

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ
ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ
В ПОДВЕСЕ СФЕРИЧЕСКОГО ПОПЛАВКОВОГО
ГИРОСКОПА

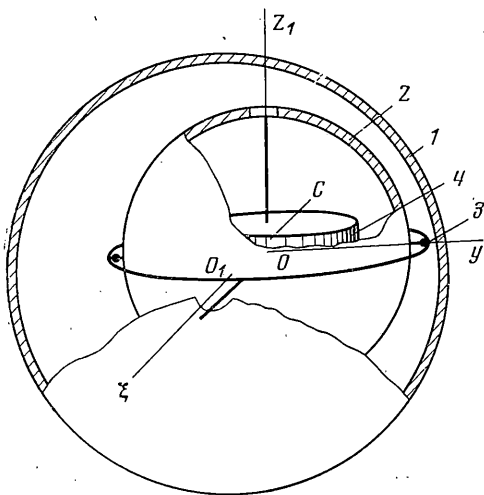
О. М. ГОРОДЕЦКИЙ

(Москва)

Известно, что наличие различных дефектов роторов и их подшипников¹ может быть причиной вибрации гироскопов [1]. Эту вибрацию называют внутренней, так как ее источник находится внутри кожуха гироскопа. В поплавковых гироскопах внутренняя вибрация поплавок вызывает движение вязкой жидкости, присутствующей в подвесе гироскопа. Вследствие этого движения жидкости могут возникать уходы гироскопов.

В предлагаемой работе изучается динамика и вычисляется скорость ухода поплавкового гироскопа со сферическим поплавком при наличии внутренней вибрации.

1. Рассматривается сферический поплавковый гироскоп (фиг. 1). На фиг. 1 введены следующие обозначения: 1 — внешняя сфера (поверхность корпуса), 2 — внутренняя сфера (поверхность поплавка), 3 — кольцо, 4 — ротор. Внешняя сфера предполагается неподвижной. Стенки обеих сфер считаются абсолютно жесткими. Исследуются малые движения



Фиг. 1

поплавка в пределах, допускаемых зазорами в осях поплавка и кольца. Течение жидкости в зазоре между сферами предполагается ламинарным, квазистационарным (инерционные члены в уравнениях Навье — Стокса опускаются, что справедливо при малых числах Рейнольдса), изотермическим; влияние кольца на течение жидкости и на движение поплавка не учитывается. Не учитывается также воздействие на гироскоп сил тяжести; собственный кинетический момент гироскопа H предполагается постоянным, что равносильно предположению постоянства скорости вращения ротора.

Вводятся в рассмотрение системы координат $O_1\xi\eta\zeta$, $Oxyz$ и $Sx_1y_1z_1$, связанные с внешней сферой, внутренней сферой и ротором соответственно. Начала этих систем координат — точки O_1 , O , C — центры

¹ Журавлев В. Ф. Теория вибрации гироскопов. М., Ин-т проблем механики АН СССР. 1972, препринт № 22.

внешней сферы, внутренней сферы и центр масс ротора (фиг. 1). Оси ξ , y , z_1 совпадают с осью подшипников кольца и с осями поплавок и ротора соответственно (фиг. 1). Положение поплавок относительно внешней сферы определяется величинами ξ_0, η_0, ζ_0 — координатами точки O относительно системы координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ и углами Эйлера — Крылова $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (фиг. 2). Аналогично положение ротора относительно внутренней сферы определяется величинами x_c, y_c, z_c , z_c — координатами точки C относительно системы координат $Oxyz$ и углами Эйлера — Крылова α, β, γ (фиг. 3). Предположим, что вибрация ротора определяется дефектами подшипников ротора, поэтому будем считать величины $x_c, y_c, z_c, \alpha, \beta$ периодическими функциями периода T . Этот период связан с угловой скоростью вращения ротора γ , в некоторых случаях можно считать $T=2\pi/\gamma$. Подробное исследование зависимостей величин $x_c, y_c, z_c, \alpha, \beta$ от конструктивных погрешностей ротора и его подшипников содержится в работе [1].

Все оси введенных систем координат предполагаются главными осями инерции соответствующих тел. В начальный момент времени соответствующие оси этих систем координат параллельны между собой.

