

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ**

А. П. МАРКЕЕВ, А. Г. СОКОЛЬСКИЙ

(Москва)

Исследуется устойчивость периодических движений искусственного спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Спутник — твердое тело с тремя неравными моментами инерции. Орбита центра масс круговая.

Для исследуемых периодических движений одна из осей эллипсоида инерции спутника направлена по нормали к плоскости орбиты, а две другие совершают колебания произвольной амплитуды или вращаются с произвольной угловой скоростью в плоскости орбиты.

Задача решается в нелинейной постановке. При различном способе введения малого параметра проведено аналитическое исследование. При произвольных значениях параметров задачи применен численный анализ.

1. Рассмотрим движение твердого тела (спутника) относительно его центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Известно [1], что уравнения движения спутника допускают решения, соответствующие плоским движениям, для которых одна из главных центральных осей эллипсоида инерции спутника во все время движения перпендикулярна плоскости орбиты.

На круговой орбите плоские движения спутника описываются дифференциальным уравнением математического маятника, и они могут представлять собой вращения, колебания или иметь асимптотический характер.

Будем исследовать устойчивость плоских колебаний и вращений. Результаты решения этой задачи важны для предварительного анализа систем гравитационной стабилизации, а также представляют интерес с точки зрения классической динамики твердого тела.

По отношению к возмущениям координат и скоростей эти движения неустойчивы по Ляпунову, так как частоты колебаний и вращений зависят от начальных условий. Но представляет интерес орбитальная устойчивость колебаний и вращений спутника, которая в рассматриваемом случае означает устойчивость относительно пространственных возмущений и возмущений частоты плоских движений.

Подход, применявшийся в [2], использовался при решении задачи об орбитальной устойчивости. В работе [3] предложена схема исследования устойчивости¹. Задача об устойчивости плоских колебаний и вращений несимметричного спутника рассматривалась ранее в [4-6]. Однако в этих работах анализировалась устойчивость лишь по отношению к пространственным возмущениям, причем только в линейной постановке. Следует отметить, что при анализе было допущено несколько неточностей.

В данной работе проводится исследование устойчивости в строгой нелинейной постановке, при которой задачи об устойчивости по отношению к пространственным и плоским возмущениям не являются независимыми. Применяются как аналитические методы при наличии малых параметров, так и численные методы, если параметры задачи произвольны. Полученные ниже результаты включают результаты [4-6].

¹ См. также: Маркеев А. П., Сокольский А. Г. Исследование периодических движений, близких лагранжевым решениям ограниченной задачи трех тел. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1975, препринт № 110.

2. Уравнения движения спутника относительно центра масс запишем в каноническом виде с истинной аномалией t в качестве независимой переменной и функцией Гамильтона [4, 7]:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{\sin^2 \varphi + \theta_A \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \vartheta} \left(p_\psi + \frac{1}{\theta_A} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left[(\sin^2 \varphi + \theta_A \cos^2 \varphi) \operatorname{ctg}^2 \vartheta + \frac{\theta_A}{\theta_C} \right] p_\varphi^2 + \frac{1}{2} (\cos^2 \varphi + \theta_A \sin^2 \varphi) p_\psi^2 - \\
 & - \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} (\sin^2 \varphi + \theta_A \cos^2 \varphi) \left(p_\psi + \frac{1}{\theta_A} \right) p_\varphi + \\
 & + \frac{1 - \theta_A}{2} \frac{\sin 2\varphi}{\sin \vartheta} \left(p_\psi + \frac{1}{\theta_A} \right) p_\psi - \frac{1 - \theta_A}{2} \sin 2\varphi \operatorname{ctg} \vartheta p_\varphi p_\psi - p_\psi + \\
 & + \frac{3}{2} \frac{\theta_A - 1}{\theta_A} (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta)^2 + \frac{3}{2} \frac{\theta_C - 1}{\theta_A} \sin^2 \psi \sin^2 \vartheta
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\theta_A = A/B, \quad \theta_C = C/B$$

где ψ, ϑ, φ — углы Эйлера между осями связанной и орбитальной систем координат; $p_\psi, p_\varphi, p_\psi$ — соответствующие им безразмерные импульсы; A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника.

Дифференциальные уравнения движения, соответствующие функции Гамильтона (2.1), допускают решения, для которых

$$\vartheta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad p_\varphi = 0, \quad p_\psi = 0 \quad (2.2)$$

а изменение переменных ψ, p_ψ описывается каноническими дифференциальными уравнениями с гамильтонианом

$$h = \frac{1}{2} \theta_A p_\psi^2 + \frac{3(\theta_C - \theta_A)}{2\theta_A} \sin^2 \psi \quad (2.3)$$

Эти решения определяют плоские движения спутника, представляющие собой (в зависимости от величины константы энергии h_0 и инерционных параметров) вращения или колебания.

Без ограничения общности будем считать, что $\theta_C > \theta_A$.

