

ФИЛЬТРАЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН В СТЕРЖНЕ С РЕБРАМИ

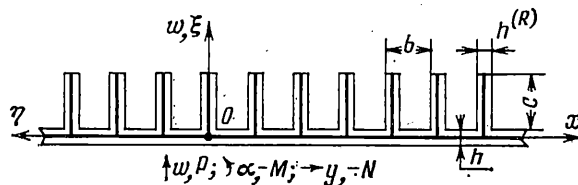
В. В. ГРУЗИН, В. П. КАНДИДОВ, В. И. ШМАЛЬГАУЗЕН

(Москва)

Для ослабления упругих волн, частота которых лежит в узкой полосе, наиболее эффективным оказывается резонансное демпфирование [1-3]. Для этого можно использовать резонансные явления в ребрах жесткости конструкции.

В предлагаемой работе исследуется распространение упругих волн в тонком стержне с периодически расположенными упругими ребрами, а также виброизолирующие свойства фильтра, состоящего из одного или нескольких ребер.

1. Пусть имеется бесконечно длинный стержень с одинаковыми ребрами (фиг. 1). Рассматриваемая система представляет собой одномерную периодическую структуру, каждый период которой является отрезком системы с распределенными параметрами.



Фиг. 1

В такой структуре существуют полосы непрозрачности двух видов: одни возникают из-за периодичности системы, другие — из-за свойств неоднородностей — ребер [4]. Вторые полосы непрозрачности находятся в окрестности собственных частот ребер, проявляются резонансная зависимость между усилиями и смещениями в корне ребра, и их положение на оси частот легко изменять.

Положим, что параметры системы b, c и длина волны λ больше толщины стержня h и ребра $h^{(R)}$. Тогда можно воспользоваться теорией тонких стержней и заменить стержень и ребра их срединными линиями (фиг. 1). Для описания волнового движения в стержне будем рассматривать смещения и усилия в последовательности узлов, расположенных на равном расстоянии одно от другого. В качестве узлов возьмем сечения, находящиеся справа на оси ox от корня ребра (фиг. 1).

Пусть в стержне и ребрах происходят изгибные и продольные колебания частоты ω . Каждый период можно представить линейным многополюсником и для вывода дисперсионного уравнения воспользоваться методом матриц передачи [2, 5]. Для определения матрицы передачи периода \mathbf{H} необходимо найти связь между усилиями и смещениями на его концах.

2. Запишем уравнения изгибных и продольных колебаний отрезка стержня в локальной системе координат xow

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - k^4 w(x) = 0, \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + p^2 y(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq b-0) \quad (2.1)$$

Здесь $y(x), w(x)$ — комплексные амплитуды продольных и поперечных смещений в волне; $p = (\omega^2 \rho E^{-1})^{1/2}$, $k = (\omega^2 \rho \sigma (EI)^{-1})^{1/4}$ — волновые числа; E, ρ — модуль Юнга и плотность материала; I, σ — момент инерции и площадь поперечного сечения стержня.

Общее решение системы (2.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin px + C_2 \cos px, \quad w(x) = D_1 S(kx) + D_2 T(kx) + D_3 U(kx) + D_4 V(kx) \quad (2.2)$$

где S, T, U, V — функции Крылова [2].

Введем в точке $x=0$ вектор параметров: $Z_0^T = (w_0, \alpha_0, N_0, y_0, M_0, P_0)$. Его компоненты являются комплексными амплитудами колебаний смещений и усилий, приложенных к левому концу отрезка стержня (фиг. 1).

Они определяются формулами

$$\begin{aligned} w_0 &= w(0), & \alpha_0 &= \frac{dw(0)}{dx}, & M_0 &= EI \frac{d^2 w(0)}{dx^2} \\ P_0 &= EI \frac{d^3 w(0)}{dx^3}, & y_0 &= y(0), & N_0 &= E\sigma \frac{dy(0)}{dx} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя формулы (2.3), вычислим коэффициенты C_i, D_i в (2.2) и найдем вектор Z_b^- в точке $x=b-0$, компоненты которого линейно выражаются через компоненты Z_0 :

$$Z_b^- = LZ_0$$

$$L = \begin{pmatrix} S & Tk^{-1} & 0 & 0 & U(EI)^{-1}k^{-2} & V(EI)^{-1}k^{-3} \\ Vk & S & 0 & 0 & T(EIk)^{-1} & U(EI)^{-1}k^{-2} \\ 0 & 0 & \cos pb & -pE\sigma \sin pb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (pE\sigma)^{-1}\sin pb & \cos pb & 0 & 0 \\ UEIk^2 & VEIk & 0 & 0 & S & Tk^{-1} \\ TEIk^3 & UEIk^2 & 0 & 0 & Vk & S \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