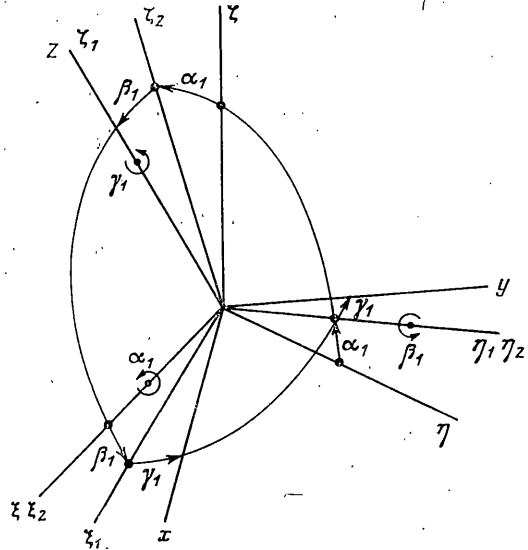
За обобщенные координаты принимаются переменные $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Кинетическая энергия поплавок с ротором T_0 имеет вид

$$T_0 = T_1 + T_2 \quad (1.1)$$

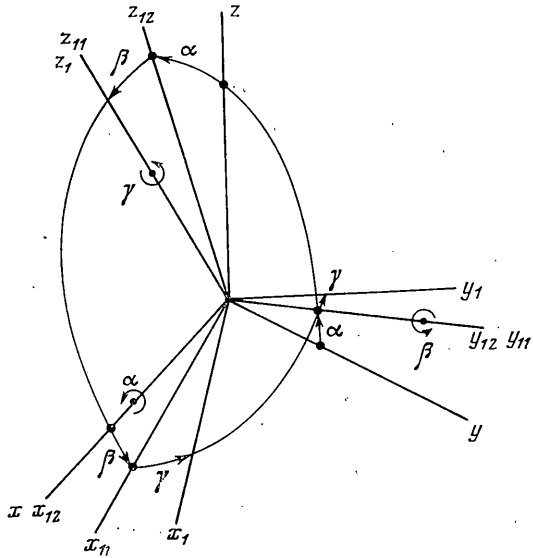
Кинетическая энергия поплавок T_1 и кинетическая энергия ротора T_2 определяются по формулам

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{2}(A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2) \\ & + \frac{1}{2} M_1 (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2) \quad (1.2) \\ T_2 = & \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \\ & + \frac{1}{2} M_2 (v_{cx}^2 + v_{cy}^2 + v_{cz}^2) \end{aligned}$$

в которых A_1, B_1, C_1 — моменты инерции поплавок относительно осей x, y, z ; A, C — моменты инерции ротора относительно осей x_1, z_1 ; p_1, q_1, r_1 — проекции угловой скорости поплавок относительно внешней сферы на оси системы координат $Oxyz$; p, q, r — проекции угловой скорости ротора относительно внешней сферы на оси вспомогательной системы координат $Cx_1y_1z_1$ (фиг. 3), повернутой на угол γ вокруг оси z_1



Фиг. 2



Фиг. 3

относительно системы координат $Cx_1y_1z_1$; M_1, M_2 — массы поплавок и ротора соответственно; v_{cx}, v_{cy}, v_{cz} — проекции скорости центра масс ротора относительно внешней сферы на оси системы координат $Oxyz$.

Используя фиг. 2 и 3, можно получить соотношения

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \beta_1 \sin \gamma_1, & q_1 &= -\alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 + \beta_1 \cos \gamma_1 \\ r_1 &= \alpha_1 \sin \beta_1 + \gamma_1, & p &= (\alpha + p_1) \cos \beta + q_1 \sin \alpha \sin \beta - r_1 \cos \alpha \sin \beta \\ q &= \beta + q_1 \cos \alpha + r_1 \sin \alpha, & r &= (\alpha + p_1) \sin \beta - q_1 \sin \alpha \cos \beta + r_1 \cos \alpha \cos \beta + \gamma \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} v_{cx} &= x_c + [\xi_0 \cos \beta_1 - (\zeta_0 \cos \alpha_1 - \eta_0 \sin \alpha_1) \sin \beta_1] \cos \gamma_1 + \\ &+ (\eta_0 \cos \alpha_1 + \zeta_0 \sin \alpha_1) \sin \gamma_1 + (q_1 z_c - y_1 r_1) \\ v_{cy} &= y_c - [\xi_0 \cos \beta_1 - (\zeta_0 \cos \alpha_1 - \eta_0 \sin \alpha_1) \sin \beta_1] \sin \gamma_1 + \\ &+ (\eta_0 \cos \alpha_1 + \zeta_0 \sin \alpha_1) \cos \gamma_1 + (x_1 r_1 - p_1 z_c) \\ v_{cz} &= z_c + \xi_0 \sin \beta_1 + (\zeta_0 \cos \alpha_1 - \eta_0 \sin \alpha_1) \cos \beta_1 + (p_1 y_c - q_1 x_c) \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (1.3) в формулы (1.2), а полученный результат в формулу (1.1), можно найти выражения для T_0 как функции обобщенных координат и их производных. Окончательная формула для T_0 вследствие громоздкости здесь не приводится.

