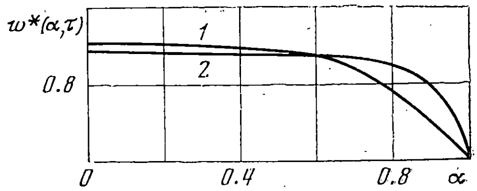
лучаем $n_0^{(0)}=(1-\mu^2)^{1/4}(2\varphi_0 R_0/h)^{1/2}-1$. Для рассматриваемой оболочки $n_0^{(0)}=5.9$; уточненное значение равно $n_0=5.84$. Квадрат безразмерной частоты линейных колебаний: $\Omega_0^2=0.19$.



Фиг. 2

При увеличении амплитуды частота нелинейных колебаний уменьшается и определяется зависимостью $\Omega^2/\Omega_0^2=1-0.104a^2$.

В моменты времени $\tau=0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ продольное перемещение столба жидкости в крайнее верхнее положение, отнесенное к толщине оболочки, равно $\xi(0)=a$; оболочка находится в сжатом состоянии и параметр n, характеризующий ее изгиб, равен $n(0)=5.84+4.32a+2.14a^2$.

В моменты времени $\tau=\pi, 3\pi, \ldots$ продольное перемещение жидкости в крайнее нижнее положение равно $\xi(\pi)=-a+0.206a^2-0.042a^3$; оболочка находится в растянутом положении и параметр n равен $n(\pi)=5.84-4.32a+3.02a^2$.

Прогиб оболочки в этих положениях можно определить по формуле

$$w^*(\alpha,\tau)=\frac{1}{h}w(\alpha,\tau)=\xi(\tau)\left[1+\frac{2}{n(\tau)}\right](1-\alpha^{n(\tau)})$$

На фиг. 2 показан безразмерный прогиб оболочки $w^*(\alpha, \tau)$ в моменты времени $\tau=0$ (кривая *1*) и $\tau=\pi$ (кривая *2* соответствует $-w^*(\alpha, \pi)$) при $a=1$.

Приведенные вычисления показывают, что при амплитудах колебаний, превышающих толщину оболочки ($a>1$), геометрическая нелинейность оболочки оказывает существенное влияние как на частоту, так и на форму колебаний. Кроме того, следует отметить, что большое влияние на частоту нелинейных колебаний оказывает изменение формы колебаний. Например, если считать параметр n постоянным и равным $n_0=5.84$, то вместо зависимости $\Omega^2/\Omega_0^2=1-0.104a^2$ получаем $\Omega^2/\Omega_0^2=1-0.063a^2$, и таким образом влияние нелинейности занижается почти вдвое.

Поступила 7 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шклярчук Ф. Н.* О влиянии сжимаемости жидкости при продольных колебаниях цилиндрического бака. В сб.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Изд-во Новосиб. электротехн. ин-та, 1973.

УДК 539.3

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Ю. А. РОССИХИН

(Брянск)

Основные задачи, связанные с распространением термоупругих апериодических волн в изотропной среде, обсуждались в [1].

В связи с трудностями математического характера, возникающими при выполнении обратного преобразования Лапласа, удается получить лишь приближенные решения, для нахождения которых используются методы возмущений и малых значений времени.

Ниже решается задача о распространении плоской ударной волны в анизотропной термоупругой среде с учетом конечности скорости распространения тепла, а в качестве метода решения используется лучевой метод [2, 3].

Принимается правило суммирования по повторяющимся индексам, индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Латинские индексы принимают значения *1*, *2*, *3*, греческие – *1*, *2*.

1. Предположим, что к плоскости $x_i\nu_i=0$ (ν_i – компоненты единичного вектора нормали), ограничивающей термоупругое анизотропное полупространство, прило-

жены компоненты вектора силы $\sigma_i^\circ=\sigma_{ij}^\circ\nu_j$ и температура θ°, которые разложены в ряды Маклорена

$$\sigma_i^\circ=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k{}^i\frac{t^k}{k!},\qquad \theta^\circ=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa_k\frac{t^k}{k!}\qquad (t>0) \tag{1.1}$$

где $\gamma_k{}^i$ и $\varkappa_k$ – заданные постоянные величины.