Если $h_0 < 3(\theta_C - \theta_A)/(2\theta_A)$, то плоские движения имеют колебательный характер. Пусть при $t = t_0$ амплитуда колебаний максимальна и равна ψ_0 ($\psi_0 < \pi/2$) и пусть

$$k_1^2 = \sin^2 \psi_0 = \frac{2h_0\theta_A}{3(\theta_C - \theta_A)} < 1 \quad (2.4)$$

Тогда плоские колебания выражаются через эллиптические функции и интегралы с модулем k_1 .

Если $h_0 > 3(\theta_C - \theta_A)/(2\theta_A)$, то плоские движения спутника представляют собой вращения, которые также можно записать через эллиптические функции и интегралы с модулем $|k_2|$, где

$$k_2^2 = \frac{3(\theta_C - \theta_A)}{2h_0\theta_A} < 1 \quad (2.5)$$

Для исследования устойчивости изучаемые движения спутника удобно записать через переменные действие — угол.

В случае колебаний переменные действие I — угол W вводятся при помощи формул (см. также [3])

$$\psi = \arcsin \left\{ k_1 \operatorname{sn} \left[\frac{2K(k_1)}{\pi} W \right] \right\}, \quad p_\psi = k_1 \frac{\sqrt{3(\theta_c - \theta_A)}}{\theta_A} \operatorname{cn} \left[\frac{2K(k_1)}{\pi} W \right] \quad (2.6)$$

Замена переменных (2.6) 2π -периодична по W . В переменных действие — угол гамильтониан (2.3) запишется так:

$$h(I) = [3(\theta_c - \theta_A) k_1^2] / 2\theta_A$$

где $k_1 = k_1(I)$ — функция, обратная монотонной функции

$$I(k_1) = \frac{2\sqrt{3(\theta_c - \theta_A)}}{\pi\theta_A} [E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)]$$

В случае вращений переход к переменным действие — угол задается формулами

$$\psi = \operatorname{am} \left[\frac{2K(|k_2|)}{\pi} W \right], \quad p_\psi = \frac{\sqrt{3(\theta_c - \theta_A)}}{2\theta_A k_2} \operatorname{dn} \left[\frac{2K(|k_2|)}{\pi} W \right] \quad (2.7)$$

Эта замена π -периодична по W . В переменных действие — угол

$$h(I) = \frac{3(\theta_c - \theta_A)}{2\theta_A} \frac{1}{k_2^2}$$

где функция $k_2(I)$ является обратной монотонной функции

$$I(k_2) = \frac{2\sqrt{3(\theta_c - \theta_A)}}{\pi\theta_A k_2} E(|k_2|)$$

В переменных I, W плоские колебания и вращения запишутся в виде

$$I = I_0 = \text{const}, \quad W = \Omega_h(I_0) (t - t_0) + W_0 \quad (h=1, 2) \quad (2.8)$$

$$\Omega_1 = \frac{dh}{dI} = \frac{\pi\sqrt{3(\theta_c - \theta_A)}}{2K(k_1)}, \quad \Omega_2 = \frac{dh}{dI} = \frac{\pi\sqrt{3(\theta_c - \theta_A)}}{2k_2 K(|k_2|)}$$

где Ω_1, Ω_2 — частоты невозмущенных плоских колебаний или вращений спутника соответственно. В (2.6) — (2.8) приняты стандартные обозначения для эллиптических функций и интегралов. [8].

После введения переменных действие — угол задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений спутника сводится к исследованию устойчивости относительно возмущений пространственных переменных $\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi$ и возмущения переменной I_0 , характеризующей рассматриваемое периодическое движение.

3. Введем возмущения q_1, q_2, p_1, p_2 пространственных переменных и возмущение r_3 в исследуемом периодическом движении по формулам $q_1 = \vartheta - \pi/2, q_2 = \varphi, p_1 = p_\vartheta, p_2 = p_\varphi, r_3 = I - I_0$ и, учитывая (2.6) или (2.7), разложим функцию Гамильтона (2.1) в ряд по степеням q_1, q_2, p_1, p_2 и r_3 . При этом $q_j, p_j (j=1, 2)$ — величины первого, а r_3 — второго порядка малости.

Обозначив через K_m функцию, порядок малости которой равен m , получим

$$K = K_2 + K_4 + \dots, \quad K_2 = \Omega(I_0) [r_3 + G_2(q_j, p_j, W)] \quad (3.1)$$

$$K_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial I_0} r_3^2 + L_2(q_j, p_j, W) r_3 + G_4(q_j, p_j, W)$$

$$G_m = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = m} h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \quad (m=2,4) \quad (3.2)$$

$$L_2 = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2} l_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}$$

где ν_j, μ_j — целые неотрицательные числа, а $h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}$ и $l_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}$ — периодические функции W , зависящие от значения переменной действие I_0 как от параметра.