Внешними силами, действующими на изучаемую механическую систему (поплавок и ротор), являются силы реакции вязкой жидкости, которые возникают при движении поплавок в жидкости. Для их определения следует решить гидродинамическую задачу о движении сферы внутри другой сферы, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. В предположениях, оговоренных выше, эта задача была решена Л. Г. Лойцяньским [2]. Им были получены следующие формулы для результирующей сил F и момента сил L относительно точки O , действующих на внутреннюю сферу со стороны вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3} K_1(\lambda) v_0 + \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3} K_1(\lambda) \omega \times e + \frac{8\pi\mu R^4 K_1(\lambda) - K_2(\lambda)}{\varepsilon^5 \lambda^2} (v_0 \cdot e) e \\ L &= -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon} (1 + \lambda^2) K_1(\lambda) \omega - \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3} K_1(\lambda) v_0 \times e + \\ &+ \frac{8\pi\mu R^4 (1 + \lambda^2) K_1(\lambda) - (1 - \lambda^2) K_2(\lambda)}{3\varepsilon^3 \lambda^2} (\omega \cdot e) e \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь R — радиус внутренней сферы; ε — зазор между сферами, так что $R + \varepsilon$ — радиус внешней сферы; μ — коэффициент вязкости смазки в подвесе; e — вектор смещения O_1O ; ω — вектор угловой скорости поплавок относительно внешней сферы; v_0 — вектор скорости центра поплавок относительно внешней сферы.

Величины $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$ и λ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} K_1(\lambda) &= \frac{3}{2(4 + \lambda^2)} \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3} \right) \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} - \frac{2}{\lambda^2} \right] \\ K_2(\lambda) &= \frac{3}{4\lambda^3} \left(\frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} - \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right), \quad \lambda = \frac{|e|}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Формулы (1.4) выведены в предположении $\varepsilon/R \ll 1$.

В соответствии с фиг. 2 находим выражения для обобщенных сил $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$, соответствующих обобщенным координатам $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, в виде

$$Q_1 = F_{\xi}, \quad Q_2 = F_{\eta}, \quad Q_3 = F_{\zeta}, \quad Q_4 = L_{\xi}, \quad Q_5 = L_{\eta}, \quad Q_6 = L_{\zeta} \quad (1.6)$$

где $F_{\xi}, F_{\eta}, F_{\zeta}$ — проекции F на оси ξ, η, ζ соответственно; L_{ξ}, L_z — проекции L на оси ξ, z ; L_{η_2} — проекция L на ось η_2 вспомогательной системы координат $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, повернутой на угол α_1 вокруг оси ξ относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$.

