

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕГО ТВЕРДОГО ТЕЛА  
ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Г. МАРТЫНЕНКО

(Москва)

Задачи о движении твердого тела в магнитном поле представляют интерес в связи с проблемами создания гироскопов с неконтактными подвесами [1], с вопросами динамики космических аппаратов [2], с другими техническими приложениями [3].

Этим задачам посвящено значительное число работ. В большинстве этих работ [4-8] при расчете момента сил, действующих на проводящее твердое тело в магнитном поле, предполагается, что вращение твердого тела происходит с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси. От этого предположения свободна работа [9], в которой подсчитан момент сил, действующих на твердое тело, движущееся произвольным образом в изменяющемся во времени магнитном поле. Однако полученные в [9] формулы для момента справедливы для достаточно малых скоростей вращения твердого тела и малых частот изменения поля, т. е. для случая, когда «глубина проникновения» магнитного поля в проводник существенно больше его размеров.

Попытка рассмотрения задачи о движении проводящего гироскопа в магнитном поле при произвольных глубинах проникновения магнитного поля в проводник предпринята в работе [10]. Однако выписанные в [10] выражения для моментов в общем случае движения твердого тела неверны, так как при решении электродинамической задачи в [10] повторены выкладки из [5], справедливые только для случая вращения твердого тела с постоянной угловой скоростью.

В данной работе задача о движении твердого тела в магнитном поле ставится как задача исследования совместной системы уравнений электродинамики, записанных в квазистационарном приближении, и уравнений движения твердого тела около неподвижной точки, которая совпадает с центром масс тела. Глубина проникновения магнитного поля в проводник может быть произвольной.

Работа может рассматриваться как продолжение [1], где исследована динамика раскрутки гироскопа в неконтактном подвесе при больших глубинах проникновения магнитного поля в проводник.

1. Рассматривается абсолютно твердое тело, ограниченное гладкими поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . Тело находится в однородном магнитном поле, напряженность которого  $\mathbf{H}^\infty(t)$ . Внутренность тела обозначим  $G_1$ , область, занятую проводящим материалом, —  $G_2$ , пространство, окружающее твердое тело, —  $G_0$  (фигура).

Пусть  $\xi_1\xi_2\xi_3$  и  $x_1x_2x_3$  — правые ортогональные трехгранники с началом в центре масс твердого тела  $O$ , который является неподвижной точкой. Трехгранник  $\xi$  неизменно ориентирован в пространстве, трехгранник  $x$  жестко связан с твердым телом, его оси совпадают с главными осями инерции тела. Матрицу ориентации трехгранника  $x$  относительно  $\xi$  обозначим через  $B: x = B\xi$ .

Решение задачи будем проводить при следующих допущениях: твердое тело имеет ось динамической симметрии, т. е. его центральный эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения; скорости движения любой точки твердого тела малы по сравнению со скоростью света  $c$ , и выполнены условия применимости теории квазистационарного электромагнитного поля [5]; материал твердого тела, занимающий область  $G_2$ , однороден, его

проводимость  $\lambda$ , магнитная проницаемость  $\mu=1$ , в областях  $G_0, G_1$ , окружающих  $G_2$ , создан идеальный вакуум; моменты, действующие на тело из-за наличия внешних электрических полей, пренебрежимо малы; вектор напряженности внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}^\infty(t)$  может быть представлен в неподвижном трехграннике  $\xi$  в виде конечной суммы

$$\mathbf{H}^\infty(t) = \operatorname{Re} \sum_{p=1}^n \mathbf{H}_p^\infty \exp(-i\omega_p t) \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{H}_p^\infty$  — некоторые известные постоянные комплексные векторы. Представление (1.1) оказывается удобным для одновременного рассмотрения случаев постоянного, пульсирующего, вращающегося однородных магнитных полей. Обозначим через  $\mathbf{H}^{(j)}(\mathbf{r}, t)$  напряженность магнитного поля при  $\mathbf{r} \in G_j$  ( $j=0, 1, 2$ ).

При сделанных допущениях уравнения Максвелла в трехграннике  $x$ , жестко связанном с телом, имеют вид [3, 9]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(j)} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^{(j)} = 0 \quad (j=0,1) \\ \Delta \mathbf{H}^{(2)} &= \frac{4\pi\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\partial/\partial t$  означает производную по времени в связанной с ротором системе координат.

Граничные условия для вектора напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H}^{(1)}|_{s_1} = \mathbf{H}^{(2)}|_{s_1}, \quad \mathbf{H}^{(2)}|_{s_2} = \mathbf{H}^{(0)}|_{s_2}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = B\mathbf{H}^\infty \quad (1.3)$$

Используя выражение для тензора натяжений Максвелла [5], запишем уравнение для кинетического момента  $\mathbf{L}$  твердого тела в проекциях на оси неподвижного трехгранника  $\xi$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{1}{4\pi} B^T \oint_S \mathbf{r} \times \left[ (\mathbf{H}^{(0)}, \mathbf{n}) \mathbf{H}^{(0)} - \frac{1}{2} (H^{(0)})^2 \mathbf{n} \right] dS \quad (1.4)$$

Здесь интегрирование производится по любой поверхности  $S$ , охватывающей тело и не содержащей источников, создающих электромагнитное поле,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S$ ,  $T$  — знак транспонирования.