В разложении (3.1) не выписаны члены, порядок малости которых больше четырех. Не равные тождественно нулю коэффициенты в (3.2) вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} h_{2000} &= \frac{1}{2\Omega} [\theta_A f_1^2 - 3(\theta_C - 1) f_2^2], & h_{4100} &= \frac{3(\theta_A - 1)}{\Omega} f_2 f_3, & h_{4001} &= \frac{\theta_A}{\Omega} f_1 \\ h_{0200} &= \frac{1 - \theta_A}{2\Omega} (f_1^2 + 3f_3^2), & h_{0110} &= \frac{1 - \theta_A}{\Omega} f_1, & h_{0020} &= \frac{1}{2\Omega}, & h_{0002} &= \frac{1}{2\Omega} \frac{\theta_A}{\theta_C} \\ h_{4000} &= \frac{\theta_A}{3} f_1^2 + \frac{\theta_C - 1}{2} f_2^2, & h_{3100} &= \frac{1 - \theta_A}{2} f_2 f_3, & h_{3001} &= \frac{5}{6} \theta_A f_1 \\ h_{2200} &= \frac{1 - \theta_A}{2} (f_1^2 - 3f_2^2), & h_{2110} &= \frac{1 - \theta_A}{2} f_1, & h_{2002} &= \frac{\theta_A}{2}, & h_{41300} &= 2(1 - \theta_A) f_2 f_3 \\ h_{41201} &= (1 - \theta_A) f_1, & h_{41111} &= 1 - \theta_A, & h_{0400} &= \frac{\theta_A - 1}{6} (f_1^2 + 3f_3^2) \\ h_{0310} &= \frac{2}{3} (\theta_A - 1) f_1, & h_{0220} &= \frac{\theta_A - 1}{2} \\ l_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} &= \frac{\partial}{\partial I_0} h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}, & f_1 &= p_\psi + \frac{1}{\theta_A}, & f_2 &= \frac{1}{\sqrt{\theta_A}} \sin \psi, & f_3 &= \frac{1}{\sqrt{\theta_A}} \cos \psi \end{aligned}$$

В выражениях (3.4) частота Ω — это либо Ω_1 в случае колебаний, либо Ω_2 в случае вращений, а функции f_1, f_2, f_3 вырезаются по формулам (2.6) или (2.7).

4. Покажем, как осуществить нормализацию линейной системы с гамильтонианом K_2 .

В линейной системе изменение переменных, соответствующих пространственному движению, не зависит от r_3 . Если вместо истинной аномалии t в качестве независимой переменной принять переменную W , то функция Гамильтона, описывающая изменение переменных q_j, p_j , будет вычисляться по формуле (3.2) для G_2 , в которой коэффициенты $h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}$ имеют период τ по независимой переменной, причем в случае колебаний $\tau = \tau_1 = 2\pi$, а в случае вращений $\tau = \tau_2 = \pi$.

Характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом G_2 является возвратным [9, 10] и имеет вид $\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0$, где a_1 — след матрицы $X(\tau)$ ($X(W)$ — матрица фундаментальных решений линейной системы), а a_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка.

В плоскости коэффициентов a_1, a_2 область устойчивости задается системой неравенств

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2 / 4 \quad (4.1)$$

Тогда в области (4.1) мультипликаторы линейной системы определяются формулами $\rho_j = \exp(i\tau\lambda_j)$, $\rho_{j+2} = \exp(-i\tau\lambda_j)$, где $\pm i\lambda_j$ — характеристические показатели. Будем считать, что среди мультипликаторов нет равных.

Это означает, что величины λ_j не связаны ни одним из резонансных соотношений (n_3 — целые числа).

$$\tau\lambda_1 = \pi n_3, \quad \tau\lambda_2 = \pi n_3, \quad \tau(\lambda_1 \pm \lambda_2) = 2\pi n_3 \quad (4.2)$$

Согласно [11] при $\tau(\lambda_1 - \lambda_2) = 2\pi n_3$ линейная система устойчива, а остальные резонансные соотношения (4.2) соответствуют границе области неустойчивости. Пространство параметров задачи разбивается поверхностями (4.2) на некоторое количество областей. Часть этих областей составляет множество параметров задачи, при которых периодическое движение неустойчиво. Остальные области будут областями устойчивости линейной задачи. При этом поверхности $\tau(\lambda_1 - \lambda_2) = 2\pi n_3$ могут быть граничными поверхностями двух соседних областей устойчивости.