3. Для получения матрицы передачи через точку соединения с ребром рассмотрим колебания ребра, у которого один конец свободен, а в корне имеют место условия сопряжения. В локальной системе координат ξ эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} y_0^{(R)} = w_b^- = w_b, \quad N_0^{(R)} + P_b^- - P_b = 0, \quad \alpha_0^{(R)} = \alpha_b^- = \alpha_b, \quad M_0^{(R)} - M_b^- + M_b = 0 \\ w_0^{(R)} = -y_b^- = -y_b, \quad P_0^{(R)} - N_b^- + N_b = 0 \quad (\xi = 0) \\ N_c^{(R)} = 0, \quad M_c^{(R)} = 0, \quad P_c^{(R)} = 0 \quad (\xi = c) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $w_0^{(R)}, \alpha_0^{(R)}, \dots, P_0^{(R)}$; $w_c^{(R)}, \dots, P_c^{(R)}$ — смещения и усилия в корне и на конце ребра; $w_b^-, \alpha_b^-, \dots, P_b^-$; w_b, \dots, P_b — смещения и усилия в стержне в точках $x=b-0$ и $x=b$ соответственно. Эти величины образуют векторы $Z_0^{(R)}, Z_c^{(R)}, Z_b^-, Z_b$.

Для $Z_0^{(R)}$ и $Z_c^{(R)}$ имеем

$$Z_c^{(R)} = L^{(R)}Z_0^{(R)} \quad (3.2)$$

где $L^{(R)}$ — матрица передачи для ребра длины c ; ее элементы получаются из соответствующих элементов L заменой $k \rightarrow k^{(R)}, b \rightarrow c, \sigma \rightarrow \sigma^{(R)}, I \rightarrow I^{(R)}$.

Разрешая систему уравнений (3.1), (3.2) относительно компонент Z_b , получим

$$Z_b = RZ_b^- \quad (3.3)$$

В матрице R диагональные элементы равны единице, а остальные нулю, за исключением элементов

$$\begin{aligned} r_{32} = r_{54} = \left(\frac{EIk^2 US - V^2}{S^2 - VT} \right)^{(R)}, \quad r_{34} = \left(\frac{EIk^3 UV - ST}{S^2 - VT} \right)^{(R)} \\ r_{52} = \left(\frac{VS - UT}{S^2 - VT} \right)^{(R)}, \quad r_{61} = (pE\sigma \operatorname{tg} pc)^{(R)} \end{aligned}$$

Индекс (R) означает, что все входящие параметры и аргументы функций S, T, U, V взяты для ребра. На частотах $f_{\perp 3}$, удовлетворяющих условию

$$(S^2 - VT)^{(R)} = 0 \quad (3.4)$$

импедансы в корне ребра для изгибной волны обращаются в бесконечность. Условие (3.4) является уравнением собственных частот поперечных колебаний ребра, у которого один конец свободен, а другой закреплён. На частотах $f_{\parallel 1}$, определяемых уравнением $\operatorname{ctg} pc = 0$, обращается в бесконечность импеданс для продольной волны.

Подставляя (2.4) в (3.3), получим

$$Z_b = HZ_0 \quad (3.5)$$

где $H = RL$ — искомая матрица передачи периода.