Вектор кинетического момента твердого тела  $\mathbf{L} = B^T I_x \boldsymbol{\Omega}_x$ ,  $I_x$  — тензор инерции твердого тела в связанных осях  $x$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_x$  — вектор угловой скорости твердого тела в проекциях на оси трехгранника  $x$ .

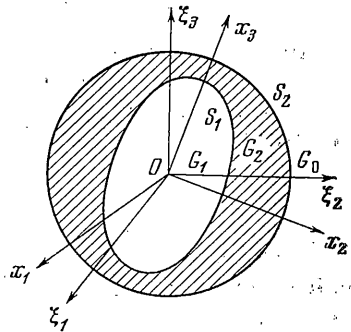
Кинематическое уравнение

$$\frac{dB}{dt} B^T = \begin{vmatrix} 0 & \Omega_{x_3} & -\Omega_{x_2} \\ -\Omega_{x_3} & 0 & \Omega_{x_1} \\ \Omega_{x_2} & -\Omega_{x_1} & 0 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Начальные условия для выписанной системы уравнений

$$\mathbf{H}^{(j)}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \mathbf{H}^{0j}(\mathbf{r}) \quad (j=0, 1, 2), \quad \mathbf{L}|_{t=0} = \mathbf{L}^0, \quad B|_{t=0} = B^0 \quad (1.6)$$

Таким образом, исследование поставленной задачи о движении проводящего немагнитного твердого тела под действием момента, создаваемого вихревыми токами, индуцируемыми в теле, заключается в совместном рас-



смотрении краевой задачи для уравнений Максвелла (1.2) и задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4), (1.5).

Рассмотрим вопрос о введении малого параметра и применении асимптотических методов к уравнениям (1.1) — (1.6). Обозначим через  $L_*$ ,  $M_*$  максимальные значения соответственно кинетического момента твердого тела и момента сил, создаваемых магнитным полем, через  $I_3$ ,  $I_1$  соответственно осевой и экваториальный моменты инерции тела. Времена  $T_n = I_1/L_*$  и  $T_p = L_*/M_*$  назовем нутационным и прецессионным временами задачи. Выбирая в качестве единицы измерения времени нутационное время  $T_n$  и проводя аналогично [1] процедуру нормализации уравнений, приведем систему (1.1) — (1.6) к безразмерному виду. Сохраняя за безразмерными переменными их обозначения, получим

$$\mathbf{L} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_S \mathbf{r} \times \left[ (\mathbf{H}^{(0)}, \mathbf{n}) \mathbf{H}^{(0)} - \frac{1}{2} (H^{(0)})^2 \mathbf{n} \right] dS, \quad \varepsilon = \frac{T_n}{T_p} \quad (1.7)$$

Будем считать в дальнейшем, что параметр  $\varepsilon$  мал и поставим вопрос об асимптотическом поведении решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Для дальнейшего необходимо определить решение невозмущенной системы, получаемой из (1.1) — (1.3), (1.5) — (1.7) при  $\varepsilon = 0$

$$\mathbf{L} = 0 \quad (2.1)$$

Как известно, при  $\mathbf{L} = \text{const}$  движение симметричного твердого тела около неподвижной точки есть частный случай движения Эйлера — Пуансо — регулярная прецессия. При этом направляющие косинусы, образующие матрицу  $B$ , будут периодическими функциями времени. Для нахождения зависимости  $B$  от времени введем оскулирующие переменные [2]  $L$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , причем последовательность поворотов на угол  $\sigma$  вокруг оси  $\xi_3$ , на угол  $\rho$  вокруг второй, на угол  $\psi$  вокруг третьей, на угол  $\vartheta$  вокруг первой и на угол  $\varphi$  вокруг третьей осей промежуточных трехгранников переводит трехгранник  $\xi$  в  $x$ . Матрица  $B^T$  ( $\xi = B^T x$ ) представляется как произведение следующих трех матриц:

$$B^T = \begin{vmatrix} \cos \sigma \cos \rho & -\sin \sigma & \cos \sigma \sin \rho \\ \sin \sigma \cos \rho & \cos \sigma & \sin \sigma \sin \rho \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \\ \times \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

При выполнении (2.1) углы  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\vartheta$  в (2.2) будут постоянными,  $\psi$  и  $\varphi$  будут линейными функциями времени

$$\psi = lt + \psi^0, \quad \varphi = -vt + \varphi^0, \quad l = \frac{L}{I_1}, \quad v = \frac{l\kappa \cos \vartheta}{1 + \kappa}, \quad \kappa = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad (2.3)$$