Величины λ_1 и λ_2 связаны с коэффициентами характеристического уравнения a_1 и a_2 соотношениями

$$a_1 = 2(\cos \tau\lambda_1 + \cos \tau\lambda_2), \quad a_2 = 2 + 4 \cos \tau\lambda_1 \cos \tau\lambda_2$$

Отсюда следует, что $\cos \tau\lambda_1$ и $\cos \tau\lambda_2$ удовлетворяют уравнению

$$4z^2 - 2a_1z + (a_2 - 2) = 0 \quad (4.3)$$

Пусть z_1, z_2 — корни этого уравнения

$$z_{1,2} = (a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8})/4 \quad (4.4)$$

Из (4.4) величины λ_1, λ_2 однозначно не определяются. Эту неоднозначность можно устранить, если функция Гамильтона G_2 содержит некоторый малый параметр ε , при нулевом значении которого линейная система становится автономной, а при малых $|\varepsilon| \neq 0$ зависимость G_2 от ε , например, аналитическая. В рассматриваемой задаче такой параметр можно ввести во многих случаях.

Зафиксируем какую-либо область устойчивости, ограниченную поверхностями (4.2). При $\varepsilon = 0$ в этой области нетрудно вычислить характеристические показатели $\pm i\lambda_1^\circ, \pm i\lambda_2^\circ$, так как они будут корнями определяющего уравнения системы с постоянными коэффициентами. С другой стороны, $\cos \tau\lambda_1^\circ, \cos \tau\lambda_2^\circ$ должны удовлетворять уравнению (4.3). Пусть

$$z_{1,2}^\circ = \frac{1}{2} \{ (\cos \tau\lambda_1^\circ + \cos \tau\lambda_2^\circ) \pm |\cos \tau\lambda_1^\circ - \cos \tau\lambda_2^\circ| \}$$

Определим величины z_1^*, z_2^* таким образом:

$$\begin{aligned} z_1^* &= z_1, \quad z_2^* = z_2 \quad \text{при } \cos \tau\lambda_1^\circ \geq \cos \tau\lambda_2^\circ \\ z_1^* &= z_2, \quad z_2^* = z_1 \quad \text{при } \cos \tau\lambda_1^\circ < \cos \tau\lambda_2^\circ \end{aligned} \quad (4.5)$$

Далее, используя непрерывность характеристических показателей по ε [11], получим однозначное выражение величин λ_1, λ_2 через коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{1}{\tau} [2\pi E_j + \arccos z_j^*] & \text{при } \frac{2\pi}{\tau} E_j \leq \lambda_j^\circ \leq \frac{2\pi}{\tau} \left(E_j + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{1}{\tau} [2\pi (E_j + 1) + \arccos z_j^*] & \text{при } \frac{2\pi}{\tau} \left(E_j + \frac{1}{2} \right) < \lambda_j^\circ < \frac{2\pi}{\tau} (E_j + 1) \end{cases} \quad (4.6)$$

Здесь E_j — целая часть числа $\lambda_j^\circ \tau / 2\pi$, величины z_j^* вычисляются согласно (4.4), (4.5).

Пусть линейная система с гамильтонианом G_2 устойчива. Проведя нормализующее преобразование по алгоритму [12] и возвратившись к старой независимой переменной — истинной аномалии t , получим, что члены вто-

рого порядка в гамильтониане возмущенного движения будут иметь следующую нормальную форму (обозначения для новых переменных оставляют прежними):

$$K_2 = \Omega(I_0) [r_3 + 1/2\lambda_1(q_1^2 + p_1^2) + 1/2\lambda_2(q_2^2 + p_2^2)] \quad (4.7)$$

5. Для решения вопроса об устойчивости в строгом нелинейном смысле нормализацию функции Гамильтона необходимо продолжить. В рассматриваемой задаче нахождение коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона с точностью до членов четвертого порядка сводится к усреднению формы K_4 , полученной из (3.4) после проведения линейной нормализации, по быстрым фазам движения, которое определяется гамильтонианом (4.7).

Пусть параметры задачи таковы, что линейная система устойчива и отсутствуют резонансы четвертого порядка, т. е. выражение $(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2)\tau / 2\pi$ не будет целым числом для любых целых чисел n_1, n_2 , сумма модулей которых равна четырем. В полярных координатах r_j, φ_j , определяемых формулами

$$q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j=1, 2)$$

нормализованный до членов четвертого порядка гамильтониан имеет вид

$$K = L + N + K^*(r_1, r_2, r_3, \varphi_1, \varphi_2, W), \quad L = \Omega(I_0) [\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + r_3] \quad (5.1)$$

$$N = c_{200} r_1^2 + c_{110} r_1 r_2 + c_{101} r_1 r_3 + c_{020} r_2^2 + c_{011} r_2 r_3 + c_{002} r_3^2$$

где функция K^* имеет порядок малости, не меньший пятого, и периоды 2π и τ по переменным φ_1, φ_2 и W соответственно; c_{ijk} — вещественные числа, зависящие от параметров задачи.

Согласно [13], если при $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ хотя бы один из определителей

$$D_3 = \det \left\| \frac{\partial^2 N}{\partial r_i \partial r_j} \right\|, \quad D_4 = \det \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 N}{\partial r_i \partial r_j} & \frac{\partial L}{\partial r_i} \\ \frac{\partial L}{\partial r_j} & 0 \end{array} \right\| \quad (5.2)$$

отличен от нуля, то имеет место устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий.

