J_{y1} - J_{x1}) \sin^2 \alpha] \omega_x \omega_z + 1/2 (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha \omega_y \omega_z + \\ &+ [J_{z1} + (J_{y1} - J_{x1}) \cos 2\alpha] \omega_x \alpha^* + (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha \omega_y \alpha^* + M_y \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_z &= J_z^{-1} \{ [J_x - J_y + J_z + 2(J_{y1} - J_{x1}) \sin^2 \alpha] \omega_x \omega_y + \\ &+ 1/2 (J_{y1} - J_{x1}) \sin 2\alpha (\omega_x^2 - \omega_y^2) - J_{z1} \alpha^* + M_z \} \end{aligned}$$

Для отыскания решения уравнений (3.1) воспользуемся асимптотическими методами нелинейной механики [1, 2].

При $\varepsilon = 0$ из (3.1) получаем порождающую систему, общее решение которой имеет вид

$$\omega_x = A \sin \xi, \quad \omega_y = \Omega, \quad \omega_z = A \cos \xi, \quad \xi = \Omega t + \varphi \quad (3.3)$$

где A, Ω, φ — произвольные постоянные интегрирования.

Решение уравнений (3.1) при $\varepsilon \neq 0$ будем по-прежнему искать в виде (3.3), считая A, Ω, φ функциями времени. Преобразуя исходную систему (3.1) к новым переменным, приходим к уравнениям в стандартной форме

$$A^* = \varepsilon (F_x^* \sin \xi + F_z^* \cos \xi), \quad \Omega^* = \varepsilon F_y^*, \quad \varphi^* = \varepsilon A^{-1} (F_x^* \cos \xi - F_z^* \sin \xi) \quad (3.4)$$

где через F_x^*, F_y^* и F_z^* обозначены функции (3.2) на траекториях невозмущенного движения.

Чтобы к уравнениям (3.4) применить схему усреднения, необходимо вычислить функции F_x^*, F_y^*, F_z^* .

4. Решение кинематического уравнения (1.9), когда угловые скорости ω_x, ω_y и ω_z изменяются согласно (3.3), будем искать в виде

$$\Lambda = M^0 \cdot N \quad (4.1)$$

где M — кватернион, описывающий движение орбитального трехгранника $Ox_0y_0z_0$ относительно инерциальной системы O_*XYZ и удовлетворяющий уравнению

$$2M^* = M \cdot \omega_0 \quad (4.2)$$

Здесь через M^0 обозначен кватернион, сопряженный кватерниону M . Учитывая, что $\omega_0 = \omega_0 i_2$, получим частное решение уравнения (4.2)

$$M = \exp(1/2 \omega_0 t i_2) \quad (4.3)$$

Кватернион N , определяющий движение связанной системы $Oxyz$ относительно инерциальной O_*XYZ , находится из решения уравнения (1.10), которое будем искать в виде произведения двух кватернионов

$$N = N_1 \cdot N_2 \quad (4.4)$$

Это соответствует представлению искомого преобразования N в виде двух последовательно совершаемых преобразований. Дифференцируя N , найдем

$$2N' = N \cdot (N_2^\circ \cdot \omega_1' \cdot N_2 + \omega_2) \quad (4.5)$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать такое разложение данной угловой скорости

$$\omega = N_2^\circ \cdot \omega_1' \cdot N_2 + \omega_2 \quad (4.6)$$

на составляющие $\omega_1 = N_2^\circ \cdot \omega_1' \cdot N_2$ и ω_2 , чтобы для каждой из них решение кинематического уравнения было известно.