Принимая во внимание (2.2), (2.3), при  $\varepsilon = 0$  приходим к электродинамической задаче (1.2) с начальными условиями

$$\mathbf{H}^{(j)}(\mathbf{r}, t) |_{t=0} = \mathbf{H}^{(j)}(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

с граничными условиями на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$

$$\mathbf{H}^{(1)} |_{S_1} = \mathbf{H}^{(2)} |_{S_1}, \quad \mathbf{H}^{(2)} |_{S_2} = \mathbf{H}^{(0)} |_{S_2} \quad (2.5)$$

и с граничным условием на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \sum_{p=1}^n B(\sigma, \rho, \vartheta, \exp(\pm i l t), \exp(\pm i v t)) \mathbf{H}_p^\infty \exp(-i \omega_p t) \quad (2.6)$$

Последнее условие запишем в виде

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \sum_{p=1}^m \mathbf{B}_p^\infty \exp(-i \omega_p t) \quad (m > n) \quad (2.7)$$

Здесь  $\mathbf{B}_p^\infty$  — известные векторы, зависящие от  $\sigma, \rho, \vartheta$  как от параметров,  $\omega_p$  — известные функции  $l$  и  $\vartheta$ .

В силу линейности задачи (1.2), (2.4) — (2.6) ее решение можно искать в виде следующей суммы:

$$\mathbf{H}^{(j)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p=1}^m \mathbf{H}^{(pj)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_c^{(j)}(\mathbf{r}, t) \quad (j=0, 1, 2) \quad (2.8)$$

Функции  $\mathbf{H}^{(pj)}$  удовлетворяют уравнениям (1.2), условию (2.5) и граничному условию на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H}^{(p0)}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \mathbf{B}_p^\infty \exp(-i \omega_p t) \quad (p=1, \dots, m) \quad (2.9)$$

Функция  $\mathbf{H}_c^{(j)}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнениям (1.2), условию (2.5), граничному условию на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{H}_c^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{H}_c^{(0)}(\mathbf{r}, t) = O(1/r^q) \quad (q \geq 2) \quad (2.10)$$

и начальному условию

$$\mathbf{H}_c^{(j)}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \mathbf{H}^{(0j)}(\mathbf{r}) - \sum_{p=1}^m \mathbf{H}^{(pj)}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} \quad (2.11)$$

Функции  $\mathbf{H}^{(pj)}(\mathbf{r}, t)$  определяются не единственным образом, поскольку они не подчинены никаким начальным условиям. В силу периодичности условия (2.9)  $\mathbf{H}^{(pj)}(\mathbf{r}, t)$  можно искать как периодическую функцию времени частоты  $\omega_p$  и, следовательно, свести нахождение  $\mathbf{H}^{(pj)}(\mathbf{r}, t)$  к решению стационарной задачи.

Для вектора  $\mathbf{H}_c^{(j)}(\mathbf{r}, t)$  имеет место оценка, полученная в работе [9]:

$$\sum_{j=0}^2 \int_{G_j} (H_c^{(j)})^2 dG \leq \left[ \sum_{j=0}^2 \int_{G_j} (H_c^{(j)})^2 dG \right]_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{T_e}\right) \\ \frac{1}{T_e} = \frac{2}{\lambda \sqrt{3}} (2\pi)^{-1/2} v_2^{-2/3} c^2 \quad (2.12)$$

Здесь используется объемный интеграл, взятый от квадрата модуля вектора  $\mathbf{H}_c^{(j)}(\mathbf{r}, t)$  по области  $G_j$ ,  $dG$  — элемент объема,  $v_2$  — объем области  $G_2$ , занятой проводящим материалом ротора.

В [9] показано, что из оценки (2.12) вытекает единственность решения (2.8) задачи (1.2), (2.4) — (2.6).

Предположим, что время  $T_e$  в (2.12) не превосходит нутационного времени  $T_n$ . Тогда при проведении процедуры осреднения вдоль решения

(2.8) предел правой части (1.7) при  $t \rightarrow \infty$  от членов, содержащих  $\mathbf{H}_c^{(j)}$ , будет равен нулю и в нахождении явного вида  $\mathbf{H}_c^{(j)}$  нет необходимости.