4. Уравнение (3.5) имеет место для любого периода структуры

$$Z_n = HZ_{n-1} \quad (4.1)$$

(n — номер узла). Решение системы (4.1) ищем в виде [5]:

$$Z_n = Ae^{\Gamma n} \quad (4.2)$$

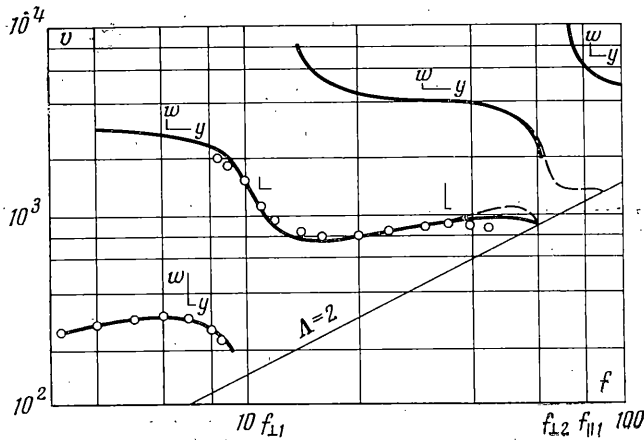
где A — вектор комплексных амплитуд волны, Γ — постоянная распространения.

Подставляя (4.2) в (4.1), получим $2 \operatorname{ch} \Gamma \mathbf{A} = (\mathbf{H} + \mathbf{H}^{-1}) \mathbf{A}$, так что \mathbf{A} является собственным вектором, $2 \operatorname{ch} \Gamma$ — собственным значением матрицы $\mathbf{H} + \mathbf{H}^{-1}$. Матрица $(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{-1})$ имеет три собственных значения, которые находятся из уравнения

$$\operatorname{Det} (2 \operatorname{ch} \Gamma \mathbf{E} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^{-1}) = 0$$

Это есть дисперсионное уравнение стержня с периодически расположенными ребрами. Вообще $\Gamma = \delta - j\beta$, где δ — коэффициент уменьшения амплитуды на периоде, β — сдвиг фаз между колебаниями в соседних узлах, являющийся дискретным аналогом волнового числа для распределенных систем. Продолжая аналогию, введем безразмерную длину собственной волны в структуре, измеряемую в числе периодов, $\Lambda = 2\pi\beta^{-1}$, и фазовую скорость $v = \omega\beta^{-1}$.

5. В качестве примера рассматривалась структура с параметрами: $E = 7.1 \cdot 10^{10} \text{ нм}^{-2}$, $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $b = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $c = 16.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $h^{(R)} = 3.35 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. С помощью ЭЦВМ были определены в зависимости от частоты постоянные распространения



Фиг. 2

ния Γ , фазовые скорости собственных волн v (мсек^{-1}) и компоненты вектора \mathbf{A} . Результаты расчета представлены на фиг. 2 в виде кривых, возле которых схематически изображено соотношение между амплитудами продольных и поперечных смещений в волне.

Для $f < 9.5 \text{ кГц} \approx f_{L1}$ в структуре могут распространяться две гармонические волны, из которых волна с большей скоростью близка к продольной, с меньшей — к изгибной. При приближении к $f_{L1} = 10.5 \text{ кГц}$ имеет место сильная дисперсия. Когда $f \approx 9.5 \text{ кГц}$, Λ «почти изгибной» волны уменьшается до двух и для этой волны структура становится непрозрачной. В полосе от 9.5 кГц до 13 кГц может распространяться только одна волна, у которой скорость резко падает и возрастает доля изгибной компоненты. Эту область частот можно назвать полосой полупрозрачности. Появление полосы полупрозрачности объясняется резонансными колебаниями ребер, при которых для одной из волн возрастают силы реакции в узлах и длина волны уменьшается до удвоенного периода. При $f > 13 \text{ кГц}$ появляется еще одна гармоническая волна, «занимающая место» почти продольной.

Аналогичная картина повторяется в окрестности второй собственной частоты изгибных колебаний ребра $f_{L2} = 66 \text{ кГц}$. Для рассматриваемой системы на полосу полупрозрачности, определяемую этой частотой, накладывается полоса, связанная с первой частотой продольных колебаний $f_{||1} = 79 \text{ кГц}$. В результате образуется полоса непрозрачности от 62 до 72 кГц , в которой невозможно распространение гармонических волн. Для сравнения на фиг. 2 штриховой линией нанесен график фазовых скоростей, получающихся без учета продольных колебаний ребер.