Представим вектор угловой скорости

$$\omega = A \sin \xi i_1 + \Omega i_2 + A \cos \xi i_3 \quad (4.7)$$

вращающийся по круговому конусу вокруг оси i_2 , в виде разложения (4.6), причем в качестве ω_2 выберем вектор $-\Omega i_2$. Так как ω_2 определяет изменение кватерниона N_2 , то частным решением уравнения

$$2N_2' = -N_2 \cdot \Omega i_2 \quad (4.8)$$

является соотношение

$$N_2 = \exp(-1/2 \Omega t i_2) \quad (4.9)$$

В результате определяется вектор

$$\omega_1 = N_2 \cdot \omega \cdot N_2^\circ = A \sin \varphi i_1 + 2\Omega i_2 + A \cos \varphi i_3 \quad (4.10)$$

который, как следует из (4.10), имеет неподвижное направление.

Частные решения (4.3), (4.9) уравнений (4.2) и (4.8), а также выражение

$$N_1 = \exp[1/2 (A \sin \varphi i_1 + 2\Omega i_2 + A \cos \varphi i_3) t]$$

позволяют записать общее решение кинематических уравнений (1.9) и (1.10) в виде [3]:

$$\Lambda = C_\lambda \cdot \exp(-1/2 \omega_0 t i_2) \cdot \exp[1/2 (A \sin \varphi i_1 + 2\Omega i_2 + A \cos \varphi i_3) t] \cdot \exp(-1/2 \Omega t i_2) \quad (4.11)$$

$$N = C_\nu \cdot \exp[1/2 (A \sin \varphi i_1 + 2\Omega i_2 + A \cos \varphi i_3) t] \cdot \exp(-1/2 \Omega t i_2) \quad (4.12)$$

где C_λ и C_ν — постоянные кватернионы.

Будем предполагать, что в начальный момент времени несущее тело находится в гравитационно-устойчивом положении равновесия. Поскольку тело с неравными главными моментами инерции имеет на круговой орбите четыре устойчивых положения равновесия [5], считаем, что при $t=0$ несущее тело находится в положении, которому соответствует кватернион $C_\lambda = \{1, 0, 0, 0\}$. Тогда из соотношения (4.11) получаем выражения для параметров Родрига — Гамильтона

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{2\Omega}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \sin \frac{\Omega + \omega_0}{2} t + \cos \frac{\Phi t}{2} \cos \frac{\Omega + \omega_0}{2} t \\ \lambda_1 &= \frac{A}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \sin \left(\frac{\Omega - \omega_0}{2} t + \varphi \right) \\ \lambda_2 &= \frac{2\Omega}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \cos \frac{\Omega + \omega_0}{2} t - \cos \frac{\Phi t}{2} \sin \frac{\Omega + \omega_0}{2} t \\ \lambda_3 &= \frac{A}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \cos \left(\frac{\Omega - \omega_0}{2} t + \varphi \right), \quad \Phi = \sqrt{A^2 + 4\Omega^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из соотношений (4.13) следует, что направляющие косинусы β_1 , β_2 и β_3 углов, образованных осями $Oxyz$ с направлением гравитационной вертикали, определяются с точностью до членов A^2/Ω^2 выражениями

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \cos(\Phi - \Omega - \omega_0)t - \frac{A^2}{8\Omega^2} \left[4 \sin^2 \frac{\Phi t}{2} \sin \xi \sin(\omega_0 t - \varphi) + \sin \Phi t \sin(\Omega + \omega_0)t \right] \\ \beta_2 &= \frac{A}{\Omega} \left(\sin \Phi t \cos \xi + \sin^2 \frac{\Phi t}{2} \sin \xi \right) \\ \beta_3 &= -\sin(\Phi - \Omega - \omega_0)t + \\ &+ \frac{A^2}{8\Omega^2} \left[4 \sin^2 \frac{\Phi t}{2} \sin \xi \cos(\omega_0 t - \varphi) + \sin \Phi t \cos(\Omega + \omega_0)t \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Будем далее считать, что при $t=0$ ось O_1y_1 связанной с панелями системы координат параллельна направлению OO_* на Солнце, т. е. $\gamma_2(0)=1$, $\gamma_3(0)=0$.