Используя выражения для T_0 и Q_h , можно составить уравнения Лагранжа второго рода. Точные уравнения движения поплавка весьма громоздки. Поскольку рассматриваются лишь малые колебания поплавка и ротора относительно положения $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = x_c = y_c = z_c = \alpha = \beta = 0$, то в дальнейшем будут исследованы уравнения движения поплавка, содержащие лишь линейные и квадратичные члены относительно переменных $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, x_c, y_c, z_c, \alpha, \beta$ и их производных по времени. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
 (M_1 + M_2) \xi_0'' + 2a_1 \xi_0' &= a_1 (\beta' \zeta_0 - \gamma_1' \eta_0) - M_2 \frac{d^2}{dt^2} (x_c + \beta_1 z_c - y_c \gamma_1) \\
 (M_1 + M_2) \eta_0'' + 2a_1 \eta_0' &= a_1 (\gamma_1' \xi_0 - \alpha_1' \zeta_0) - M_2 \frac{d^2}{dt^2} (y_c + \gamma_1 x_c - z_c \alpha_1) \\
 (M_1 + M_2) \zeta_0'' + 2a_1 \zeta_0' &= a_1 (\alpha_1' \eta_0 - \beta_1' \xi_0) - M_2 \frac{d^2}{dt^2} (z_c + \alpha_1 y_c - x_c \beta_1) \\
 (A_1 + A) \alpha_1'' + \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \alpha_1' + H \beta_1' &= \frac{d}{dt} [(B_1 - A_1) \beta_1' \gamma_1 - (C + C_1) \beta_1 \gamma_1' + \\
 &+ (A - C) \gamma_1' \beta + A \beta' \gamma_1 - H \alpha \gamma_1 - A \alpha' - H \beta - M_2 (z_c' y_c - y_c' z_c)] + \\
 &+ M_2 (\eta_0'' z_c - \xi_0'' y_c) - \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \gamma_1' \beta_1 - a_1 (\eta_0' \zeta_0 - \eta_0 \zeta_0') \\
 (B_1 + A) \beta_1'' + \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \beta_1' - H \alpha_1' &= \frac{d}{dt} [(B_1 - A_1) \alpha_1' \gamma_1 + (C - A) \alpha_1 \gamma_1' - A \beta' + H \alpha - H \gamma_1 \beta - \\
 &- M_2 (x_c' z_c - z_c' x_c)] + (C_1 + C) \alpha_1' \gamma_1 + M_2 (\zeta_0'' x_c - \xi_0'' z_c) - a_1 (\zeta_0' \xi_0 - \xi_0 \zeta_0') \\
 (C_1 + C) \gamma_1'' + \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \gamma_1' &= \frac{d}{dt} [(C - A) \alpha \beta_1' + (A - C) \alpha_1' \beta - (C_1 + C) \alpha_1' \beta_1 + \\
 &+ (A - C) \alpha' \beta - A \alpha \beta' + \frac{1}{2} H (\alpha^2 + \beta^2) - M_2 (y_c' x_c - x_c' y_c)] + (A_1 - B_1) \alpha_1' \beta_1' + \\
 &+ A (\alpha' \beta_1' - \alpha_1' \beta') + H (\alpha_1' \alpha + \beta_1' \beta) + M_2 (\xi_0'' y_c - \eta_0'' x_c) - \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \alpha_1' \beta_1 - a_1 (\xi_0' \eta_0 - \xi_0 \eta_0') \\
 & a_1 = 4\pi\mu R^4 \varepsilon^{-3}, \quad H = C \gamma'
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Система уравнений (1.7) является системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 12 порядка.

2. На основании выражений (1.7) можно получить систему линеаризованных уравнений движения поплавка

$$\begin{aligned}
 (M_1 + M_2) \xi_0'' + 2a_1 \xi_0' &= -M_2 x_c'' \\
 (M_1 + M_2) \eta_0'' + 2a_1 \eta_0' &= -M_2 y_c'' \\
 (M_1 + M_2) \zeta_0'' + 2a_1 \zeta_0' &= -M_2 z_c'' \\
 (A_1 + A) \alpha_1'' + \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \alpha_1' + H \beta_1' &= -A \alpha'' - H \beta' \\
 (B_1 + A) \beta_1'' + \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \beta_1' - H \alpha_1' &= -A \beta'' + H \alpha' \\
 (C_1 + C) \gamma_1'' + \frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 \gamma_1' &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Согласно принятому допущению разложим величины $x_c, y_c, z_c, \alpha, \beta$ в ряды Фурье с периодом T по формулам