Если при $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ и любом r_3 система уравнений

$$L = 0, \quad N = 0 \quad (5.3)$$

имеет только нулевое решение $r_1 = r_2 = 0$, то согласно [14] будет иметь место формальная устойчивость (устойчивость в любом конечном порядке [15]) исследуемого периодического движения.

Если же параметры задачи таковы, что имеет место резонанс четвертого порядка, т. е.

$$\tau(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2) = 2\pi n_3, \quad |n_1| + |n_2| = 4 \quad (5.4)$$

то функцию Гамильтона нельзя привести к виду (5.1), а нормальная форма будет иметь вид ($A_{n_1 n_2 n_3}$ — вещественные неотрицательные числа, зависящие от параметров задачи)

$$K = L + N + A_{n_1 n_2 n_3} \sqrt{r_1^{n_1} r_2^{n_2}} \sin \left[\frac{2\pi n_3}{\tau} W - (n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2) \right] + \dots \quad (5.5)$$

Если в (5.5) $n_1 n_2 < 0$, то согласно [15] имеет место (при отсутствии других резонансов) формальная устойчивость. Если же $n_1 n_2 \geq 0$, то при выполнении неравенства

$$A_{n_1 n_2 n_3} \sqrt{|n_1|^{2n_1} |n_2|^{2n_2}} > \left| N \left(n_1, n_2, -\frac{2\pi}{\tau} n_3 \right) \right| \quad (5.6)$$

имеет место неустойчивость по Ляпунову, а при обратном знаке в последнем неравенстве — устойчивость при учете в разложении функции Гамильтона членов до четвертого порядка малости включительно [16].

6. Пусть изучаемые периодические движения спутника представляют собой плоские колебания с амплитудой ψ_0 ($0 < \psi_0 < \pi/2$). Тогда гамильтониан (3.1) возмущенного движения содержит три параметра: θ_A , θ_C и ψ_0 . Вместо инерционных параметров θ_A , θ_C удобно ввести параметры I_1 , I_2 по формулам

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{C-B}{A} = \frac{\theta_C - 1}{\theta_A} \\ I_2 &= \frac{B-A}{C} = \frac{1 - \theta_A}{\theta_C} \end{aligned} \quad (6.1)$$

На плоскости I_1 , I_2 область физически допустимых значений параметров представляет собой квадрат $|I_k| \leq 1$ ($k=1, 2$). Учитывая, что с самого начала принималось $\theta_C > \theta_A$, получим, что область изменения параметров I_1 , I_2 представляет собой правую верхнюю часть квадрата $|I_k| \leq 1$.

Эта область изображена на фиг. 1. Осями координат она разбивается на два треугольника, соответствующих случаям $I_1 > 0$ и $I_2 > 0$, и один квадрат $I_1 > 0$, $I_2 > 0$. При этом треугольник $I_2 > 0$ соответствует колебаниям (вращениям) спутника вокруг главной центральной оси максимального момента инерции ($B > C > A$), треугольник $I_1 > 0$ — вокруг оси минимального момента инерции ($C > A > B$), а квадрат $I_1 > 0$, $I_2 > 0$ соответствует колебаниям (или вращениям) относительно оси среднего момента инерции ($C > B > A$).

Рассмотрим предельный случай малых плоских колебаний — положение равновесия (амплитуда $\psi_0 = 0$). На фиг. 1 заштрихованы области, в которых положение относительного равновесия неустойчиво. Цифрой 1 на фиг. 1 обозначена область, в которой положение равновесия устойчиво по Ляпунову, а цифрой 2 обозначена область, в которой положение равновесия устойчиво в первом (линейном) приближении (см. [1], где эти области изображены в плоскости параметров, отличающихся от I_1 , I_2). Подробное исследование задачи об устойчивости относительного равновесия трехосного спутника для значения параметров из области 2 приведено в [7].

В областях 1 и 2 квадратичная часть функции Гамильтона в окрестности положения равновесия приводится в виду $\omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2 + \omega_3 r_3^2$, где

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= (a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2, & \omega_3^2 &= 3(I_1 + I_2)/(1 + I_1 I_2) \\ a &= 1 + 3I_2 - I_1 I_2, & b &= -4I_1 I_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим устойчивость в первом приближении плоских колебаний спутника при малых значениях амплитуды колебаний ψ_0 . При малых ψ_0 имеем $k_1 = \sin \psi_0 = \psi_0 + O(\psi_0^3)$. Используя разложения эллиптических функций и интегралов при малых значениях их модуля [8], получим, что замена переменных (2.6) имеет вид

$$\psi = \psi_0 \sin W + O(\psi_0^3), \quad p_\psi = \psi_0 \frac{\omega_3}{\theta_A} \cos W + O(\psi_0^3)$$