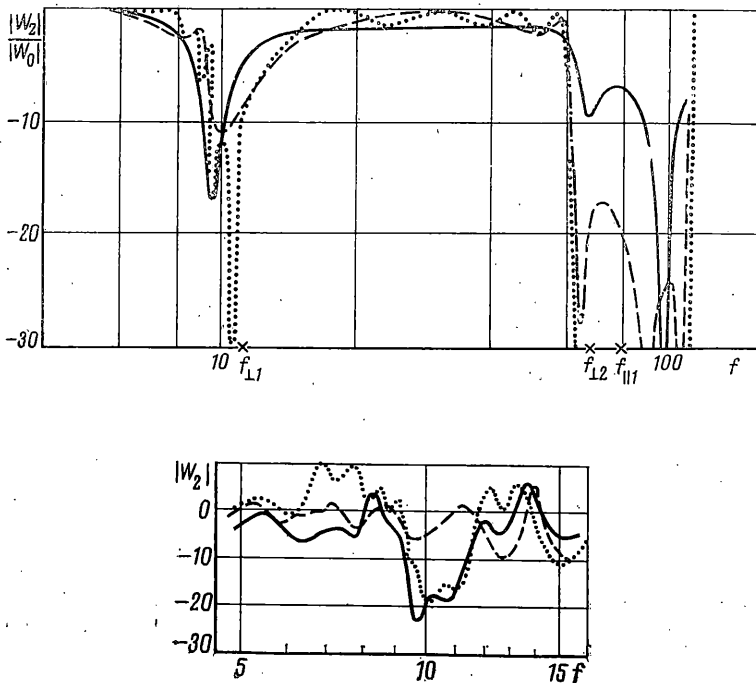
Как показывают расчеты, при сближении частот f_{L2} и $f_{||1}$ ширина полосы непрозрачности увеличивается. При разнесении этих частот полоса непрозрачности исчезает, превращаясь в полосу полупрозрачности.

В расчетах определялась также форма колебаний ребра и отрезка стержня на периоде. Амплитуда изгибных колебаний ребра возрастает при приближении к полосам полупрозрачности. Она стремится к бесконечности для волны, у которой безразмерная длина уменьшается до двух. Для распространяющейся волны амплитуда на

конце ребра более чем в десять раз превышает амплитуду поперечного смещения в стержне.

Экспериментальное измерение фазовых скоростей производилось методом стоячих волн на ребристом стержне, у которого один конец заглушен в песке, а другой свободен [1]. Для возбуждения использовалась распавшаяся струя воды, которая направлялась перпендикулярно к оси стержня. Случайная сила, создаваемая струей в точке возбуждения, имеет равномерный спектр в широкой полосе частот [6]. Поперечные колебания стержня измерялись пьезоэлектрическим датчиком, сигнал с которого подавался на спектроанализатор типа С5-3. Для регистрации использовался самописец Н-110, у которого механизм протяжки бумаги синхронизовался с перемещением точки возбуждения вдоль по стержню. Экспериментальные значения фазовых скоростей нанесены точками на фиг. 2.

6. Для практики представляют интерес фильтрующие свойства группы из конечного числа ребер. Анализ их удобно проводить с помощью аппарата матриц передачи.



Фиг. 3

Рассмотрим бесконечный стержень, у которого на некотором отрезке находится s ребер, равностоящих одно от другого. Пусть слева на ребра падает изгибная волна частоты ω и комплексной амплитуды W_0 . Слева от фильтра возникает отраженная изгибная волна амплитуды W_1 , экспоненциально затухающая волна W_1' и продольная Y_1 . Справа за ребрами распространяется прошедшая изгибная волна амплитуды W_2 , затухающая волна W_2' и продольная Y_2 . Представим группу ребер цепочкой из s последовательно соединенных многополюсников, у первого из которых матрица передачи R , а у остальных — H . Запишем условия сопряжения для волн слева и справа от фильтра

$$Z_s = H^{s-1} R Z_1 \tag{6.1}$$

Здесь векторы Z_1 и Z_s вычисляются по формулам (2.3) соответственно для волн слева и справа от фильтра, R , H — матрицы передачи, определяемые выражениями (3.3), (3.5).

