УДК 539.3:534.1

О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

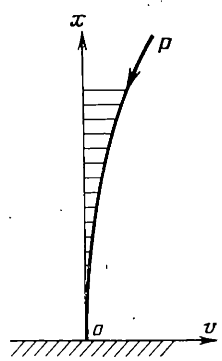
И. И. ВОЛОШИН, В. Г. ГРОМОВ

(Ростов-на-Дону)

В задаче об устойчивости двойного физического маятника, нагруженного следящей сжимающей силой, Циглером [1] был обнаружен «парадокс дестабилизации». Оказалось, что маятник со сколь угодно малой внутренней вязкостью почти в два раза менее устойчив по сравнению с упругим. Последующий анализ более сложных неконсервативных систем (стержни, пластины, оболочки) подтвердил это положение.

Разъяснению некоторых вопросов, связанных с «дестабилизацией», посвящена работа [2], в которой отмечается, что «парадокс дестабилизации» является «следствием некритического применения метода малых колебаний» в неконсервативной задаче устойчивости. Ниже это положение подтверждается примером.

Вопросу устойчивости упругого консольного стержня на упругом основании под действием следящей силы посвящена работа [3], в которой делается парадоксальный вывод: жесткость основания не оказывает влияния на устойчивость. Однако, принимая во внимание результаты [2], нетрудно заметить, что в действительности в [3] исследованы лишь псевдокритические параметры, по поведению которых об устойчивости стержня судить нельзя.



Фиг. 1

Рассматривается консольный стержень на упругом основании, свободный конец которого загружен тангенциальной силой P (фиг. 1). Исследование устойчивости прямолинейной формы равновесия сводится к изучению спектральных свойств линейной задачи для возмущений

$$E_0 v^{\mathrm{IV}} + pv'' + kv + \varkappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$v(0,\ t) = v'(0,\ t) = v''(1,\ t) = v'''(1,\ t) = 0 \tag{2}$$

$$s = x/l, \quad \varkappa^2 = ml^4/EI, \quad p = Pl^2/EI, \quad k = cl^2/EI, \quad E_0 = 1 - \eta E^*$$

где $v(s,\ t)$ — поперечные смещения точек стержня, c — жесткость основания, l — длина стержня, m — погонная масса, I — момент инерции площади поперечного сечения стержня, E — модуль Юнга, E_0 — безразмерный оператор вязкоупругости, η — параметр наследственности. Предполагается, что оператор E^* удовлетворяет условию замкнутого цикла Вольтерра [4, 5].

Решение уравнения (1) представляется в виде

$$v(s,\ t) = \exp(\sigma t)\, w(s) \tag{3}$$

Тогда справедливо равенство

$$E_0 \exp(\sigma t) = [1 - \eta E^*] \exp(\sigma t) = \theta^2(\eta,\ \sigma) \exp(\sigma t)$$

Здесь функция $\theta(\eta,\ \sigma)$ введена для удобства изложения.

Подставляя (3) в (1), получим несамосопряженную краевую задачу относительно w

$$\begin{gathered} \theta^2(\eta,\ \sigma)\, w^{\mathrm{IV}} + pw'' + (k + \varkappa^2\sigma^2)\, w = 0 \\ w(0) = w'(0) = w''(1) = w'''(1) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{4} A_j e^{r_j s}, \qquad r_{1,2}^2 = \theta^{-2} \left\{ \pm \frac{p}{2} + \left[\frac{p^2}{4} - \theta^2 (k + \varkappa^2\sigma^2) \right] \right\} \tag{5}$$

Подчиняя (5) граничным условиям, получаем систему линейных однородных уравнений относительно A_j. Условие нетривиальной разрешимости последней приводит к частотному уравнению

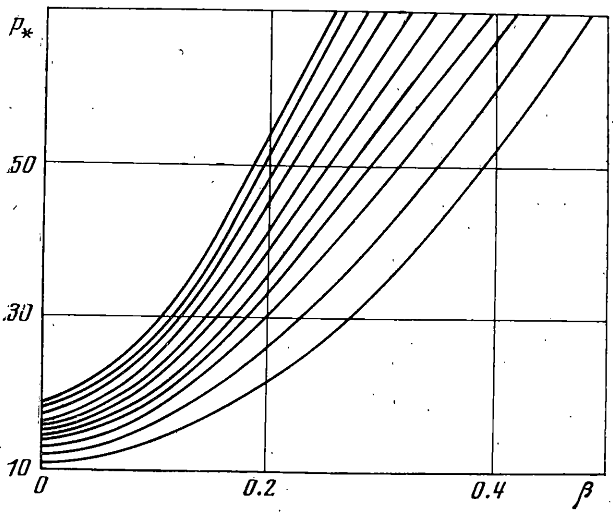
$$r_1^4 + r_2^4 + 2r_1^2 r_2^2 \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 + r_1 r_2 (r_1^2 - r_2^2) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 = 0$$

Это уравнение можно записать в виде явной зависимости от σ, p

$$p^2-(k+\varkappa^2\sigma^2)\,\theta(\eta,\sigma)\left\{2\theta+\left(\frac{p}{2}+\theta\right)\cos\theta^{-2}[p-2\theta(k+\varkappa^2\sigma^2)^{1/2}]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{p}{2}-\theta\right)\cos\theta^{-2}[p+2\theta(k+\varkappa^2\sigma^2)^{1/2}]\right\}=0 \qquad (6)$$

Если $p<0$ либо $p>0$, но достаточно мало, то все корни уравнения (6) расположены в левой полуплоскости ($\sigma=\gamma+i\omega$, $\gamma<0$). При увеличении параметра p конечное число корней переходит в правую полуплоскость ($\gamma>0$). Значение p_* параметра p называется критическим, если при $p<p_*$ все корни расположены в левой полуплоскости, а при $p>p_*$ хотя бы один из них попадает в правую [2, 5].