Предположим далее, что начальные условия однородны. Задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений [4] с краевыми условиями (1.1):

$$q_{j,j}+c_\varepsilon\theta_{,t}+T_0\beta_{ij}v_{i,j}=0 \tag{1.2}$$

$$\tau q_{j,t}+q_j=-K_{jl}\theta_{,l} \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ij,t}=\lambda_{ijkl}v_{k,l}-\beta_{ij}\theta_{,t} \tag{1.4}$$

$$\sigma_{ij,j}=\rho v_{i,t} \tag{1.5}$$

Здесь q_j – составляющие вектора теплового потока, $\theta=T-T_0$ – температура тела, T_0 – температура тела в естественном состоянии, c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации, $\beta_{ij}=\lambda_{ijkl}\alpha_{kl}$, α_{kl} – коэффициенты теплового расширения, λ_{ijkl} – изотермические коэффициенты жесткости материала, τ – время релаксации теплового потока, K_{ij} – коэффициенты теплопроводности, v_i – компоненты скорости перемещения, σ_{ij} – тензор напряжений, ρ – плотность.

Уравнение сохранения энергии (1.2), закон Фурье (1.3), учитывающий инерцию теплового потока, соотношения Дюамеля – Неймана (1.4) и уравнение движения (1.5) представляют собой систему 13 уравнений для определения 13 неизвестных функций q_j, σ_{ij}, v_i, θ.

2. Для нахождения решения за фронтами ударных волн, возникающих от действия на полупространство краевых условий (1.1), используем лучевой метод, состоящий в представлении искомых функций q_j, σ_{ij}, v_i, θ в виде рядов Тейлора по степеням $t-x_i\nu_ic^{-1}\geqslant 0$:

$$Z(x_i,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(t-\frac{x_i\nu_i}{c}\right)^k[Z^{(k)}_{,t\ldots t}]\,|_{t=x_i\nu_ic^{-1}} \tag{2.1}$$

Величины $[Z^{(k)}_{,t\ldots t}]$, обозначающие скачки производных k-го порядка от искомой функции $Z(x_i,t)$ на фронте ударной волны, определяются из системы (1.2) – (1.5) при помощи кинематических и геометрических условий совместности на поверхности разрыва [5].

В дальнейшем поверхность разрыва Σ будем интерпретировать как предельный слой толщины h при $h\to 0$, в котором величины изменяются от значений q_j^+, σ_{ij}^+, v_j^+, θ^+ до значений q_j^-, σ_{ij}^-, v_j^-, θ^- монотонно и непрерывно.

Учитывая, что на волновой поверхности

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{d}{dn}\nu_i+g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}x_{i\beta},\qquad \frac{\partial}{\partial t}=-c\frac{d}{dn}+\frac{\delta}{\delta t} \tag{2.2}$$

где y_α – координаты по поверхности, $g^{\alpha\beta}$ – контравариантный метрический тензор волновой поверхности, d/dn – производная по нормали к Σ, x_i – декартовы координаты поверхности, $x_{i\beta}=x_{i,\beta}$, $\delta/\delta t$ обозначает δ-дифференцирование соответствующей величины [5], и замечая, что при $h\to 0$ вторыми слагаемыми в (2.2) можно пренебречь по сравнению с первыми, из (1.2) – (1.5) получим

$$\begin{gathered}\frac{dq_j}{dn}\nu_j-cc_\varepsilon\frac{d\theta}{dn}+T_0\beta_{ij}\frac{dv_i}{dn}\nu_j=0,\qquad q_j=-K_{jl}\frac{d\theta}{dn}\nu_l+\tau c\frac{dq_j}{dn}\\ -c\frac{d\sigma_{ij}}{dn}=\lambda_{ijkl}\frac{dv_k}{dn}\nu_l+c\beta_{ij}\frac{d\theta}{dn},\qquad \frac{d\sigma_{ij}}{dn}\nu_j=-\rho c\frac{dv_i}{dn}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Интегрируя соотношения (2.3) по нормали к поверхности от $-{}^1/_2h$ до ${}^1/_2h$ и переходя к пределу при $h\to 0$, получим, что на Σ должны иметь место соотношения

$$\begin{gathered}[q_j]\nu_j-c_\varepsilon c[\theta]+T_0\beta_{ij}\nu_j[v_i]=0,\qquad K_{jl}[\theta]\nu_l=\tau c[q_j]\\ -c[\sigma_{ij}]=\lambda_{ijkl}\nu_l[v_k]+c\beta_{ij}[\theta],\qquad [\sigma_{ij}]\nu_j=-\rho c[v_i]\end{gathered} \tag{2.4}$$

Из (2.4) находим

$$a_{ik}[\sigma_k]=b_irc^2(a^2-c^2)^{-1}b_m[\sigma_m] \tag{2.5}$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения: $a_{ik}=s_{ik}-\rho c^2\delta_{ik}$, $s_{ik}=\lambda_{ijkl}\nu_j\nu_l$, $[\sigma_i]=[\sigma_{ij}]\nu_j$, $b_i=\beta_{ij}\nu_j$, $b^2=b_ib_i$, $r=T_0c_\varepsilon^{-1}$, $a^2=\gamma(\tau c_\varepsilon)^{-1}$, $\gamma=K_{jl}\nu_j\nu_l$.