$$\begin{aligned}
 u_i &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{ki} \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_{ki} \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \\
 u_1 &= x_c, \quad u_2 = y_c, \quad u_3 = z_c, \quad u_4 = \alpha, \quad u_5 = \beta
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Решение уравнений (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 w_l &= c_{1l} + c_{2l} e^{-\alpha_2 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{kl} \cos \frac{2\pi k}{T} t + g_{kl} \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (l=1,2,3) \\
 \alpha_1 &= c_{14} + c_{24} H^{-1} e^{-\alpha_2 t} \left[\left(\frac{2}{3} a_1 \varepsilon^2 - B_0 \chi \right) \cos(vt + \delta) - B_0 v \sin(vt + \delta) \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{k4} \cos \frac{2\pi k}{T} t + q_{k4} \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \\
 \beta_1 &= c_{15} + c_{25} e^{-\alpha_2 t} \cos(vt + \delta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{k5} \cos \frac{2\pi k}{T} t + g_{k5} \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \\
 \gamma_1 &= c_{16} + c_{26} e^{-\alpha_3 t}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этом решении

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \xi_0, \quad w_2 = \eta_0, \quad w_3 = \zeta_0, \quad f_{kl} = k \frac{a_{kl}(M_1 + M_2)k + 2a_1 b_{kl}}{k^2(M_1 + M_2) + 4a_1^2} \\
 g_{kl} &= k \frac{b_{kl}(M_1 + M_2)k - a_1 a_{kl}}{k^2(M_1 + M_2) + 4a_1^2} \quad (l=1,2,3)
 \end{aligned}$$

v — нутационная частота гироскопа, определяемая выражением

$$\begin{aligned}
 v^2 &= \frac{H^2}{A_0 B_0} - \frac{a_1^2 \varepsilon^4}{9} \frac{(A_1 - B_1)^2}{A_0^2 B_0^2}, \quad B_0 = B_1 + A, \quad A_0 = A_1 + A \\
 a_2 &= \frac{2a_1}{M_1 + M_2}, \quad \chi = \frac{A_0 + B_0}{3A_0 B_0} a_1 \varepsilon^2, \quad a_3 = \frac{2a_1 \varepsilon^2}{C_1 + C}
 \end{aligned}$$

константы C_{1l} , C_{2l} , δ определяются по начальным условиям движения поплава. Выражения для коэффициентов f_{kl} , f_{k5} , g_{kl} , g_{k5} могут быть получены посредством подстановки тригонометрических рядов из второго и третьего соотношений (2.3) в левые части уравнений (2.1) для α_1 и β_1 и последующего приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках с учетом равенств (2.2).

Формулы (2.3) показывают, что решение системы уравнений (2.1) состоит из членов, экспоненциально убывающих со временем, и периодических членов периода, кратного T .

С помощью метода последовательных приближений Пикара [3] найдем решение системы нелинейных уравнений (1.7). Решение системы уравнений первого приближения совпадает с решением линейризованных уравнений (2.3). Система уравнений второго приближения имеет такой же вид, что и система уравнений (1.7), в правые части которой подставлены вместо величин ξ_0 , η_0 , ζ_0 , α_1 , β_1 , γ_1 соответствующие решения системы уравнений первого приближения. Поскольку члены, появляющиеся в правых частях системы уравнений второго приближения от экспоненциально убывающих слагаемых, со временем стремятся к нулю, рассмотрим лишь периодические члены второго приближения.

Вычислим постоянные составляющие второго приближения $\langle \alpha_1 \rangle$, $\langle \beta_1 \rangle$, $\langle \gamma_1 \rangle$ — скорости уходов гироскопа по углам α_1 , β_1 , γ_1 . Здесь и далее

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

На основании уравнений (1.7) находим

$$\begin{aligned} {}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\langle\alpha_1^*\rangle+H\langle\beta_1^*\rangle &= M_2\langle\eta_0^*z_c-\xi_0^*y_c\rangle-a_1\langle\eta_0^*\xi_0-\eta_0\xi_0^*\rangle \\ {}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\langle\beta_1^*\rangle-H\langle\alpha_1^*\rangle &= M_2\langle\xi_0^*x_c-\xi_0^*z_c\rangle-a_1\langle\xi_0^*\xi_0-\xi_0\xi_0^*\rangle \\ {}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\langle\gamma_1^*\rangle &= \langle(A_1-B_1)\alpha_1^*\beta_1^*+A(\alpha_1^*\beta_1^*-\alpha_1^*\beta^*)+H(\alpha_1^*\alpha+\beta_1^*\beta)\rangle+ \\ &+ M_2\langle\xi_0^*y_c-\eta_0^*x_c\rangle-{}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\langle\alpha_1^*\beta_1^*\rangle-a_1\langle\xi_0^*\eta_0-\xi_0\eta_0^*\rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

В этих формулах справа стоят известные функции времени, так как в выражения, стоящие справа, подставлены периодические составляющие величин $\xi_0, \eta_0, \xi_0, \alpha_1, \beta_1$ из первого приближения (2.3).

