**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1977**

УДК 531.38

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ С ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ НА СТАБИЛИЗАЦИЮ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Е. П. СМИРНОВА

(Ленинград)

Стабилизация вращающегося твердого тела (волчка) с полостью, содержащей вязкую или идеальную жидкость, обсуждалась во многих работах (например, [1, 2]). Как правило, предполагалась высокая степень симметрии полости относительно оси стационарного вращения. Но для случая очень большой вязкости стабилизирующее действие жидкости существенно зависит от ориентации полости относительно оси вращения [3]. Для тороидальной полости время стабилизации оказалось минимальным не при осесимметричной ориентации, а когда плоскость тора параллельна главным осям инерции волчка с наибольшим и наименьшим моментами инерции [4]. В данной работе показано, что и в случае малой вязкости жидкости такая ориентация тора оптимальна (осесимметричная ориентация изучалась ранее [5]). Как при большой, так и при малой вязкости стабилизирующее действие жидкости определяется в основном потоком, обтекающим все кольцо тора. Результаты расчетов указывают на возможность существования непрерывного спектра малых колебаний жидкости при рассмотренной ориентации тора.

1. Используя подход работы [2], рассмотрим малые колебания свободного волчка, содержащего тороидальную полость с несжимаемой жидкостью малой вязкости, около стационарного вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$. Уравнения движения волчка и жидкости линеаризуем. Систему координат XYZ жестко свяжем с волчком так, что ось Z направлена по оси симметрии полости, а ось X параллельна $\boldsymbol{\omega}_0$.

Как обычно в теории малых колебаний, будем описывать угловую скорость волчка $\boldsymbol{\omega}$, относительную скорость жидкости $\mathbf{V}$ и ее обобщенное давление P комплексными величинами, которые меняются во времени t с определенной частотой λ:

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\Omega}e^{i\lambda t},\quad \mathbf{V}(t)=\mathbf{v}e^{i\lambda t},\quad P(t)=p_0+pe^{i\lambda t} \tag{1.1}$$

Как всегда в подобных случаях, физический смысл имеют вещественные части выражений (1.1). Частота λ также может быть комплексной, что соответствует затуханию или нарастанию колебаний со временем. Величины $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{v}$ и p считаем малыми первого порядка.

Как и в [2], будем рассматривать идеальную жидкость, а влияние малой вязкости учтем при помощи метода пограничного слоя. Сначала будем искать относительное движение жидкости, считая движение волчка заданным. Затем, используя вклад жидкости в момент количества движения волчка, найдем собственные частоты λ для малых колебаний волчка с жидкостью.

Амплитудные значения скорости и давления удобно записать в виде (Ω_j — декартовы компоненты вектора $\boldsymbol{\Omega}$)

$$p=-i\lambda\sum_{j=1}^{3}\psi_j\Omega_j,\quad \mathbf{v}=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{b}_j\Omega_j \tag{1.2}$$

Величины ψ_j являются обобщением потенциалов Жуковского [2]. Для тороидальной полости с рассматриваемой ориентацией введем новые величины ζ_j, обозначив $\sigma=2\omega_0/i\lambda$ и представляя ψ_j в виде

$$\psi_1=yz+2\zeta_1,\quad \psi_2=-xz+2\zeta_2,\quad \psi_3=-\sigma xz+2\zeta_3 \tag{1.3}$$

Тогда ζ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\zeta_j+\sigma^2\frac{\partial^2\zeta_j}{\partial x^2}=\sigma\delta_{j1} \tag{1.4}$$

Если использовать цилиндрические координаты ρ, φ, z и ввести обозначения $\alpha=\sigma\cos\varphi$, $\beta=\sigma\sin\varphi$, $s=\rho-R$ (R — радиус кольца тора), то краевые условия на поверхности тора S принимают вид

$$s\left[(1+\alpha^2)\frac{\partial\zeta_j}{\partial s}+\beta\frac{\partial\zeta_j}{\partial z}-\frac{\alpha\beta}{\rho}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\varphi}\right]+$$
$$+z\left(-\beta\frac{\partial\zeta_j}{\partial s}+\frac{\partial\zeta_j}{\partial z}-\frac{\alpha}{\rho}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\varphi}\right)\Big|_S=(\sigma z^2-sz\sin\varphi)\delta_{j1}+$$
$$+sz\cos\varphi(1+\sigma^2)\delta_{j2}+{}^1/_2\alpha sz(1+\sigma^2)\delta_{j3}|S \tag{1.5}$$

где z и s на поверхности S связаны равенством $z^2+s^2=r_0^2$ (r_0 — радиус трубки тора).