При рассмотрении стационарных краевых задач, определяющих  $\mathbf{H}^{(pj)}$ , ограничимся частным случаем, когда поверхности  $S_1$  и  $S_2$  — сферы соответственно радиусов  $r_1$  и  $r_2$ . Процедура решения подобных задач при помощи стандартного метода разделения переменных достаточно подробно изложена в литературе [4-7], поэтому приведем только окончательный результат  $\mathbf{H}^{(pj)} = \text{rot } \mathbf{A}^{(pj)}$ , где  $\mathbf{A}^{(pj)}$  — векторный потенциал магнитного поля, определяемый формулой

$$\mathbf{A}^{(pj)} = [\mathbf{B}_p \times \mathbf{n}] f_{pj}(r) \exp(-i\omega_p t) \quad (j=0, 1, 2; p=1, \dots, m)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль  $\mathbf{r}$ ,  $f_{pj}(r)$  — скалярные функции вида

$$f_{p0} = \frac{1}{2} r + \alpha(\omega_p) r^{-2}, \quad f_{p1} = C_1 r, \quad k_p^2 = i4\pi\lambda\omega_p c^{-2}$$

$$f_{p2} = \frac{C_2}{k_p r} \left( \frac{\sin k_p r}{k_p r} - \cos k_p r \right) + \frac{D_2}{k_p r} \left( \frac{\cos k_p r}{k_p r} + \sin k_p r \right)$$

Здесь  $\alpha(\omega_p)$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  — произвольные постоянные, однозначно определяемые из граничных условий. Для дальнейшего нужно только явное выражение для коэффициента  $\alpha(\omega_p)$ , представляющего собой коэффициент поляризуемости тела. (В силу симметрии рассматриваемого случая тензор поляризуемости сводится к скаляру.) Действительная и мнимая часть  $\alpha(\omega)$  определяется из уравнений

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$$

$$\alpha = \frac{r_2 [k^4 r_1^2 r_2^2 - 3k^2(r_1^2 + r_2^2 - 3r_1 r_2) + 9] \text{tg } k(r_2 - r_1) - 3k(r_2 - r_1)(k^2 r_1 r_2 + 3)}{2k^2 (3 - k^2 r_1^2) \text{tg } k(r_2 - r_1) + 3kr_1}$$

$$k = \frac{1+i}{\delta} = (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\lambda\omega}}{c} \quad (2.13)$$

Здесь  $\delta$  — «глубина проникновения» магнитного поля в проводник.

Полагая в (2.13)  $r_1 = 0$ , получаем известное выражение для коэффициента поляризуемости проводящего шара радиуса  $r_2$  в однородном периодическом внешнем поле [5]:

$$\alpha'(\omega) = \frac{r_2^3}{2} \left[ -1 + \frac{3}{2\sqrt{\eta\omega}} \frac{\text{sh } 2\sqrt{\eta\omega} - \sin 2\sqrt{\eta\omega}}{\text{ch } 2\sqrt{\eta\omega} - \cos 2\sqrt{\eta\omega}} \right] \quad (2.14)$$

$$\alpha''(\omega) = \frac{3r_2^3}{4} \left[ -\frac{1}{\eta\omega} + \frac{1}{\sqrt{\eta\omega}} \frac{\text{sh } 2\sqrt{\eta\omega} + \sin 2\sqrt{\eta\omega}}{\text{ch } 2\sqrt{\eta\omega} - \cos 2\sqrt{\eta\omega}} \right] \quad n = \frac{2\pi\lambda r_2^2}{c^2}$$

Устремляя в (2.13)  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\delta \rightarrow 0$ ), получаем асимптотические формулы для  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ , совпадающие с соответствующими формулами для сверхпроводящего шара [5].

Наконец, в случае, когда  $r_2 - r_1 \ll r_2$ ,  $r_2 - r_1 \ll \delta$  (т. е. твердое тело — сферическая оболочка, толщина которой много меньше глубины проникновения магнитного поля в проводник), из (2.13) получаем следующие приближенные соотношения:

$$\alpha'(\omega) = -\frac{\gamma \xi \omega^2}{1 + \xi^2 \omega^2}, \quad \alpha''(\omega) = \frac{\gamma \omega}{1 + \xi^2 \omega^2} \quad (2.15)$$

$$\gamma = \frac{2\pi\lambda r_2^4 h}{3c^2}, \quad \xi = \frac{4\pi\lambda r_2 h}{3c^2}, \quad h = r_2 - r_1$$

Здесь  $h$ ,  $r_2$  — толщина и радиус сферической оболочки.

Магнитный момент твердого тела в трехграннике  $x$ , жестко связанном с телом, определяется формулой

$$\mathbf{P} = \text{Re} \sum_{p=1}^m [\alpha'(\omega_p) + i\alpha''(\omega_p)] \mathbf{B}_p^\infty \exp(-i\omega_p t) \quad (2.16)$$

Соотношение (2.16) представляет собой решение невозмущенной системы при  $\mathbf{H}_c^{(0)} = 0$ . Вектор магнитного момента твердого тела зависит от медленных переменных задачи  $L$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\vartheta$  как от параметров.

3. Перейдем к построению и исследованию осредненных уравнений, описывающих поведение медленных переменных задачи.