Заметим, что

$$\langle\eta^*\xi_0\rangle=-\langle\eta_0\xi_0^*\rangle \quad (2.5)$$

поскольку $\left\langle\frac{d}{dt}(\eta_0\xi_0)\right\rangle=0$. Аналогично

$$\langle\xi_0^*\xi_0\rangle=-\langle\xi_0\xi_0^*\rangle, \quad \langle\xi_0^*\eta_0\rangle=-\langle\xi_0\eta_0^*\rangle \quad (2.6)$$

Обращаясь ко второму и третьему уравнениям (2.1), получаем

$$(M_1+M_2)\eta_0^*+2a_1\eta_0=-M_2y_c^*+C_3, \quad (M_1+M_2)\xi_0^*+2a_1\xi_0=-M_2z_c^*+C_4 \quad (2.7)$$

где C_3, C_4 — некоторые постоянные. После несложных преобразований (перенесения дифференцирования с η_0, ξ_0 на z_c, y_c) с учетом равенств (2.5), (2.7) находим, что

$$M_2\langle\eta_0^*z_c-\xi_0^*y_c\rangle-a_1\langle\eta_0^*\xi_0-\eta_0\xi_0^*\rangle=2a_1\langle\eta_0^*\xi_0\rangle \quad (2.8)$$

Аналогично можно получить формулы

$$M_2\langle\xi_0^*x_c-\xi_0^*z_c\rangle-a_1\langle\xi_0^*\xi_0-\xi_0\xi_0^*\rangle=2a_1\langle\xi_0^*\xi_0\rangle \quad (2.9)$$

$$M_2\langle\xi_0^*y_c-\eta_0^*x_c\rangle-a_1\langle\xi_0^*\eta_0-\xi_0\eta_0^*\rangle=2a_1\langle\xi_0^*\eta_0\rangle$$

Решая систему первых двух уравнений (2.4) относительно неизвестных $\langle\alpha_1^*\rangle, \langle\beta_1^*\rangle$ с помощью выражений (2.8), (2.9), определяем

$$\begin{aligned} \langle\alpha_1^*\rangle &= 2a_1 \frac{{}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\langle\eta_0^*\xi_0\rangle-H\langle\xi_0^*\xi_0\rangle}{{}^4/{}_9a_1^2\varepsilon^4+H^2} \\ \langle\beta_1^*\rangle &= 2a_1 \frac{{}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\langle\xi_0^*\xi_0\rangle+H\langle\eta_0^*\xi_0\rangle}{{}^4/{}_9a_1^2\varepsilon^4+H^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Преобразуем правую часть последнего уравнения (2.4). Для этого четвертое и пятое уравнения системы (2.1) интегрируем в виде

$$A_0\alpha_1^*+{}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\alpha_1+H\beta_1=-A\alpha^*-H\beta+C_5 \quad (2.11)$$

$$B_0\beta_1^*+{}^2/{}_3a_1\varepsilon^2\beta_1-H\alpha_1=-A\beta^*+H\alpha+C_6$$

где C_5, C_6 — некоторые постоянные.

Умножая все члены второго уравнения (2.11) на α_1^* , а все члены первого уравнения на $(-\beta_1^*)$ и складывая их, находим

$$\begin{aligned} (A_1-B_1)\alpha_1^*\beta_1^*+A(\alpha_1^*\beta_1^*-\beta^*\alpha_1^*)+H(\beta\beta_1^*+\alpha\alpha_1^*) &= \\ = {}^2/{}_3a_1\varepsilon^2(\alpha_1^*\beta_1^*-\alpha_1\beta_1^*)-H(\beta_1^*\beta_1+\alpha_1^*\alpha_1)+C_5\beta_1^*-C_6\alpha_1^* \end{aligned} \quad (2.12)$$