Учитывая, что ω_x , ω_y и ω_z в невозмущенном движении изменяются согласно формулам (3.3), соотношение (2.5) принимает вид

$$\alpha_*' = -\Omega \operatorname{tg}(-A\Omega^{-1} \cos \xi + \varphi) - A \cos \xi \quad (4.15)$$

в котором при $\gamma_2(0)=1$ и $\gamma_3(0)=0$ постоянная интегрирования $\psi = A\Omega^{-1} \cos \varphi$.

Пусть $A \ll \Omega$, т. е. остаточные угловые скорости $\omega_x(0)$ и $\omega_z(0)$ объекта значительно меньше угловой скорости ω_y . Тогда имеют место приближенные соотношения

$$\alpha_*' = -A \cos \varphi, \quad \alpha_*'' = 0 \quad (4.16)$$

Выражение для параметра α_* , характеризующего относительное движение панелей, можно получить, интегрируя соотношение (4.15). Однако из анализа функций (3.2) следует, что для вычисления F_x , F_y и F_z необходимо знать $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, которые можно найти в более простом виде.

Из условия $\gamma_2(0)=1$, $\gamma_3(0)=0$ следует, что кватернион C_v в формуле (4.12) имеет вид $C_v = \{\cos \sigma/2, 0, 0, \sin \sigma/2\}$ и решение уравнения (4.10) будет иметь вид

$$\begin{aligned} v_0 &= n_0 \cos \frac{\sigma}{2} - n_3 \sin \frac{\sigma}{2}, & v_1 &= n_1 \cos \frac{\sigma}{2} - n_2 \sin \frac{\sigma}{2} \\ v_2 &= n_2 \cos \frac{\sigma}{2} + n_1 \sin \frac{\sigma}{2}, & v_3 &= n_3 \cos \frac{\sigma}{2} + n_0 \sin \frac{\sigma}{2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$n_0 = \frac{2\Omega}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \sin \frac{\Omega t}{2} + \cos \frac{\Phi t}{2} \cos \frac{\Omega t}{2}, \quad n_1 = \frac{A}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \sin \left(\frac{\Omega t}{2} + \varphi \right)$$

$$n_2 = \frac{2\Omega}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \cos \frac{\Omega t}{2} - \cos \frac{\Phi t}{2} \sin \frac{\Omega t}{2}, \quad n_3 = \frac{A}{\Phi} \sin \frac{\Phi t}{2} \cos \left(\frac{\Omega t}{2} + \varphi \right)$$

Используя соотношения (4.17), найдем выражения для направляющих косинусов γ_1 и γ_2

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2(v_0 v_3 - v_1 v_2) \cos \alpha + (v_0^2 + v_2^2 - v_1^2 - v_3^2) \sin \alpha \\ \gamma_2 &= (v_0^2 + v_2^2 - v_1^2 - v_3^2) \cos \alpha - 2(v_0 v_3 - v_1 v_2) \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.18)$$

Учитывая условия (2.2) и (2.4), разрешим уравнения (4.18) относительно $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. При $A \ll \Omega$ получим приближенные соотношения

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -\sin \sigma - A\Omega^{-1} \sin \frac{\Phi t}{2} \cos \left(\frac{\Phi t}{2} + \varphi \right) \cos \sigma + \frac{A^2}{2\Omega^2} \sin^2 \frac{\Phi t}{2} \sin \sigma \\ \cos \alpha &= \cos \sigma - A\Omega^{-1} \sin \frac{\Phi t}{2} \cos \left(\frac{\Phi t}{2} + \varphi \right) \sin \sigma - \frac{A^2}{2\Omega^2} \sin^2 \frac{\Phi t}{2} \cos \sigma \end{aligned} \quad (4.19)$$

5. Принимая во внимание, что в невозмущенном движении ($\varepsilon=0$) угловые скорости ω_x , ω_y , ω_z движения объекта относительно центра масс определяются формулами (3.3), компоненты кватерниона Λ , описывающего движение системы координат $Oxyz$ относительно орбитального трехгранника $Ox_0y_0z_0$, изменяются во времени согласно (4.13), а относительное движение панелей характеризуется выражениями (4.15), (4.16), (4.19), вычислим функции F_x , F_y и F_z на траектории невозмущенного движения.