Из (1.4) и (1.5) видно, что $\zeta_3={}^1/_2\sigma\zeta_2$. Коэффициенты $\mathbf{b}_j$ в (1.2) выражаются через ψ_j по обычным формулам, связывающим скорость и давление идеальной жидкости во вращающейся полости.

Вклад относительного движения жидкости с малой вязкостью в момент количества движения волчка равен [2]:

$$\mathbf{G}=\mathbf{g}e^{i\lambda t},\quad \mathbf{g}=\rho_m(I^{(0)}+\nu^{1/2}I^{(1)})\boldsymbol{\Omega} \tag{1.6}$$

где ρ_m и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости, компоненты тензора $I^{(0)}$ равны ($\mathbf{e}_j$ — декартовы орты)

$$I_{jk}^{(0)}=\int_V[\mathbf{e}_j\times\mathbf{r}]\mathbf{b}_k\,dV \tag{1.7}$$

Интегрирование в (1.7) ведется по объему тороидальной полости V. При помощи метода пограничного слоя тензор $I^{(1)}$ можно выразить через значения $\mathbf{b}_j$ на поверхности полости (см. [2]). В силу свойств симметрии тора $I_{1k}^{(1)}=I_{k1}^{(1)}=0$ при $k=2$, 3. В дальнейшем понадобятся лишь компоненты $I_{jk}^{(1)}$ с индексами j, $k=2$, 3, которые с учетом связи ζ_2 и ζ_3 принимают вид

$$\begin{gathered}
I_{22}^{(1)}=(\sigma/2\omega_0)^{1/2}\oint dS\langle\mathbf{b}_2(-\sigma)|\mathbf{b}_2(\sigma)\rangle\\
I_{23}^{(1)}=-I_{32}^{(1)}={}^1/_2\sigma I_{22}^{(1)}-(\sigma/2\omega_0)^{1/2}\oint dS\,\rho_0\langle\mathbf{e}_\varphi|\mathbf{b}_2(\sigma)\rangle\\
I_{33}^{(1)}=(\sigma/2\omega_0)^{1/2}\oint dS\rho_0^2(1+i\sigma\cos\theta\cos\varphi)^{1/2}-{}^1/_4\sigma^2I_{22}^{(1)}-\\
-(\sigma/2\omega_0)^{1/2}\oint dS\,{}^1/_2\sigma\rho_0\{\langle\mathbf{e}_\varphi|\mathbf{b}_2(\sigma)\rangle-\langle\mathbf{b}_2(-\sigma)|\mathbf{e}_\varphi\rangle\}
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь интегрирование ведется по поверхности тора, ρ_0 — значение ρ на поверхности, $\mathbf{e}_\varphi$ — орт цилиндрической системы координат, θ — полярный угол в поперечном сечении трубки тора; введено обозначение

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \{\mathbf{ab} + i\mathbf{n}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\} (1 + i\sigma \cos\theta \cos\varphi)^{1/2} \tag{1.9}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности тора. В выражениях (1.8), (1.9) ветвь функции $(1+i\sigma\cos\theta\cos\varphi)^{1/2}$ выбрана так, что она равна $+1$ при $\sigma=0$.

Пусть трубка тора тонкая, т. е. ее радиус r_0 мал по сравнению с радиусом кольца R. Как и в [5], будем решать задачу (1.4), (1.5), считая, что значение r_0 фиксировано, а $R\to\infty$, и разлагая ζ_j в ряд по R^{-k}, имеем

$$\zeta_j = \sum_{k=0}^{\infty} R^{-k} \zeta_j^{(k)} (s, z, \varphi) \tag{1.10}$$

Решения краевых задач для каждого члена ряда даются полиномами по s и z. Так как внутри тора $|s| \leqslant r_0$, $|z| \leqslant r_0$, то при подстановке явного вида функций $\zeta_j^{(k)}$ ряд (1.10) можно переписать в виде разложения по безразмерному параметру r_0/R.