Используя эти выражения, получим G_2 в формуле (3.2) в виде $G_2 = G_2^\circ + O(\psi_0)$, где

$$G_2^\circ = \frac{1}{\omega_3} \left[\frac{1}{2\theta_A} q_1^2 + q_1 p_2 + \frac{(1-\theta_A)(1+3\theta_A)}{2\theta_A^2} q_2^2 + \frac{1-\theta_A}{\theta_A} q_2 p_1 + \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\theta_A}{\theta_C} p_2^2 \right]$$

Функция $\omega_3 G_2^\circ$ представляет собой квадратичную часть гамильтониана пространственного возмущенного движения в окрестности положения относительного равновесия [7]. Поэтому величины λ_1, λ_2 , входящие в нормальную форму (4.7), будут при $\psi_0 = 0$ определяться формулами

$$\lambda_1 = \lambda_1^\circ = \omega_1 / \omega_3, \quad \lambda_2 = \lambda_2^\circ = \pm \omega_2 / \omega_3$$

Здесь верхний знак относится к области 1, а нижний — к области 2.

При малых значениях ψ_0 в линейной задаче возможно явление параметрического резонанса. Параметрический резонанс возникает при значениях параметров I_1, I_2 , близких к тем значениям, для которых при целых n_3 имеют место резонансы второго порядка [11]:

$$2\lambda_1^\circ = n_3, \quad 2\lambda_2^\circ = n_3, \quad \lambda_1^\circ + \lambda_2^\circ = n_3 \quad (6.2)$$

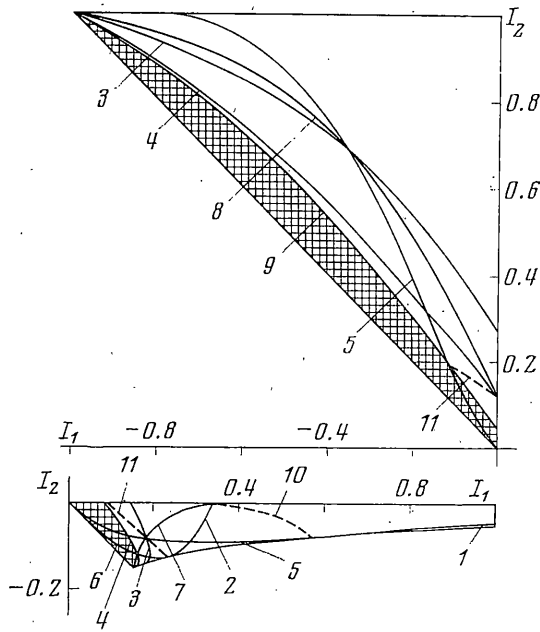
На фиг. 2 изображены кривые $2\lambda_1^\circ = n_3$ ($n_3 = 1, 2, 3, 4$ соответственно для кривых 1–4), $2\lambda_2^\circ = n_3$ ($n_3 = 1, 2$ для кривых 5, 6) и $\lambda_1^\circ + \lambda_2^\circ = n_3$ ($n_3 = 1, 2, 3$ для кривых 7–9). При $\psi_0 \neq 0$ из этих кривых исходят области неустойчивости. Отметим, что количество кривых (6.2) счетно. Это связано с тем, что при приближении к прямой $I_1 + I_2 = 0$ величина ω_3 стремится к нулю, и соответственно соотношения (6.2) могут выполняться при сколь угодно больших n_3 . В связи с этим для значений параметров I_1, I_2 , лежащих вблизи прямой $I_1 + I_2 = 0$, исследование не проводилось. Соответствующие области изменения параметров на фиг. 2 заштрихованы двойной штриховкой.

Пунктирными линиями (на фиг. 2) изображены кривые $\lambda_1^\circ - \lambda_2^\circ = n_3$ (кривые 10, 11 соответственно для $n_3 = 1, 2$).