Полагая, что $b_m[\sigma_m]=\sigma\neq 0$, из соотношения (2.5) будем иметь

$$[\sigma_i]=A_{im}b_m rc^2(a^2-c^2)^{-1}\sigma,\qquad A_{ik}a_{jk}=\delta_{ij} \tag{2.6}$$

Умножая (2.6) на b_i, получим уравнение, определяющее скорости распространения ударных волн

$$a^2-c^2-rc^2A_{ij}b_ib_j=0 \tag{2.7}$$

Выражение (2.7) можно привести к более удобному виду, если ввести в рассмотрение главные направления $\overset{(1)}{l_i}$, $\overset{(2)}{l_i}$, $\overset{(3)}{l_i}$ и главные значения ρa_1^2, ρa_2^2, ρa_3^2 симметричного тензора s_{ik}. Тогда

$$(c^2-a^2)(c^2-a_1^2)(c^2-a_2^2)(c^2-a_3^2)-rc^2\rho^{-1}\{(b_i\overset{(1)}{l_i})^2(c^2-a_2^2)(c^2-a_3^2)+$$

$$+(b_i\overset{(2)}{l_i})^2(c^2-a_1^2)(c^2-a_3^2)+(b_i\overset{(3)}{l_i})^2(c^2-a_1^2)(c^2-a_2^2)\}=0 \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) определяет в общем случае четыре скорости и, следовательно, четыре типа ударных волн, распространяющихся в анизотропной термоупругой среде. В случае отсутствия связанности ($r=0$) из (2.7) получаем одну тепловую ($c=a$) и три упругих волны ($c=a_1$, $c=a_2$, $c=a_3$).

Для определения коэффициентов лучевого ряда (2.1) продифференцируем соотношения (1.2) – (1.5) k раз по времени и возьмем их разность на различных сторонах волновой поверхности. В результате получим

$$[\overset{(k+1)}{q_{j,jt\ldots t}}]+c_\varepsilon[\overset{(k+1)}{\theta_{,t\ldots t}}]+T_0\beta_{ij}[\overset{(k+1)}{v_{i,jt\ldots t}}]=0 \tag{2.9}$$

$$\tau[\overset{(k+1)}{q_{j,t\ldots t}}]+[\overset{(k)}{q_{j,t\ldots t}}]=-K_{jl}[\overset{(k+1)}{\theta_{,lt\ldots t}}] \tag{2.10}$$

$$[\overset{(k+1)}{\sigma_{ij,t\ldots t}}]=\lambda_{ijkl}[\overset{(k+1)}{v_{k,lt\ldots t}}]-\beta_{ij}[\overset{(k+1)}{\theta_{,t\ldots t}}] \tag{2.11}$$

$$[\overset{(k+1)}{\sigma_{ij,jt\ldots t}}]=\rho[\overset{(k+1)}{v_{i,t\ldots t}}] \tag{2.12}$$

Учитывая условие совместности для разрывов производной k-го порядка от некоторой функции $Z(x_i,t)$ [5]

$$c[\overset{(k)}{Z_{,it\ldots t}}]=[-\overset{(k)}{Z_{,t\ldots t}}]\nu_i+\frac{\delta[\overset{(k-1)}{Z_{,t\ldots t}}]}{\delta t}\nu_i \tag{2.13}$$