В нулевом приближении получаем

$$\begin{gathered}
\zeta_j^{(0)} = A_{20}^{(j)} z^2 + A_{11}^{(j)} zs + A_{02}^{(j)} s^2 + A_{00}^{(j)} r_0^2 \\
A_{02}^{(j)} = -{}^1/_2 d_j \beta (2+\alpha^2)^{-1}, \qquad A_{11}^{(j)} = d_j (1+\alpha^2)(2+\alpha^2)^{-1} \\
A_{20}^{(j)} = {}^1/_2 \beta A_{11}^{(j)} + {}^1/_2 \sigma \delta_{j1}, \quad d_1 = -\sin\varphi, \quad d_2 = \cos\varphi, \quad d_3 = {}^1/_2 \sigma d_2
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Коэффициент $A_{00}^{(j)}$ находится лишь из рассмотрения краевой задачи во втором приближении

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} A_{00}^{(j)} = C_j - \frac{1}{4} \alpha A_{11}^{(j)} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\varphi} (A_{20}^{(j)} + A_{02}^{(j)})$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = {}^1/_2\sigma + {}^1/_4 \sigma^{-1} [(1 + {}^1/_2 \sigma^2)^{-1/2} - 1], \quad C_3 = {}^1/_2 \sigma C_2$$

Выражения для более высоких приближений могут быть найдены при помощи простых, хотя и длительных вычислений. Эти выражения очень громоздки и не приводятся здесь, но будут использованы по мере надобности.

Чтобы лучше представить движение жидкости, выпишем коэффициенты $\mathbf{b}_j$ представления (1.2) для амплитуды скорости $\mathbf{v}$ в нулевом приближении (r и θ — полярные координаты в поперечном сечении тора)

$$\begin{gathered}
b_{jr}^{(0)} = 0, \quad b_{j\theta}^{(0)} = 2 r d_j (2+\alpha^2)^{-1} \\
b_{j\varphi}^{(0)} = -\rho \delta_{j3} - 2r \sin\theta \frac{\partial d_j}{\partial\varphi} + 2r\cos\theta d_j \alpha (2+\alpha^2)^{-1}
\end{gathered} \tag{1.12}$$

В этом приближении b_{jr} и $b_{j\theta}$ соответствуют круговому течению вокруг средней линии тора в плоскости $\varphi=\mathrm{const}$, а $b_{j\varphi}$ описывает потоки, пересекающие эту плоскость. Зависимость от φ существенно сложнее, чем при осесимметричной ориентации полости [5]. В частности, выражение (1.12) содержит бесконечное число гармоник Фурье. Отметим, что при $j=2$, т. е. когда $\boldsymbol{\omega}_0$ направлена по оси X, а $\boldsymbol{\Omega}$ — по оси Y, существуют два встречных потока, обтекающих все кольцо тора. Они разделены поверхностью $\cos\theta=0$, их скорости малы (пропорциональны r_0). Эти потоки исчезают при $\sigma=0$ и $\sigma=\infty$. При $j=3$, т. е. при $\boldsymbol{\Omega}$, направленном по оси Z, также существует поток, обтекающий все кольцо тора, но скорость в нем не зависит от θ и σ и относительно велика (пропорциональна R). Отрицательный знак этой скорости соответствует отставанию жидкости от полости.

Согласно (1.11), (1.12) $\zeta_j^{(0)}$ и $\mathbf{b}_j^{(0)}$ имеют полюса при $\alpha^2=\sigma^2\cos^2\varphi=-2$, так что $\mathbf{b}_j^{(0)}\notin\mathbf{W}_2^{(1)}(V)$ при любых $\sigma^2\leqslant-2$ ($\mathbf{W}_2^{(1)}(V)$ — пространство соленоидальных векторных функций с компонентами из $W_2^1(V)$). Это означает, что в низшем приближении по r_0/R задача о движении жидкости во вращающейся тороидальной полости с рассматриваемой ориентацией имеет непрерывный спектр малых колебаний, начинающийся с точки $\sigma^2=-2$ (аналогичный результат получается при любой неосесимметричной ориентации тора).