Используя оценку (2.12), положим  $\mathbf{H}_c^{(0)} = 0$  и перепишем уравнение (1.7) с учетом (2.16) в следующем виде:

$$\mathbf{L}^* = \varepsilon \mathbf{B}^T [\mathbf{P} \times \mathbf{B} \mathbf{H}^\infty] \quad (3.1)$$

Для определения угла нутации используем конечное соотношение

$$\cos \vartheta = L_{x_3} / L \quad (3.2)$$

Здесь новая медленная переменная  $L_{x_3}$  — проекция вектора кинетического момента твердого тела на его ось симметрии — удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L_{x_3}^* = \varepsilon [\mathbf{P} \times \mathbf{B} \mathbf{H}^\infty]_{x_3} \quad (3.3)$$

Нижний индекс  $x_3$  в правой части (3.3) означает, что векторное произведение следует спроектировать на ось динамической симметрии тела  $x_3$ .

Согласно общей схеме осреднения для получения осредненных уравнений в первом приближении по  $\varepsilon$  в нерезонансном случае необходимо осреднить правые части (3.1), (3.3) вдоль траекторий быстрых движений (2.3), (2.16) [11].

Приведем явный вид осредненных уравнений для случаев постоянного, пульсирующего и вращающихся магнитных полей.

**Постоянное магнитное поле.** Пусть в неподвижной системе координат  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}^\infty(t)$  имеет проекции

$$H_{\xi_1}^\infty = 0, \quad H_{\xi_2}^\infty = 0, \quad H_{\xi_3}^\infty = H = \text{const} \quad (3.4)$$

Следовательно, в (1.1)  $n=1$ ,  $\omega_1=0$ .

Принимая во внимание (2.2), (2.3), находим проекции вектора  $\mathbf{H}^\infty$  на оси подвижного трехгранника  $x$ :

$$H_{x_1}^\infty = 1/2 H \{ \sin \rho [ - (1 - \cos \vartheta) \cos (l + \nu)t - (1 + \cos \vartheta) \cos (l - \nu)t ] - 2 \sin \vartheta \cos \rho \sin \nu t \}$$

$$H_{x_2}^\infty = 1/2 H \{ \sin \rho [ - (1 - \cos \vartheta) \sin (l + \nu)t + (1 + \cos \vartheta) \sin (l - \nu)t ] + 2 \sin \vartheta \cos \rho \cos \nu t \}$$

$$H_{x_3}^\infty = H [ - \sin \vartheta \sin \rho \sin lt + \cos \vartheta \cos \rho ] \quad (3.5)$$

Сравнивая (3.5) и правую часть (2.7), находим, что число частот  $m=5$ :  $\omega_1=0$ ,  $\omega_2=l+\nu$ ,  $\omega_3=l-\nu$ ,  $\omega_4=\nu$ ,  $\omega_5=l$ , и вычисляем выражения для векторов  $\mathbf{B}_p^\infty$ .

Проводя необходимые вычисления из (3.5), (2.16), (3.1) — (3.3), получаем осредненные уравнения для движения твердого тела в постоянном магнитном поле

$$\begin{aligned}
 l' &= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 \sin^2 \rho [ (1 - \cos \vartheta)^2 \alpha''(l+\nu) + \\
 &\quad + (1 + \cos \vartheta)^2 \alpha''(l-\nu) + 2 \sin^2 \vartheta \alpha''(l) ] \\
 l\rho' &= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 \sin \rho \cos \rho [ (1 - \cos \vartheta)^2 \alpha''(l+\nu) + (1 + \cos \vartheta)^2 \alpha''(l-\nu) + \\
 &\quad + 2 \sin^2 \vartheta \alpha''(l) ] \\
 l\sigma' &= \frac{1}{4}\varepsilon_1 \cos \rho \{ (1 - \cos \vartheta)^2 \alpha'(l+\nu) + \\
 &\quad + (1 + \cos \vartheta)^2 \alpha'(l-\nu) + 2 \sin^2 \vartheta [\alpha'(l) - 2\alpha'(-\nu)] \} \\
 l\vartheta' &= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 \sin \vartheta \{ \sin^2 \rho [ (1 - \cos \vartheta) \alpha''(l+\nu) - \\
 &\quad - (1 + \cos \vartheta) \alpha''(l-\nu) + 2 \cos \vartheta \alpha''(l) ] + 4 \cos^2 \rho \alpha''(\nu) \}
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $\varepsilon_1 = \varepsilon H^2 / I_1$ , а функции  $\alpha'(\omega)$ ,  $\alpha''(\omega)$  определяются из (2.13). Уравнения (3.6) имеют первый интеграл

$$l \cos \rho = \text{const} \quad (3.7)$$

выражающий постоянство проекции вектора кинетического момента твердого тела на направление вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}^\infty$ .