из соотношения (2.10) – (2.12) найдем

$$\rho c[\overset{(k+1)}{v_{i,t\ldots t}}]=-[\overset{(k+1)}{\sigma_{i,t\ldots t}}]+\frac{\delta[\overset{(k)}{\sigma_{i,t\ldots t}}]}{\delta t} \tag{2.14}$$

$$b_i\rho c^2[\overset{(k+1)}{\theta_{,t\ldots t}}]=a_{im}[\overset{(k+1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]-2s_{im}\frac{\delta[\overset{(k)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t}+s_{im}\frac{\delta^2[\overset{(k-1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t^2} \tag{2.15}$$

$$b_i\rho c^3[\overset{(k+1)}{q_{j,t\ldots t}}]\nu_j=\gamma a_{im}\tau^{-1}[\overset{(k+1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]-$$

$$-\gamma(2s_{im}+a_{im})\tau^{-1}\frac{\delta[\overset{(k)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t}-\gamma a_{im}\tau^{-2}[\overset{(k)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]+\overset{(k)}{f_i}(t) \tag{2.16}$$

$$\overset{(k)}{f_i}(t)=\gamma\sum_{n=0}^{k-1}L\left\{a_{im}[\overset{(n)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]-2s_{im}\frac{\delta[\overset{(n-1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t}+s_{im}\frac{\delta^2[\overset{(n-2)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t^2}\right\}(-\tau)^{n-k-1}+$$

$$+\gamma s_{im}\tau^{-1}L\left\{2\frac{\delta[\overset{(k-1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t}-\frac{\delta^2[\overset{(k-2)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t^2}\right\}+\gamma s_{im}\tau^{-1}\frac{\delta^2[\overset{(k-1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t^2}$$

$$L=\frac{1}{\tau}+\frac{\delta}{\delta t},\qquad [\overset{(k)}{\sigma_{i,t\ldots t}}]=[\overset{(k)}{\sigma_{ij,t\ldots t}}]\nu_j$$

Умножая уравнение (2.9) на b_i и используя выражения (2.13) – (2.16), будем иметь

$$c_\varepsilon[\overset{(k+1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]\{a_{im}(a^2-c^2)-c^2rb_ib_m\}=\overset{(k)}{\Omega_i} \tag{2.17}$$

$$\overset{(k)}{\Omega_i}=2\frac{\delta[\overset{(k)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t}\{s_{im}(a^2-c^2)c_\varepsilon+a_{im}\gamma\tau^{-1}-T_0c^2b_ib_m\}+\gamma a_{im}\tau^{-2}[\overset{(k)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]-\overset{(k)}{F_i}(t)$$

$$\overset{(k)}{F_i}(t)=\overset{(k)}{f_i}(t)-\frac{\delta \overset{(k-1)}{f_i}(t)}{\delta t}-\frac{\delta^2[\overset{(k-1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t^2}\{c_\varepsilon s_{im}(c^2-2a^2)-$$

$$-a_{im}\gamma\tau^{-1}+T_0c^2b_ib_m\}+\gamma a_{im}\tau^{-2}\frac{\delta[\overset{(k-1)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]}{\delta t}$$

Умножая правую и левую часть соотношения (2.17) на $A_{ik}b_k$ и учитывая выражение (2.7), получим

$$\overset{(k)}{\Omega_i}A_{ik}b_k=0 \tag{2.18}$$

Полагая, что $b_m[\overset{(k)}{\sigma_{m,t\ldots t}}]=\sigma^{(k)}$, из (2.17) при k, равном $k-1$, следует

$$[\overset{(k)}{\sigma_{i,t\ldots t}}]=\frac{A_{im}b_mc^2r}{a^2-c^2}\sigma^{(k)}+\frac{\overset{(k-1)}{\Omega_m}A_{im}}{c_\varepsilon(a^2-c^2)} \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.18), получим рекуррентное уравнение, определяющее коэффициенты лучевого ряда

$$\frac{\delta\sigma^{(k)}}{\delta t}+\alpha\sigma^{(k)}=G^{(k)}(t) \tag{2.20}$$

$$\alpha=\gamma\tau^{-2}\beta^{-1},\qquad \beta=2(\gamma\tau^{-1}+2\rho c^4rc_\varepsilon A_{im}b_iA_{mk}b_k)$$

$$G^{(k)}(t)=\left(\overset{(k)}{F_i}(t)A_{ik}b_k-2\rho c^2A_{mk}b_kA_{im}\frac{\delta\overset{(k-1)}{\Omega_i}}{\delta t}\right)\beta^{-1}\qquad (k>0)$$

Интегрируя уравнение (2.20) и учитывая, что $G^{(k)}(t)\equiv0$ при $k=0$, будем иметь

$$\sigma^{(k)}=e^{-\alpha t}\int_0^t G^{(k)}(s)e^{\alpha s}ds+B_ke^{-\alpha t}\qquad (k\geqslant 0) \tag{2.21}$$

Зная величины $\sigma^{(k)}$, из (2.19) определим $[\overset{(k)}{\sigma_{i,t\ldots t}}]$, а затем из (2.15) при k, равном $k-1$, найдем $[\overset{(k)}{\theta_{,t\ldots t}}]$.