В следующем приближении появляются полюса при $\alpha^2=-4$ и $\alpha^2=-{}^4/_3$, что соответствует новым ветвям непрерывного спектра. Кроме того, появляются полюса второго порядка при $\alpha^2=-2$, которые можно связать со сдвигом точного положения полюса при $(r_0/R)\neq0$.

Отметим, что в низшем приближении по r_0/R положение полюсов описывается формулой $\alpha^2=-\sin^{-2}(l\pi/2n)$ $(0<l<n)$, которая совпадает с формулой для положения полюсов по σ^2 в этом же приближении при осесимметричной ориентации полости [5], но в данном случае l принимает как нечетные, так и четные значения.

Таким образом, члены ряда (1.10) имеют бесконечное счетное число ветвей непрерывного спектра, начальные точки которых плотно заполняют мнимую ось плоскости σ при $\sigma^2<-1$, т. е. область $-2\omega_0<\lambda<2\omega_0$.

Примеры спектра собственных колебаний жидкости, рассмотренные в литературе до сих пор, относились лишь к осесимметричным вращающимся полостям (см., например, [1, 6, 7]). Спектр во всех изученных случаях состоял из счетного плотного множества собственных значений. Однако до сих пор не существует общих результатов относительно спектра идеальной жидкости во вращающейся полости. Случай, разобранный выше, обладает меньшей степенью симметрии по сравнению с прежними примерами. Возможно, непрерывность спектра связана именно с уменьшением симметрии. Другой причиной появления непрерывного спектра могло быть использование разложения по r_0/R. Однако при осесимметричной ориентации полости такое же разложение ведет к точечному спектру [5, 8].

В работе [9] сформулированы теоремы, из которых следует дискретный характер спектра собственных колебаний вязкой жидкости, целиком заполняющей вращающуюся полость. Однако предельный переход $\nu\to0$ является сингулярным и приводит к изменению характера спектра; точки спектра становятся неизолированными. В примерах, изученных ранее [1, 5–8], спектр, тем не менее, оставался точечным. Случай, разобранный здесь, указывает на то, что он мог бы стать и непрерывным. Возможность такого изменения спектра при предельном переходе известна, например, для уравнения Шредингера [10, 11]. Заметим, что в области спектра колебаний жидкости ($\sigma^2<-1$) уравнение (1.4) становится гиперболическим и задача (1.4), (1.5) не является корректной. Если эта задача действительно имеет непрерывный спектр, то решение ее может быть неограничено на некоторых характеристиках уравнения (1.4), пересекающих полость. Строгое изучение этого вопроса (без разложения по r_0/R) упирается в трудность различения непрерывного и плотного точечного спектров. Тем не менее, задача представляется заслуживающей внимания.

Значения ζ_j и $\mathbf{b}_j$ позволяют вычислить компоненты тензоров $I^{(0)}$ и $I^{(1)}$. Для ненулевых компонент $I^{(0)}$ получаем

$$
\begin{gathered}
I_{11}^{(0)}=-\pi^2Rr_0^4\{1+2\sigma^{-2}[(1+{}^1/_2\sigma^2)^{1/2}-1]\}\\
I_{22}^{(0)}=-\pi^2Rr_0^4\{1+2\sigma^{-2}[1-(1+{}^1/_2\sigma^2)^{-1/2}]\}\\
I_{23}^{(0)}=-I_{32}^{(0)}={}^1/_2\sigma I_{22}^{(0)},\quad I_{33}^{(0)}=-2\pi^2R^3r_0^2-{}^3/_2\pi^2Rr_0^4-{}^1/_4\sigma^2I_{22}^{(0)}
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

При вычислении компонент $I_{jk}^{(0)}$ с указанной точностью используются как $\zeta_j^{(0)}$, так и $\zeta_j^{(1)}$. Эти компоненты содержат разрезы по σ^2 при $\sigma^2\leqslant-2$, связанные с полюсами подынтегрального выражения в (1.7), т. е. с обсуждавшимся выше непрерывным спектром собственных колебаний жидкости (точечному спектру соответствуют полюса в $I_{jk}^{(0)}$). В более высоких приближениях по r_0/R появляются новые разрезы, связанные с другими ветвями непрерывного спектра. Первое слагаемое в $I_{33}^{(0)}$, как и первое слагаемое в $I_{33}^{(1)}$ (см. (1.8)), возникает от кругового потока, обтекающего кольцо тора с относительно большой скоростью, пропорциональной R.