Условия сопряжения (6.1) представляют собой систему из шести уравнений с комплексными коэффициентами относительно комплексных амплитуд волн $W_1, W_2, W_1', W_2', Y_1, Y_2$. Из ее решения можно определить амплитуды прошедших и отраженных волн, а также коэффициенты виброизоляции. Суммарный коэффициент

виброизоляции K_{Σ} , введенный в [1], измеряется в децибеллах и равен отношению энергии падающих волн к энергии прошедших

$$K_{\Sigma} = 10 \lg \frac{2|W_0|^2 k^{-2}}{2|W_2|^2 k^{-2} + |Y_2|^2 p^{-2}}$$

Коэффициент виброизоляции по изгибной компоненте K_{\perp} равен отношению энергий только изгибных волн

$$K_{\perp} = 10 \lg (|W_0|^2 / |W_2|^2)$$

На фиг. 3, а изображены амплитуды прошедшей изгибной волны в зависимости от частоты. Для фильтра из одного ребра (сплошная кривая) $|W_2|$ (дБ) имеет минимумы в окрестностях резонансных частот $f_{\perp 1}$, $f_{\perp 2}$. На этих частотах ребро эквивалентно препятствию с бесконечно большим импедансом. При $f=f_{\perp 1}$, $f_{\perp 2}$ амплитуды отраженной изгибной волны $|W_1|$ и продольных волн $|Y_1|$, $|Y_2|$ достигают максимального значения по модулю. Коэффициенты виброизоляции равны $K_{\perp 1}=16.5$ дБ, $K_{\Sigma 1}=7$ дБ; $K_{\perp 2}=9$ дБ, $K_{\Sigma 2}=5$ дБ. Продольные колебания ребра увеличивают импеданс для поперечных движений стержня. Влияние этого проявляется на частоте 100 кгц, где $|W_2|$ уменьшается до 0.02 $|W_0|$ и $K_{\perp}=K_{\Sigma}=34$ дБ.

В случае двух ребер фильтр представляет собой совокупность двух связанных колебательных систем. В результате минимумы для $|W_2|$ удваиваются (штриховая линия). Для фильтра из шести ребер ширина полос виброизоляции расширяется (пунктирная кривая).

Экспериментальное исследование фильтра проводилось на стержне с группой ребер, у которого один конец был заглушен, а другой возбуждался струей воды. Амплитуда изгибной волны, прошедшей фильтр, измерялась пьезодатчиком и регистрировалась на самописце. На фиг. 3, б приведены некоторые осциллограммы, на которых амплитуда прошедшей изгибной волны $|W_2|$ изображена в зависимости от частоты в полосе 5–15 кгц, где пьезодатчик имеет равномерную характеристику.

Сплошная кривая соответствует фильтру из одного ребра $s=1$, пунктирная — из шести $s=6$, штриховая снята для стержня без ребер $s=0$. Из приведенных результатов видно, что амплитуда $|W_2|$ резко падает в окрестности частоты $f_{\perp 1}$ и глубина максимума для $s=1$ близка к расчетной (ср. фиг. 3, а). Узкий глубокий минимум, полученный в расчетах для $s=6$, в эксперименте не наблюдался. Это, по-видимому, объясняется технологическим разбросом в параметрах ребер. Значение коэффициента K_{\perp} , оцененное по экспериментальным данным, отличается от расчетного на 4–5 дБ, что связано с погрешностью установки.

Проведенный анализ дает основание полагать, что в конструкциях с ребрами жесткости можно достичь путем подбора параметров уменьшения скоростей распространения упругих волн в некотором диапазоне частот. Группа из одного или нескольких ребер может выполнять роль фильтра — пробки для изгибно-продольных волн с коэффициентом виброизоляции 20 дБ и более.

Поступила 7 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоров А. С., Будрин С. В. Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., «Судостроение», 1968.
2. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964.
3. Клячкин И. И. Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинках при помощи резонансных колебательных систем. Акуст. ж., 1960, т. 6, вып. 2.
4. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М., «Сов. радио», 1966.
6. Демиденко Т. Ф., Степанова Н. В., Шмальгаузен В. И. Распавшаяся струя воды как источник случайной силы для акустических измерений. Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон., 1971, № 5.