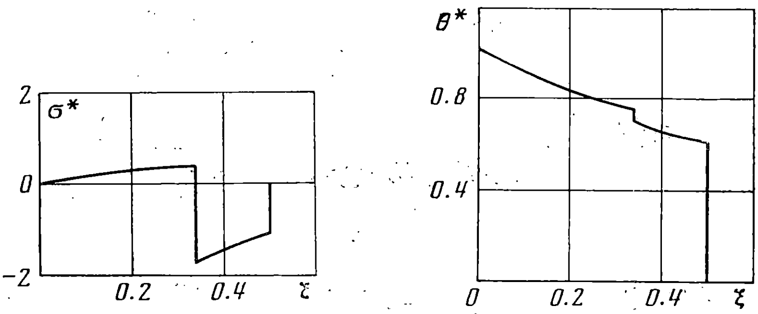
Так как каждой волне соответствуют свои величины $[\overset{(k)}{\sigma}_{i,t\ldots t}],[\overset{(k)}{\theta}_{,t\ldots t}]$, то общие выражения для компонент вектора силы σ_i и температуры θ можно записать в виде

$$\sigma_i=\sum_{l=1}^{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(t-\frac{x_j\nu_j}{c_{(l)}}\right)^k[\overset{(k)}{\sigma}_{i(l),t\ldots t}]\,|_{t=x_j\nu_j/c_{(l)}}H\left(t-\frac{x_j\nu_j}{c_{(l)}}\right) \tag{2.22}$$

$$\theta=\sum_{l=1}^{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(t-\frac{x_i\nu_i}{c_{(l)}}\right)^k[\overset{(k)}{\theta}_{(l),t\ldots t}]\,|_{t=x_i\nu_i/c_{(l)}}H\left(t-\frac{x_i\nu_i}{c_{(l)}}\right)$$

Здесь индекс l указывает на порядковый номер волны, $H(t-x_i\nu_i c_{(l)}^{-1})$ – единичная функция Хевисайда, $c_{(l)}$ – корни уравнения (2.8).

Четыре набора констант $B_k^{(l)}$, входящие в (2.22), определяются согласно краевым условиям (1.1).



В качестве примера рассмотрим распространение плоских волн, которые возникают в кристалле цинка вследствие теплового удара ($\theta^\circ=1$, $\sigma_i^\circ=0$). Термоупругие характеристики цинка взяты из [6]. Значение времени релаксации τ принималось равным $0.5\cdot10^{-11}$ *сек* [7], $\sigma^*=\sigma_{33}\rho^{-1}c_0^{-2}$, $c_0^2=\lambda_{3333}\rho^{-1}$, $\theta^*=\theta\lambda_{3333}\beta_{33}^{-1}T_0^{-2}$, $\xi=$ $=x_3c_0c_\varepsilon K_{33}^{-1}$, $\nu_3=1$, $\nu_1=\nu_2=0$.

Результаты расчета эпюр напряжения σ^* и температуры θ^* приведены на фигуре. Вычисления проводились на ЭВМ с учетом пяти членов лучевого ряда.

Из графиков видно, что при $\tau\neq0$ напряжение и температура претерпевают разрыв в двух точках (моменты прихода двух волн) в отличие от случая $\tau=0$, для которого напряжение разрывно в одной точке, а температура всюду непрерывна [1].

Таким образом, в случае конечной скорости распространения тепла ($\tau\neq0$) решение носит чисто волновой характер, и лучевой метод позволяет полностью решить поставленную задачу.

Для бесконечной скорости распространения тепла ($\tau=0$) решение содержит как волновой, так и диффузионные члены [1], и лучевой метод неприменим. В этом случае для нахождения решения используются методы возмущений и малых значений времени.

Поступила 22 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970.
2. *Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Изд-во ЛГУ, 1961.
3. *Achenbach I. D., Reddy D. P.* Note on wave propagation in linearly viscoelastic media. Z. angew. Math. und Phys., 1967, Bd 18, Nr 1.
4. *Kaliski S.* Wave equations of thermoelectromagnetoelasticity. Proc. Probl. Polish. Acad. Sci., 1965, vol. 6, No. 3.
5. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
6. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. М., «Мир», 1967.
7. *Lord H. W., Shulman Y.* A. generalized dynamical theory of thermo-elasticity. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 5.