В дальнейшем будем считать вклады компонент тензора $I^{(1)}$ малыми поправками (благодаря малости ν) и учитывать в них лишь наибольшие члены. По параметру r_0/R наибольшим является первое слагаемое в $I_{33}^{(1)}$ (см. (1.8)), однако при σ, близких к точке ветвления, компоненты $I_{jk}^{(1)}(\sigma)$ неограниченно растут. Наибольшую величину имеют члены, связанные с полюсом второго порядка под интегралом в $I_{22}^{(1)}$. Вблизи точки ветвления будем учитывать лишь эти члены. В действительности потребуется выражение даже не для $I_{22}^{(1)}$, а лишь для $\operatorname{Re}(\sigma I_{22}^{(1)})$. В низшем приближении по r_0/R имеем

$$\operatorname{Re}(\sigma I_{22}^{(1)})\big|_{\sigma=\pm i(\sqrt{2}-\varepsilon)} \approx -2Rr_0^3\pi^2\omega_0^{-1/2}\left(1+\frac{1}{2}\sigma^2\right)^{-3/2}\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\,(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\theta\right|^{1/2} \tag{1.14}$$

где ε — малое положительное число.

2. Рассмотрим малые колебания волчка. Линеаризованное уравнение свободного вращения волчка с жидкостью имеет вид [2]:

$$i\lambda(J+\rho_m I)\Omega+[\omega_0\times(J+\rho_m I)\Omega]-[J\omega_0\times\Omega]=0 \tag{2.1}$$

где J — тензор инерции волчка с «замороженной» жидкостью. Собственные значения λ даются нулями характеристического определителя этой системы. Напомним, что используется система координат, ось Z которой перпендикулярна плоскости тора, а ось X параллельна ω_0. Эти оси координат предполагаются совпадающими с главными осями инерции волчка. Тогда вследствие симметрии тороидальной полости определитель системы (2.1) распадается на произведение двух сомножителей. Один из них равен $J_1+\rho_m I_{11}$, а другой является определителем второго порядка.

Рассмотрим сначала случай идеальной жидкости. В низшем приближении по r_0/R

$$J_1+\rho_m I_{11}^{(0)}=J_1-{}^1/_2 Mr_0^2\{1+2\sigma^{-2}[(1+{}^1/_2\sigma^2)^{1/2}-1]\}$$

где M — масса жидкости. Эта функция не имеет нулей на главном листе римановой поверхности по σ, где $\operatorname{Re}(1+{}^1/_2\sigma^2)^{1/2}>0$. Для аналитического продолжения по σ на второй лист римановой поверхности нужно было бы пройти через область спектра колебаний жидкости, где использованная линеаризация уравнения Навье — Стокса неприменима.

Таким образом, собственные значения λ возникают лишь от нулей определителя второго порядка на главном листе римановой поверхности по σ. Используя связь между $I_{22}^{(0)}$, $I_{23}^{(0)}$ и $I_{33}^{(0)}$ (см. (1.13)), можно привести этот определитель к виду

$$D=\begin{vmatrix} J_2+K^{(0)}, & -{}^1/_2\sigma(J_3^{(0)}-J_1)+{}^1/_2\sigma K^{(0)} \\ {}^1/_2\sigma(J_2-J_1) & J_3^{(0)} \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

$$J_3^{(0)}=J_3-MR^2-{}^3/_4Mr_0^2$$

$$K^{(0)}=\rho_m I_{22}^{(0)}(1+{}^1/_4\sigma^2)=-{}^1/_2Mr_0^2(1+{}^1/_4\sigma^2)\{1+2\sigma^{-2}[1-(1+{}^1/_2\sigma^2)^{-1/2}]\}$$

Заметим, что $J_3^{(0)}$ является моментом инерции волчка без жидкости относительно оси Z. Поскольку в рассматриваемом случае жидкость дает одинаковый вклад в J_2 и J_1, справедливы неравенства: $J_2\leqslant J_1+J_3^{(0)}$, $J_1\leqslant J_2+J_3^{(0)}$, $J_3^{(0)}<J_1+J_2$. Если определитель D имеет нуль при некотором значении σ, то соответствующее ему собственное движение волчка устойчиво при $\operatorname{Re}\sigma<0$ и неустойчиво при $\operatorname{Re}\sigma>0$. Характерное время затухания (или нарастания) малых отклонений от стационарного вращения равно $T=(2\omega_0)^{-1}|\sigma^2/\operatorname{Re}\sigma|$.