Из анализа полученных выражений следует, что система (3.4) — это система с тремя быстрыми переменными $\xi = \Omega t + \varphi$, $\eta = \Phi t$ и $\zeta = \omega_0 t$. В зависимости от соотношений между частотами Ω , Φ и ω_0 в системе (3.4) может возникать или не возникать резонансная ситуация.

Ограничимся случаем отсутствия резонанса. Первое приближение для системы (3.4), которое получается усреднением по трем быстрым переменным ξ , η и ζ , определяется уравнениями

$$A^* = \varepsilon a_1(\varphi) A^2, \quad \Omega^* = \varepsilon [b_1(\varphi) A^2 + b_2(\varphi) A \Omega], \quad \dot{\varphi}^* = \varepsilon [c_1(\varphi) A + c_2(\varphi) \Omega] \quad (5.1)$$

$$a_1(\varphi) = -\frac{J_{y1} - J_{x1}}{2J_x} \cos \varphi \sin 2\sigma, \quad b_1(\varphi) = -\frac{J_{y1} - J_{x1}}{2J_y} \sin 2\varphi \cos 2\sigma$$

$$b_2(\varphi) = \frac{J_{y1} - J_{x1}}{J_y} \cos \varphi \sin 2\sigma, \quad c_1(\varphi) = \frac{(J_x + J_z)(J_{y1} - J_{x1})}{2J_x J_z} \sin \varphi \sin 2\sigma$$

$$c_2(\varphi) = -\frac{1}{2} J_x^{-1} J_z^{-1} (J_x + J_z) [J_x - J_y + J_z + 2(J_{y1} - J_{x1}) \sin^2 \sigma] \quad (5.2)$$

Для анализа влияния относительного движения панелей на динамику вращательного движения несущего тела в гравитационном поле введем параметр $\kappa = J_x^{-1} (J_{y1} - J_{x1}) < 1$, который позволяет записать равенства (5.2) в виде

$$\begin{aligned} a_1(\varphi) &= -\frac{1}{2} \kappa \sin 2\sigma \cos \varphi, \quad b_1(\varphi) = -\frac{1}{2} \kappa J_x J_y^{-1} \cos 2\sigma \sin 2\varphi \\ b_2(\varphi) &= \kappa J_x J_y^{-1} \sin 2\sigma \cos \varphi, \quad c_1(\varphi) = \frac{1}{2} \kappa (J_x + J_z) J_z^{-1} \sin 2\sigma \sin \varphi \\ c_2(\varphi) &= -c_* - \kappa (J_x + J_z) J_z^{-1} \sin^2 \sigma, \quad c_* = \frac{1}{2} (J_x + J_z) (J_x - J_y + J_z) J_x^{-1} J_z^{-1} \end{aligned}$$

При неподвижных панелях, когда $\alpha = \alpha^* = 0$, уравнения для определения A , Ω и φ , как следует из соотношений (1.6) и (3.2), принимают вид

$$A^* = 0, \quad \Omega^* = 0, \quad \dot{\varphi}^* = -\varepsilon c_* \Omega^* \quad (5.3)$$

Эти уравнения можно получить и из (5.1), (5.2), положив $\kappa = 0$. Рассматриваемому случаю отвечает движение объекта, описываемое формулами (3.3), в которых

$$A = A_* = \text{const}, \quad \Omega = \Omega_* = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_* = \varphi_0 - \varepsilon c_* \Omega_* t \quad (5.4)$$

т. е. частота гармонических колебаний уточняется на величину $-\varepsilon c_* \Omega_*$.