Если положить в (3.6)  $\alpha' = 0$ ,  $\alpha'' = \gamma\omega$ , то после несложных преобразований можно получить дифференциальные уравнения, которые с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (9.2.6) работы [2], описывающими движение в магнитном поле Земли экваториального спутника шаровой формы. При анализе отличий уравнений (3.6) от соответствующих уравнений движения экваториального спутника нужно указать на прецессию вектора кинетического момента вокруг вектора напряженности магнитного поля со скоростью  $\sigma$ , определяемой из третьего уравнения (3.6).

Для динамически сжатого твердого тела ( $0 < \kappa < 1$ ),  $l+\nu > 0$ ,  $l-\nu > 0$ , поэтому из первого уравнения (3.6) видно, что при  $\rho \neq 0$  модуль кинетического момента твердого тела  $L$  монотонно уменьшается, при этом из интеграла (3.7) вытекает, что угол  $\rho$  между векторами  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{H}^\infty$  стремится к нулю.

Анализ поведения кинетического момента динамически вытянутого твердого тела ( $-1 < \kappa < 0$ ) проведем в случае тонкостенной оболочки, когда для  $\alpha''(\omega)$  можно воспользоваться приближенной формулой (2.15), справедливой при

$$\omega < \omega^* \quad (3.8)$$

где  $\omega^*$  — некоторая фиксированная частота, определяемая геометрией твердого тела и его материалом.

Подставляя (2.15) в первое уравнение (3.6) и проводя необходимые вычисления, получаем, что  $l'$  пропорционально следующему квадратному полиному переменной  $u = \xi^2 l^2$ :

$$\begin{aligned}
 & -a_2 u^2 - a_1 u - a_0 \\
 a_0 &= 2(1 - b \cos^2 \vartheta), \quad a_1 = 4 + b^2 \cos^2 \vartheta (1 - 3 \cos^2 \vartheta - 2b \cos^2 \vartheta) \\
 a_2 &= (1 - b^2 \cos^2 \vartheta) (2 + 2b \cos^2 \vartheta - b^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta), \quad b = \kappa / (1 + \kappa)
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Анализ выражения для  $a_2$  показывает, что в случае, когда

$$-\frac{\sqrt{1 + \sin^2 \vartheta} - \cos \vartheta}{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta} < \frac{\kappa}{1 + \kappa} < -\frac{1}{\cos \vartheta}$$

$a_2 < 0$  и, следовательно, существует такое  $u^* > 0$ , что при  $u > u^*$  выражение (3.9) будет положительным,  $l' > 0$ , т. е. модуль кинетического момента будет увеличиваться со временем. (Разумеется, при  $u > u^*$  должно выполняться условие (3.8).)

Укажем также на следующий механический факт, вытекающий из уравнений (3.6). При малых углах нутации  $\vartheta$  из последнего уравнения (3.6) получаем

$$l\dot{\vartheta} = -\varepsilon_1 \vartheta \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 \rho \left[ \alpha''(l) - \alpha'' \left( \frac{l}{1+\kappa} \right) \right] + \cos^2 \rho \alpha'' \left( \frac{\kappa l}{1+\kappa} \right) \right\} \quad (3.10)$$

В случае, когда

$$\frac{\sin^2 \rho}{2} \left[ \alpha''(l) - \alpha'' \left( \frac{l}{1+\kappa} \right) \right] + \cos^2 \rho \alpha'' \left( \frac{\kappa l}{1+\kappa} \right) > 0 \quad (3.11)$$

из (3.10) вытекает, что амплитуда нутационных колебаний твердого тела будет уменьшаться, т. е. ось симметрии ротора будет стремиться совпасть с вектором кинетического момента. Заметим, что при больших глубинах проникновения магнитного поля в проводник для динамически сжатого тела ( $\kappa > 0$ ) условие (3.11) выполнено всегда.

Для шара проверка условия (3.11) требует исследования трансцендентного уравнения, получающегося после подстановки формул (2.14) в (3.11).

Анализ условия (3.11) для оболочки сводится к исследованию квадратного уравнения по переменной  $u = \xi^2 l^2$ , коэффициент при  $u^2$  в котором есть

$$\left[ \frac{2 \cos^2 \rho}{(1+\kappa)^2} - \frac{\kappa^2 \sin^2 \rho}{(1+\kappa)^3} \right] \kappa$$

Следовательно, если

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \rho > \frac{1+\kappa}{\kappa^2} \quad (3.12)$$

то при  $\kappa > 0$  условие (3.11) выполнено лишь при  $l < l^*$ , где  $l^*$  — некоторое постоянное значение, определяемое при решении соответствующего квадратного уравнения. В частности,  $l^* = \sqrt{1+\kappa}/\xi$  при  $\rho = \pi/2$ .

При выполнении условия (3.12),  $l > l^*$  нутационные колебания динамически сжатого тела ( $\kappa > 0$ ) будут нарастать.