Будем считать Mr_0^2 малой величиной. Тогда одно из решений уравнения $D=0$ можно записать в виде

$$\sigma^2=\sigma_0^2\left\{1+\frac{(1-a_2)^2}{4a_2}\frac{J_1}{J_2J_3^{(0)}}Mr_0^2\left[\frac{1}{2}\sigma_0^2+1-\left(\frac{1}{2}\sigma_0^2+1\right)^{-1/2}\right]\right\} \tag{2.3}$$

$$a_2=J_2^{-1}(J_1-J_3^{(0)}),\qquad a_3=J_3^{(0)^{-1}}(J_1-J_2),\qquad \sigma_0^2=-4(a_2a_3)^{-1}$$

Величины a_2, a_3 удовлетворяют неравенствам $|a_2|<1$, $|a_3|\leqslant1$.

При отсутствии жидкости, т. е. при $M=0$, решение (2.3) дает $\sigma=\sigma_0$, что соответствует движению Эйлера — Пуансо вблизи главной оси инерции. Если $\sigma_0^2>0$, оно неустойчиво. В дальнейшем рассматриваются лишь вращения вокруг главных осей инерции с наибольшим или наименьшим моментом инерции, которые устойчивы в отсутствие жидкости. При этом $\sigma_0^2<-4$, и решение (2.3) дает комплексные значения σ^2. Это связано с непрерывным характером спектра собственных колебаний идеальной жидкости, обсуждавшимся выше. Если записать $\sigma=\sigma_0+\varepsilon_0$, то

$$\operatorname{Re}\sigma=\operatorname{Re}\varepsilon_0=-\frac{(1-a_2)^2}{8a_2}\frac{J_1}{J_2J_3^{(0)}}Mr_0^2\left(\frac{1}{2}+\sigma_0^{-2}\right)^{-1/2} \tag{2.4}$$

Если вращение происходит вокруг оси с наименьшим моментом инерции, то $a_2<0$, $a_3<0$, и согласно (2.4) $\operatorname{Re}\sigma>0$, т. е. непрерывность спектра колебаний идеальной жидкости делает такое вращение неустойчивым даже без учета вязкости. Для вращения вокруг оси с наибольшим моментом инерции из (2.4) получим $\operatorname{Re}\sigma<0$. Однако при этом выражение (2.3) описывает пару точек, лежащих на втором листе римановой поверхности, которые, как объяснялось выше, не должны рассматриваться.

Перейдем к другим решениям уравнения $D=0$. При малых значениях Mr_0^2 они должны лежать вблизи точек, где $K^{(0)}$ обращается в бесконечность. Выражение (2.2) дает два решения такого типа, лежащие на главном листе римановой поверхности в точках

$$\sigma_r=\pm i\sqrt{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{Mr_0^2}{4J_2}\frac{2-a_3}{2-a_2a_3}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

Спектр собственных колебаний волчка точечный, несмотря на непрерывный спектр колебаний жидкости. Точки σ_r близки к начальным точкам ветвей спектра жидкости, и соответствующие собственные движения волчка сильно раскачивают жидкость (как видно из (1.12), при $\sigma=\sigma_r$ величины $\mathbf{b}^{(0)}$ велики вблизи $\varphi=0$). Такие движения будем называть резонансными. В использованном приближении резонансные движения не меняют характера устойчивости вращения. Более высокие приближения по r_0/R дают такие резонансные движения, для которых $\operatorname{Re}\sigma_r>0$ и которые ведут к неустойчивости. Комплексность σ_r^2 вызвана взаимодействием резонансных вращений с «чужими» ветвями непрерывного спектра жидкости.