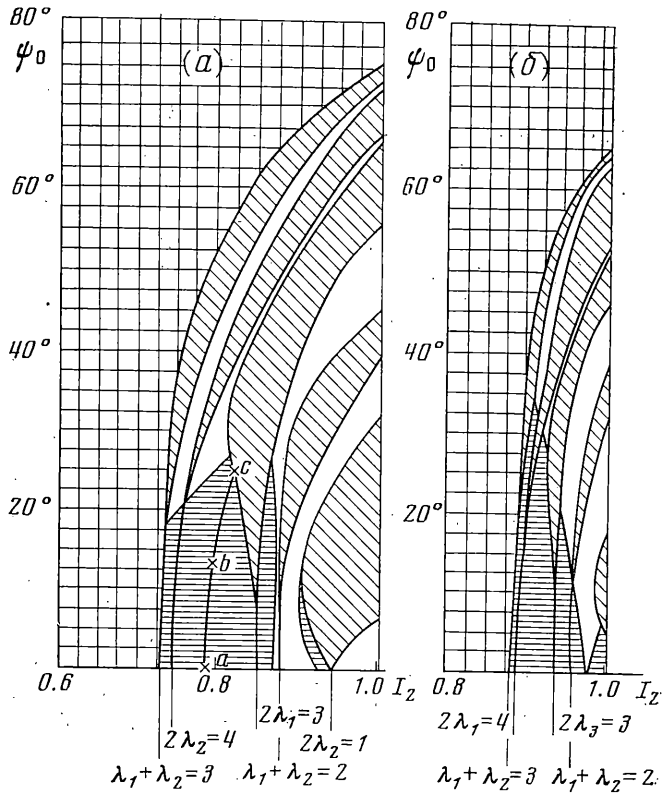
При малых значениях амплитуды ψ_0 и параметрах спутника, не лежащих в областях параметрического резонанса или на поверхностях $\lambda_1 - \lambda_2 = n_3$, было проведено аналитическое исследование устойчивости в строгой нелинейной постановке. Необходимые при этом выкладки очень громоздки и здесь не приводятся.

При произвольных значениях амплитуды колебаний спутника необходимо проводить численное исследование при помощи ЭВМ. Полученные при этом результаты изображались на плоских сечениях трехмерного пространства параметров I_1, I_2, ψ_0 по одному из инерционных параметров I_1, I_2 . Два таких сечения при $I_1 = -0.6$ (а) и $I_1 = -0.8$ (б) изображены на фиг. 3.

При малых значениях ψ_0 из плоскости $\psi_0 = 0$ исходят области параметрического резонанса (фиг. 2) и при увеличении ψ_0 они, вообще говоря, расширяются, переплетаются и ведут себя весьма причудливым образом. На фиг. 3 области параметрического резонанса (области неустойчивости)



Фиг. 2



Фиг. 3

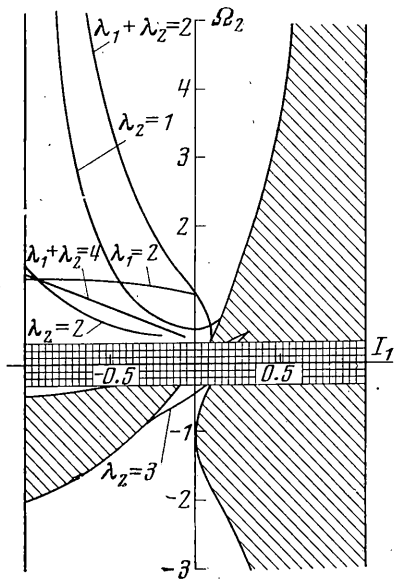
заштрихованы наклонной штриховкой. Так как количество этих областей счетно, то, естественно, исследование проводилось не во всей плоскости физической осуществимости параметров. Области, которые не были подробно исследованы, на фиг. 3 заштрихованы двойной штриховкой.

В областях устойчивости в первом приближении было проведено нелинейное исследование. При численном интегрировании эллиптические интегралы и функции вычислялись итерационным способом [17]. Оказалось, что в областях устойчивости линейной задачи, изображенных на фиг. 3, определители (5.2) одновременно в нуль не обращаются. Следовательно, во всех областях имеет место устойчивость для большинства начальных условий (исключая резонансные кривые четвертого порядка).

Был также выяснен вопрос о формальной устойчивости. Рассматриваемое приближение (учет в гамильтониане членов не выше четвертого порядка малости) позволяет установить, что в областях устойчивости линейной задачи имеет место формальная устойчивость всюду, кроме тех частей этих областей, которые на фиг. 3 заштрихованы горизонтальной штриховкой (резонансные кривые четвертого порядка снова исключаются).

По-видимому, в этих областях почти всюду тоже будет формальная устойчивость, но для окончательного решения этого вопроса необходимо привлекать члены более высокого порядка в гамильтониане возмущенного движения.

При исследовании устойчивости для значений параметров, принадлежащих резонансным кривым четвертого порядка, неустойчивость была обнаружена только на части *bc* резонансной кривой $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1$ (фиг. 3, *a*, кривая *abc*), соответствующей амплитудам колебаний $\psi_0 > 12^\circ$. На части *ab* этой кривой и на всех остальных резонансных кривых четвертого порядка (из-за большого количества эти кривые не изображены) в рассматриваемом приближении имеет место устойчивость.



Фиг. 4

7. Рассмотрим устойчивость плоских вращений спутника. В качестве параметров задачи примем I_1, I_2 и величину средней угловой скорости вращения спутника Ω_2 , определяемую по формуле (2.8). Инерционные параметры I_1, I_2 принадлежат изображенному на фиг. 1 треугольнику, а частота Ω_2 может быть любой.