Естественно, что при $\kappa \neq 0$, когда панели отслеживают направление на Солнце, решение уравнений (5.1) будет отличаться от (5.4). Отыскивая

решение системы (5.1) в виде рядов по степеням κ

$$\begin{aligned} A(t) &= A_* + \frac{\partial A}{\partial \kappa}(t)\kappa + \dots, \quad \Omega(t) = \Omega_* + \frac{\partial \Omega}{\partial \kappa}(t)\kappa + \dots \\ \varphi(t) &= \varphi_* + \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa}(t)\kappa + \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

влияние динамики относительного движения панелей условимся оценивать по линейным членам соотношений (5.5).

Частные производные $x_1 = \partial A / \partial \kappa$, $x_2 = \partial \Omega / \partial \kappa$ и $x_3 = \partial \varphi / \partial \kappa$ находятся из решения уравнения в вариациях по параметру κ

$$\dot{x} = Fx + G, \quad x = \{x_1, x_2, x_3\} \quad (5.6)$$

при нулевых начальных условиях [°].

В системе (5.6) F и G — матрицы частных производных правых частей уравнений (5.1) по переменным A , Ω , φ и параметру κ соответственно, вычисленные при $\kappa=0$ на траектории (5.4)

$$F = \varepsilon \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_* & 0 \end{vmatrix}, \quad G = \varepsilon \begin{vmatrix} -1/2 A_*^2 \sin 2\sigma \cos \varphi_* \\ -1/2 A_*^2 J_x J_y^{-1} \cos 2\sigma \sin 2\varphi_* + A_* \Omega_* J_x J_y^{-1} \sin 2\sigma \cos \varphi_* \\ 1/2 A_* (J_x + J_z) J_z^{-1} \sin 2\sigma \sin \varphi_* - \Omega_* (J_x + J_z) J_z^{-1} \sin^2 \sigma \end{vmatrix}$$

Уравнение (5.6) при $x(0) = 0$ имеет следующее решение:

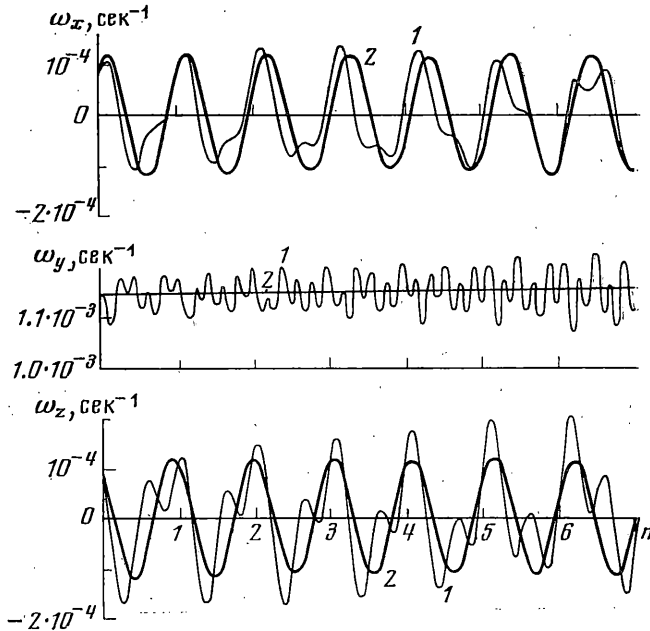
$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \kappa}(t) &= \frac{A_*^2 \sin 2\sigma}{2\Omega_* c_*} (\sin \varphi_* - \sin \varphi_0) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \kappa}(t) &= -\frac{A_* J_x \sin 2\sigma}{J_y c_*} (\sin \varphi_* - \sin \varphi_0) - \frac{A_*^2 J_x \cos 2\sigma}{4\Omega_* J_y c_*} (\cos 2\varphi_* - \cos 2\varphi_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \kappa}(t) &= \\ &= -\varepsilon \left(\frac{J_x + J_z}{J_z} \sin^2 \sigma \Omega_* + \frac{J_x}{J_y} \sin 2\sigma \sin \varphi_0 A_* + \frac{J_x A_*^2}{4J_y \Omega_*} \cos 2\sigma \cos 2\varphi_0 \right) t + \\ &+ \frac{A_*}{\Omega_*} \frac{2J_x J_z + J_x J_y + J_y J_z}{2J_y J_z c_*} \sin 2\sigma (\cos \varphi_* - \cos \varphi_0) - \\ &- \frac{A_*^2 J_x \cos 2\sigma}{\Omega_*^2 8J_y c_*} (\sin 2\varphi_* - \sin 2\varphi_0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из анализа полученных выражений следует, что при $A \ll \Omega$ и $\kappa < 1$ движение системы тел, панели которой отслеживают направление OO_* на Солнце, мало отличается от движения исследуемой системы с неподвижными панелями при $\alpha=0$.