*Пульсирующее магнитное поле.* В этом случае в неподвижном трехграннике  $\xi$  вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}^\infty(t)$  имеет проекции

$$H_{\xi_1}^\infty = 0, \quad H_{\xi_2}^\infty = 0, \quad H_{\xi_3}^\infty = H \sin \omega t \quad (3.13)$$

При этом в (2.8) число частот  $m=9$ . Осредненные уравнения для движения гироскопа в поле (3.13) имеют вид

$$\begin{aligned} l\ddot{\vartheta} = & -\frac{1}{16} \varepsilon_1 \sin^2 \rho \{ (1 - \cos \vartheta)^2 [\alpha''(l+v-\omega) + \alpha''(l+v+\omega)] + \\ & + (1 + \cos \vartheta)^2 [\alpha''(l-v-\omega) + \alpha''(l-v+\omega)] + 2 \sin^2 \vartheta [\alpha''(l-\omega) + \alpha''(l+\omega)] \} \\ l\dot{\sigma} = & \frac{1}{16} \varepsilon_1 \cos \rho \{ -4 \sin^2 \vartheta [\alpha'(-v-\omega) + \alpha'(-v+\omega)] - 8 \cos^2 \vartheta \alpha'(\omega) + \\ & + (1 - \cos \vartheta)^2 [\alpha'(l+v-\omega) + \alpha'(l+v+\omega)] + (1 + \cos \vartheta)^2 [\alpha'(l-v-\omega) + \\ & + \alpha'(l-v+\omega)] + 2 \sin^2 \vartheta [\alpha'(l+\omega) + \alpha'(l-\omega)] \} \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\dot{\vartheta} = & \frac{1}{16} \varepsilon_1 \sin \vartheta \sin^2 \rho \{ -(1 - \cos \vartheta) [\alpha''(l+v-\omega) + \alpha''(l+v+\omega)] + \\ & + (1 + \cos \vartheta) [\alpha''(l-v-\omega) + \alpha''(l-v+\omega)] - 2 \cos \vartheta [\alpha''(l-\omega) + \alpha''(l+\omega)] + \\ & + 4 \operatorname{ctg}^2 \rho [\alpha''(-v-\omega) + \alpha''(-v+\omega)] \} \end{aligned}$$

Уравнение для  $\rho$  в (3.14) не выписано, так как система (3.14) имеет первый интеграл (3.7).



Из анализа первого уравнения в (3.14) при  $\vartheta=0$ ,  $\rho=\pi/2$  следует возможность возникновения ускоряющего момента, приводящего к разгону твердого тела. Этот эффект указан в работах [7, 3].

Последнее уравнение в (3.14) при малых  $\vartheta$  позволяет получить следующее условие убывания амплитуды нутационных колебаний твердого тела:

$$\frac{\sin^2 \rho}{2} \left[ \alpha'' \left( \frac{l}{1+\kappa} - \omega \right) + \alpha'' \left( \frac{l}{1+\kappa} + \omega \right) - \alpha''(l-\omega) - \alpha''(l+\omega) \right] + \\ + \cos^2 \rho \left[ \alpha'' \left( -\frac{\kappa l}{1+\kappa} - \omega \right) + \alpha'' \left( -\frac{\kappa l}{1+\kappa} + \omega \right) \right] < 0 \quad (3.15)$$

Условия (3.15) и формулы (2.13) позволяют построить в фазовом пространстве системы (3.14) области, в которых происходит убывание угла  $\vartheta$ .

*Вращающееся магнитное поле.* В этом случае поле в неподвижном трехграннике  $\xi$  имеет компоненты

$$H_{\xi_1}^\infty = H \cos \omega t, \quad H_{\xi_2}^\infty = H \sin \omega t, \quad H_{\xi_3}^\infty = 0 \quad (3.16)$$

Уравнения движения твердого тела в поле (3.16) примут вид

$$l\ddot{\vartheta} = \frac{1}{16}\epsilon_1 \{ -(1-\cos \vartheta)^2 [ (1-\cos \rho)^2 \alpha''(l+v+\omega) + (1+\cos \rho)^2 \alpha''(l+v-\omega) ] - \\ - (1+\cos \vartheta)^2 [ (1-\cos \rho)^2 \alpha''(l-v+\omega) + (1+\cos \rho)^2 \alpha''(l-v-\omega) ] - \\ - 2 \sin^2 \vartheta [ (1+\cos \rho)^2 \alpha''(l-\omega) + (1-\cos \rho)^2 \alpha''(l+\omega) ] \} \quad (3.17)$$

$$l\dot{\rho} = \frac{1}{16}\epsilon_1 \sin \rho \{ (1-\cos \vartheta)^2 [ (1+\cos \rho) \alpha''(l+v-\omega) - (1-\cos \rho) \alpha''(l+v+\omega) ] + \\ + (1+\cos \vartheta)^2 [ (1+\cos \rho) \alpha''(l-v-\omega) - (1-\cos \rho) \alpha''(l-v+\omega) ] + \\ + 2 \sin^2 \vartheta [ (1+\cos \rho) \alpha''(l-\omega) - (1-\cos \rho) \alpha''(l+\omega) + 2\alpha''(-v-\omega) - \\ - 2\alpha''(-v+\omega) ] - 8 \cos^2 \vartheta \alpha''(\omega) \}$$