Таким образом, спектр волчка с рассматриваемой ориентацией полости отличается от спектра симметричного волчка с симметричной полостью, найденного С. Л. Соболевым [1]. В симметричном случае могло быть не более четырех комплексных частот. В случае, рассматриваемом здесь, суммирование разложения по r_0/R дает бесконечное число резонансных частот; каждая из них комплексна из-за непрерывности спектра колебаний жидкости, так что без вязкости вращение всегда неустойчиво.

Вклад непрерывного спектра жидкости в $\operatorname{Re}\sigma_r$ пропорционален высоким степеням Mr_0^2 и уже при сравнительно небольшой вязкости становится несущественным в сравнении с вкладом вязкости. В дальнейшем используется лишь низшее приближение по r_0/R.

Рассмотрим влияние вязкости. Начнем с резонансных вращений. Соответствующие им значения σ расположены близко к особым точкам компонент $I^{(0)}$ и $I^{(1)}$. При вычислении поправок от вязкости будем оставлять в $I_{jk}^{(1)}$ лишь наибольшие члены. Тогда в определителе (2.2) $K^{(0)}$ заменится на $K=K^{(0)}+\nu^{1/2}K^{(1)}$, где $K^{(1)}=\rho_m I_{22}^{(1)}(1+{}^1/_4\sigma^2)$. Представим нуль этого определителя в виде $\sigma=\sigma_r+\nu^{1/2}\delta_r$. Используя (1.14), получим

$$\operatorname{Re}\delta_r=-\frac{2\omega_0^{-1/2}}{r_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\,(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\theta\right|^{1/2}\tag{2.6}$$

Очевидно, $\operatorname{Re}\delta_r<0$ и не зависит от массы жидкости. Это вызвано тем, что при малой массе жидкости значения σ для резонансных движений лежат очень близко к особым точкам компонент тензора I_{jk}, связанным со спектром собственных колебаний жидкости. Под влиянием вязкости спектр колебаний жидкости смещается в левую полуплоскость σ [2], увлекая за собой частоты резонансных колебаний волчка. Смещение это, очевидно, не зависит от массы жидкости и в рамках приближения пограничного слоя имеет величину $\sim\nu^{1/2}$.

Изучим влияние вязкости на движение Эйлера — Пуансо. Так как $\sigma_0^2<-4$ и находится на конечном расстоянии от особой точки $\sigma^2=-2$, то считая $(r_0/R)\ll1$, можно учитывать в формулах (1.8) лишь первое слагаемое для $I_{33}^{(1)}$. Поскольку в уравнение (2.1), а значит и в более точное выражение для определителя D, $I_{33}^{(1)}$ входит только в комбинации с J_3, то нуль определителя, соответствующий модифицированному движению Эйлера — Пуансо, можно записать как

$$\sigma=\sigma_0+\varepsilon_0+\nu^{1/2}\delta_0,\qquad \delta_0=\frac{1}{2}\sigma_0^{-1}\rho_m I_{33}^{(1)}(\sigma_0)\frac{\partial\sigma_0^2}{\partial J_3}\tag{2.7}$$

Для вопроса об асимптотической устойчивости модифицированного движения Эйлера — Пуансона важна величина

$$\operatorname{Re}\delta_0=\frac{MR^2\omega_0^{-1/2}}{2r_0}\frac{\sigma_0^2}{a_2}\frac{J_1}{J_2J_3^{(0)}}\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\varphi\,d\theta\,\big||\sigma_0|^{-1}-\cos\varphi\cos\theta\big|^{1/2}\tag{2.8}$$

Так как $\sigma_0^2<0$, то $\operatorname{Re}\delta_0>0$, если момент инерции J_1 — наименьший. Таким образом, вязкость усиливает неустойчивость вращения волчка около оси с наименьшим моментом инерции.

Если J_1 — наибольший момент инерции, то $\operatorname{Re}\delta_0<0$. Как обсуждалось выше, в этом случае при $\nu=0$ точка $\sigma_0+\varepsilon_0$ лежит на втором листе римановой поверхности. Он отделен от главного листа областью спектра колебаний жидкости, в которой нельзя линеаризовать уравнение Навье — Стокса. Но при малом $\nu\neq0$ спектр жидкости смещен влево [2] на величину $\sim\nu^{1/2}$, не зависящую от массы жидкости M. Если эта масса мала, то уже при относительно небольшой вязкости точка $\sigma_0+\varepsilon_0+\nu^{1/2}\delta_0$ может оказаться правее спектра жидкости, т. е. в области применимости линеаризации, где можно использовать и выражения (2.7), (2.8). При этом движение Эйлера — Пуансо асимптотически устойчиво.