Фиг. 2

С целью выяснения влияния параметра жесткости основания k на устойчивость прямолинейной формы равновесия была выбрана простая функция $\theta(\eta, \sigma)$, соответствующая модели Фойгта

$$\theta^2(\eta,\sigma)=1+i\eta\omega=1+i\beta\Omega,\qquad \beta=\frac{\eta}{\varkappa},\qquad \Omega=\varkappa\omega \qquad (7)$$

Решения уравнения (6) с учетом (7), полученные на ЭВМ, приведены на фиг. 2. Зависимости критической силы p_* от вязкости β изображены для следующих значений параметра k: 0, 10, 20, ..., 100.

Как видно из результатов расчета, при $\beta\neq0$ предельные значения критических параметров ($\lim p_*$ при $\beta\to0$) существенно зависят от жесткости основания, что полностью согласуется с интуитивными представлениями о повышении критической силы с увеличением жесткости. Сравнение этого факта с выводами работы [3] позволяет заключить, что упругая идеализация деформируемых систем в неконсервативных задачах устойчивости теряет физический смысл. Формальное рассмотрение упругих систем приводит [5] к потере решений частотного уравнения и, как следствие, к неправдоподобным результатам. Обоснованными выводами, видимо, нужно считать те, которые не противоречат принципу непрерывности при переходе от реальных систем к идеализированным.

Поступила 28 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. Ingr-Arch, 1952, Bd 20, H. 1.
2. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, No. 9,

3. *Smith T. E., Herrmann G.* Stability of a beam on an elastic foundation subjected to a follower force. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1972, № 2).
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
5. *Волошин И. И. Громов В. Г.* Устойчивость консольного вязкоупругого стержня, загруженного следящей силой. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.

УДК 533.6.013.42

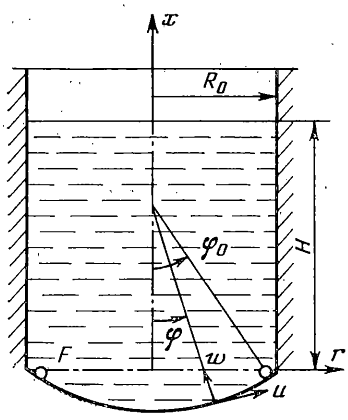
НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ

Е. И. ОБРАЗЦОВА

(Москва)

При осесимметричных колебаниях цилиндрического бака с жидкостью по низшим формам оболочка днища испытывает значительные усилия в срединной поверхности и резкое изгибание типа краевого эффекта вблизи соединительного шпангоута. Одновременное действие на оболочку этих двух факторов приводит к геометрической нелинейности системы. Здесь рассматриваются свободные колебания идеальной несжимаемой жидкости в жестком цилиндрическом баке с упругим днищем в виде пологой сферической оболочки с учетом ее геометрической нелинейности.

Запишем выражение для потенциальной энергии осесимметричной деформации пологой сферической оболочки с упругим шпангоутом на краю (фиг. 1), используя известные соотношения для деформации при конечных прогибах.



Фиг. 1

При этом исключаем тангенциальное перемещение $u(\varphi, t)$, используя дифференциальное уравнение равновесия оболочки в тангенциальном направлении ($\alpha=\varphi/\varphi_0$)

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}(u\alpha)\right]=(1+\mu)\varphi_0\frac{dw}{d\alpha}-\frac{1}{R_0}\frac{dw}{d\alpha}\frac{d^2w}{d\alpha^2}-\frac{1-\mu}{2R_0}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2$$

в котором пренебрегаем инерцией оболочки. Интегрируя это уравнение, найдем

$$u=u_0\alpha-(1+\mu)\varphi_0\left[\alpha\int_0^1 w\alpha\,d\alpha-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha w\alpha\,d\alpha\right]+$$

$$+\psi(1)\alpha-\frac{1}{\alpha}\psi(\alpha)$$

$$\psi(\alpha)=\frac{1}{2R_0}\int_0^\alpha\left[\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2+(1-\mu)\int_0^\alpha\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2\frac{d\alpha}{\alpha}\right]\alpha\,d\alpha$$

где u_0 — тангенциальное перемещение на краю оболочки при $\alpha=1$. После громоздких преобразований выражение для потенциальной энергии запишем в виде

$$\Pi=\frac{\pi Eh}{1-\mu}(U_0+U_1+U_2) \tag{1}$$

$$U_0=u_0^2-4\varphi_0u_0\int_0^1 w\alpha\,d\alpha+2(1+\mu)\varphi_0^2\left(\int_0^1 w\alpha\,d\alpha\right)^2+(1-\mu)\varphi_0^2\int_0^1 w^2\alpha\,d\alpha+$$

$$+\beta\left[\int_0^1(\nabla^2w)^2\alpha\,d\alpha-(1-\mu)(w')^2_{\alpha=1}\right]+(1-\mu)\varkappa[u_0-\varphi_0w|_{\alpha=1}]^2$$