$$l\dot{\sigma} = \frac{1}{16}\epsilon_1 \{ (1-\cos \vartheta)^2 [ (1-\cos \rho) \alpha'(l+v+\omega) - (1+\cos \rho) \alpha'(l+v-\omega) ] + \\ + (1+\cos \vartheta)^2 [ (1-\cos \rho) \alpha'(l-v+\omega) - (1+\cos \rho) \alpha'(l-v-\omega) ] + \\ + 2 \sin^2 \vartheta (2 \cos \rho \alpha'(-v-\omega) + 2 \cos \rho \alpha'(-v+\omega) - (1+\cos \rho) \alpha'(l-\omega) + \\ + (1-\cos \rho) \alpha'(l+\omega) ] + 8 \cos \rho \cos^2 \vartheta \alpha'(\omega) \}$$

$$l\dot{\vartheta} = \frac{1}{16}\epsilon_1 \sin \vartheta \{ -(1-\cos \vartheta) [ (1+\cos \rho)^2 \alpha''(l+v-\omega) + \\ + (1-\cos \rho)^2 \alpha''(l+v+\omega) ] + (1+\cos \vartheta) [ (1+\cos \rho)^2 \alpha''(l-v-\omega) + \\ + (1-\cos \rho)^2 \alpha''(l-v+\omega) ] + 4 \sin^2 \rho [ \alpha''(-v-\omega) + \alpha''(-v+\omega) ] - \\ - 2 \cos \vartheta [ (1+\cos \rho)^2 \alpha''(l-\omega) + (1-\cos \rho)^2 \alpha''(l+\omega) ] \}$$

При  $\alpha' = 0$ ,  $\alpha'' = \gamma \omega$  из соотношений (3.17) можно получить уравнения задачи [1] в форме, приведенной в [12].

При малых  $\vartheta$ ,  $\rho$  последнее уравнение в (3.17) запишем в виде

$$l\dot{\vartheta} = \frac{\epsilon_1}{2} \vartheta \left[ \alpha'' \left( \frac{l}{1+\kappa} - \omega \right) - \alpha''(l-\omega) \right] \quad (3.18)$$

В случае, когда твердое тело — тонкостенная оболочка, условие убывания угла  $\vartheta$ , вытекающее из (3.18), (2.15), есть

$$\kappa [ (1-\xi^2 \omega^2) (1+\kappa) + l(2+\kappa) \omega \xi^2 - l^2 \xi^2 ] > 0 \quad (3.19)$$

Предположим, что частота вращения магнитного поля  $\omega > (1/\xi)$ , и твердое тело динамически сжато  $\kappa > 0$ . При этом квадратное уравнение

$$-\xi^2 l^2 + \xi^2 \omega (2+\kappa) l + (1+\kappa) (1-\xi^2 \omega^2) = 0$$

имеет два положительных корня  $0 < l_1 < l_2$ , и условие (3.19) выполнено только при  $l_1 < l < l_2$ .

Учет этого соотношения (3.20) является важным при проектировании систем раскрутки гироскопов с неконтактными подвесами. Так, если угловая скорость вращения магнитного поля  $\omega > (1/\xi)$ , то в начале процесса разгона ротора, когда его кинетический момент меньше чем  $I_1 l_1$ , угол  $\Phi$  растёт, т. е. ось симметрии ротора «уходит» от оси вращения магнитного поля. Это обстоятельство может увеличивать время раскрутки гироскопа.

Поступила 12 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко Ю. Г. Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
3. Сермонс Г. Я. Динамика твердых тел в электромагнитном поле. Рига, «Зинатне», 1974.
4. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
6. Halverson R. P., Cohen H. Torque on a spinning hollow sphere in a uniform magnetic field. IEEE, Trans. Aerospace and Navigational Electronics, 1964, vol. ANE-11, No. 2, p. 118-122.
7. Hayes A. F. Torque on a spinning hollow sphere in a uniform alternating magnetic field. IEEE, Trans. Aerospace and Navigational Electronics, 1964, vol. ANE-11, No. 2, p. 122-127.
8. Линьков Р. В., Урман Ю. М. Пондеромоторное взаимодействие вращающегося проводящего шара с переменным неоднородным магнитным полем. Ж. техн. физ., 1974, т. 44, вып. 11.
9. Голубков В. В. Момент сил в магнитном поле. Космические исследования, 1972, т. 10, вып. 1.
10. Павлов А. М. Движение приводящего гироскопа в магнитном поле. Математика и механика, Алма-Ата, Каз. гос. ун-т, 1973, вып. 8.
11. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
12. Белецкий В. В. Динамика быстрых вращений. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 29.