Обсудим кратко характер полученных движений волчка с маловязкой жидкостью. Резонансные движения при $\nu\neq0$ затухают независимо от того, вокруг какой из главных осей инерции происходит вращение. Характерное время их затухания при малой массе жидкости не зависит от M и слабо зависит от ориентации тора внутри волчка (ср. [5]). Существенно иные свойства имеет собственное движение Эйлера — Пуансо. При вращении вокруг оси с наименьшим моментом инерции оно неустойчиво. Неустойчивость связана как с влиянием вязкости (что соответствует общим теоремам [12]), так и с непрерывным характером спектра колебаний идеальной жидкости. Если волчок вращается вокруг оси с наибольшим моментом инерции, то в условиях применимости проделанного рассмотрения собственное движение Эйлера — Пуансо устойчиво. Характерное время его затухания T_0 определяется равенством

$$T_0^{-1}=\frac{J_1}{J_2J_3^{(0)}}\frac{Mr_0^2}{a_2}\left[\frac{1}{4}\omega_0\varkappa^2(1-a_2)^2\left(\frac{1}{2}-\varkappa^2\right)^{-1/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\nu\omega_0)^{1/2}}{r_0}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\varphi\,d\theta\,|\cos\varphi\cos\theta-\varkappa|^{1/2}\right],\qquad \varkappa=\frac{1}{2}(a_2a_3)^{1/2} \tag{2.9}$$

Вязкость влияет на это движение слабее, чем на резонансные движения, так что при не слишком малой вязкости именно движение Эйлера — Пуансо определяет асимптотическое поведение волчка.

Характерное время изменения движения Эйлера — Пуансо существенно зависит от ориентации тороидальной полости внутри волчка. Сравнение выражения (2.9) со случаем осесимметричной ориентации тора [5] показывает, что когда плоскость тора параллельна оси вращения, вязкость влияет на стабилизацию (или дестабилизацию) движения Эйлера — Пуансо примерно в R^2/r_0^2 раз сильнее, чем при осесимметричной ориентации полости. Влияние непрерывного характера спектра колебаний жидкости добавочно усиливает стабилизацию (или дестабилизацию) волчка при рассматриваемом расположении тора (см. первое слагаемое в (2.9)). Более детальное рассмотрение выражения (2.9) показывает, что оптимальной является такая ориентация тороидальной полости, когда плоскость тора параллельна главным осям инерции волчка как с наибольшим, так и с наименьшим моментами инерции. В этом случае T_0 имеет минимальное значение.

Как было показано ранее [3, 4], именно такая ориентация оптимальна и при заполнении полости жидкостью с очень большой вязкостью. В обоих случаях стабилизирующее действие вязкости связано в основном с замкнутым потоком жидкости, который появляется при отклонениях от стационарного вращения и с относительно большой скоростью обтекает все кольцо тора. Но возникновение такого потока связано не с предположением о большой или малой вязкости, а лишь с формой полости. Поэтому можно ожидать, что вывод об оптимальности указанной ориентации является достаточно общим, справедливым при произвольной вязкости, и не только для тора, но и для других замкнутых плоских трубок.

Поступила 31 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
2. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
3. *Смирнова Е. П.* Стабилизация свободного вращения асимметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
4. *Смирнова Е. П.* Движение жидкости большой вязкости во вращающемся торе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
5. *Смирнова Е. П.* Устойчивость свободного вращения волчка, содержащего тороидальную полость с жидкостью малой вязкости. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
6. *Greenspan H. P.* On the transient motion of a contained rotating fluid. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, p. 673.
7. *Рвалов Р. В.* Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
8. *Смирнова Е. П.* Собственные колебания идеальной жидкости в тонкой кольцевой трубке, вращающейся вокруг оси симметрии. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
9. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости. Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 5.
10. *Маслов В. П.* Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 2.
11. *Маслов В. П.* Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 5.
12. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.