Для устранения неоднозначности в определении характеристических показателей рассматривались: случай быстрых плоских вращений ($\epsilon = 1/|\Omega_2| \rightarrow 0$) и случай вращений почти симметричного спутника ($\epsilon = I_1 + I_2 \rightarrow 0$).

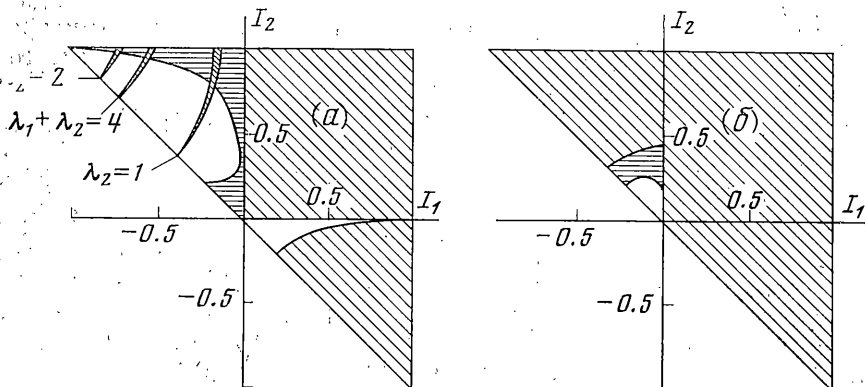
На фиг. 4 изображены области устойчивости (в первом приближении) плоских вращений динамически симметричного спутника [1] в плоскости параметров $\Omega_2, I_1 = -I_2$. Области неустойчивости заштрихованы.

На фиг. 4 также изображены резонансные кривые второго порядка, из которых при малых ϵ исходят области параметрического резонанса. При малых значениях $|\Omega_2|$ исследование устойчивости вращений не проводилось, так как при таких значениях параметров ситуация аналогична случаю малых значений величины $I_1 + I_2$ при исследовании устойчивости

колебаний (см. п. 6). Более подробно результаты асимптотических исследований описаны в ¹.

В случае конечных значений средней угловой скорости вращения спутника Ω_2 или в случае вращений несимметричного спутника необходимо численное исследование. Предварительно было проведено исследование устойчивости в первом приближении. Результаты представлялись графически на плоских сечениях $\Omega_2 = \text{const}$ трехмерного пространства параметра. Два таких сечения изображены на фиг. 5 (а — $\Omega_2 = 1$, б — $\Omega_2 = -1$).

Здесь при $\Omega_2 = \pm 1$ и произвольных I_1, I_2 области параметрического резонанса заштрихованы наклонной штриховкой. Методика нелинейного ис-



Фиг. 5

следования в случае вращений та же, что и в случае колебаний. При параметрах $I_1, I_2, \Omega_2 = \pm 1$ (см. фиг. 5), принадлежащих областям устойчивости линейной задачи и не попадающих на резонансные поверхности четвертого порядка, имеет место устойчивость для большинства начальных условий.

В областях, заштрихованных горизонтальной штриховкой, не выполнены достаточные условия формальной устойчивости п. 5. На резонансных кривых четвертого порядка неустойчивости обнаружено не было и эти кривые не изображены.

Таким образом, для любого набора параметров спутника разработан алгоритм решения задачи об орбитальной устойчивости его плоских колебаний и вращений около центра масс на круговой орбите (этот алгоритм применим не только для решения данной конкретной механической задачи).

Построенный алгоритм использован при решении вопроса об устойчивости для некоторых значений параметров спутника. Полученные выводы дают достаточно полное представление о картине устойчивости для всех параметров задачи.

Поступила 17 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
2. Брюно А. Д. Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов. Матем. сб., 1970, т. 84, вып. 2.

¹ Маркеев А. П., Соколовский А. Г. Об устойчивости периодических движений несимметричного спутника на круговой орбите. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1975. препринт № 58.

3. Маркеев А. П. Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите. Космические исследования, 1975, т. 13, вып. 3.
4. Kane T. R. Attitude stability of earth-pointing satellites. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 4.
5. Kane T. R., Shippy D. J. Attitude stability of a spinning unsymmetrical satellite in a circular orbit. J. Astronaut. sci., 1963, vol. 10, No. 4.
6. Meirovitch L., Wallace F. Attitude instability regions of a spinning unsymmetrical satellite in a circular orbit. J. Astronaut. sci., 1967, vol. 14, No. 3.
7. Маркеев А. П., Сокольский А. Г. К задаче об устойчивости относительного равновесия спутника на круговой орбите. Космические исследования, 1975, т. 13, вып. 2.
8. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1941.
9. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1956.
10. Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., т. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1954.
11. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
12. Маркеев А. П. О нормализации гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
13. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5.
14. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
15. Moser J. New aspects in a theory of stability of hamiltonian systems. Commun. Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1.
16. Хазин Л. Г. Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
17. Bulirsch R. Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions. Numer. Math., 1965, Bd 7, H. 1.