Осредняя обе части соотношения (2.12), получаем

$$\langle(A_1-B_1)\alpha_1^*\beta_1^*+A(\alpha_1^*\beta_1^*-\beta^*\alpha_1^*)+H(\beta\beta_1^*+\alpha\alpha_1^*)\rangle={}^4/{}_3a_1\varepsilon^2\langle\alpha_1^*\beta_1^*\rangle \quad (2.13)$$

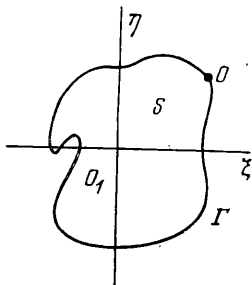
По формулам (2.4), (2.9), (2.13) определяем ($a_1 \neq 0$)

$$\langle \gamma_1 \rangle = \langle \alpha_1 \beta_1 \rangle + 3\varepsilon^{-2} \langle \xi_0 \eta_0 \rangle \quad (2.14)$$

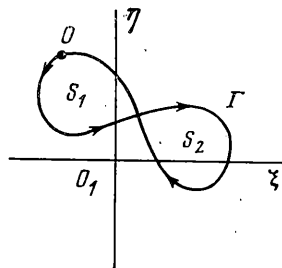
Выражениям $\langle \xi_0 \eta_0 \rangle$, $\langle \eta_0 \zeta_0 \rangle$, $\langle \zeta_0 \xi_0 \rangle$ можно придать геометрический смысл. Так как величину $\langle \xi_0 \eta_0 \rangle$ можно представить в виде

$$\langle \xi_0 \eta_0 \rangle = \frac{1}{T} \oint_{\Gamma} \eta_0(\xi_0) d\xi_0$$

где контур Γ — проекция траектории точки O на плоскость $O_1 \xi \eta$ (фиг. 4), то $\langle \xi_0 \eta_0 \rangle$ пропорционально площади S фигуры, охваченной контуром Γ , причем $\langle \xi_0 \eta_0 \rangle$ положительно, если при движении точки O контур Γ обходится против хода часовой стрелки, и отрицательно в противном случае.



Фиг. 4



Фиг. 5

Отсюда следует, что уход гироскопа может быть незначительным даже при вибрации со значительной амплитудой, если контур Γ имеет самопересечения (фиг. 5). В случае, изображенном на фиг. 5, $\langle \xi_0 \eta_0 \rangle$ пропорционально разности $(S_1 - S_2)$, где S_1, S_2 — площади фигур, охваченных левой и правой частями контура Γ . Аналогичный смысл имеют величины $\langle \eta_0 \zeta_0 \rangle$, $\langle \zeta_0 \xi_0 \rangle$.

Анализируя выражения (2.10), (2.14), приходим к заключению, что уходы гироскопа по углам α_1, β_1 с точностью до второго приближения зависят лишь от поступательных перемещений ротора, а уход по углу γ_1 зависит как от поступательных, так и угловых движений ротора.

3. *Пример.* Зададим следующие параметры гироскопа [4]:

$$\mu = 6.5 \text{ г/смсек}, \quad R = 0.7 \text{ см}, \quad \varepsilon = 0.02 \text{ см}, \quad H = 10^4 \text{ гсм}^2/\text{сек}, \quad \gamma^* = 800 \text{ 1/сек}.$$

Определим скорости уходов гироскопа под действием вибрации, при которой центр поплавка движется с угловой скоростью γ^* по окружности радиуса r_2 , расположенной в плоскости $O_1 \eta \zeta$, т. е. $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = r_2 \cos \gamma^* t$, $\zeta_0 = r_2 \sin \gamma^* t$. Предположим, что $r_2 = 0.1$ мм. Тогда по формулам (2.10) вычисляем: $\langle \alpha_1 \rangle = -0.4$ град/час, $\langle \beta_1 \rangle = -3.9$ град/час.

Автор благодарит Д. М. Климова и В. Ф. Журавлева за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 15 IV 1976

1. Журавлёв В. Ф. О движении свободного гироскопа при наличии внутренних возмущений. Изв. АН СССР. МТГ, 1973, № 5.
2. Лойцянский Л. Г. К теории сферического подшипника. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1950.
4. Сломьянский Г. А., Прядилов Ю. Н. Поплавковые гироскопы и их применение. М., Оборонгиз, 1958.