Отметим, что уравнения (5.1), (5.2) сохраняют свой вид независимо от того, вращается ли система с угловой скоростью ω_y , близкой к угловой скорости орбитального движения, или стабилизируется вращением вокруг оси y с наибольшим моментом инерции, когда работой гравитационных моментов по сравнению с кинетической энергией вращения можно пренебречь. В последнем случае выражения (5.7) показывают, что в первом приближении стабилизация системы вращением из-за подвижности панелей не нарушается.

Итак, усредненные уравнения (5.1) свидетельствуют о том, что для рассматриваемой геометрии масс системы тел относительное движение панелей не оказывает существенного влияния на движение несущего тела относительно центра масс.

6. В качестве примера рассмотрим вращательное движение системы тел, параметры эллипсоидов инерции которых связаны соотношениями $J_y=11J_x$, $J_z=10.1J_x$, $J_{x1}=0.4J_x$, $J_{y1}=0.5J_x$, $J_{z1}=0.1J_x$. Движение происходит на круговой орбите высотой



Фиг. 2

$H=350$ км. Угол σ между нормалью к плоскости орбиты и направлением на Солнце составляет 15° .

На фиг. 2, иллюстрирующей характер изменения угловых скоростей системы в функции числа витков n , через ω_x , ω_y и ω_z (кривые 1) обозначены проекции вектора угловой скорости объекта на оси трехгранника $Oxyz$, полученные интегрированием уравнений (1.5), (1.9), (2.3). Значения тех же переменных, вычисленные по формулам (3.3) и усредненным уравнениям (5.1), обозначены через ω_{x*} , ω_{y*} и ω_{z*} (кривые 2).

Моделирование проводилось при следующих начальных условиях: $\omega_x(0) = \omega_z(0) = 8.7 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$, $\omega_y(0) = \Omega(0) = 1.1458 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$, $A(0) = 1.2267 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$, $\varphi(0) = \varphi_0 = 0.7854$.

При этих значениях линейные члены рядов (5.5), по которым оценивается влияние динамического воздействия относительного движения панелей, равны

$$\frac{\partial A}{\partial \kappa}(t)\kappa = -4.22 \cdot 10^{-6} + 5.97 \cdot 10^{-6} \sin \varphi_* [\text{сек}^{-1}],$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \kappa}(t)\kappa = 7.17 \cdot 10^{-6} - 1.01 \cdot 10^{-5} \sin \varphi_* - 4.70 \cdot 10^{-7} \cos 2\varphi_* [\text{сек}^{-1}]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \kappa}(t)\kappa = -4.39 \cdot 10^{-2} - 8.83 \cdot 10^{-6} t + 6.23 \cdot 10^{-2} \cos \varphi_* - 2.05 \cdot 10^{-4} \sin 2\varphi_*, \quad \varphi_* = 0.7854 - 6.3 \cdot 10^{-5} t$$

Результаты моделирования показывают, что уравнения первого приближения (5.1), (5.2) правильно отражают качественные особенности эволюции системы тел и подтверждают вывод о малости воздействия динамики относительного движения панелей на движение исследуемой системы относительно центра масс.

Поступила 10 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Миcropольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
 2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
 3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
 4. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
 5. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
 6. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1965.
-