водятся данные из [2] по расчету методом коллокации одноосного растяжения ($N=N_1=4$) рассматриваемой области до значения $\lambda=1.5$.

В таблице приведены также данные для случая $N=2$, соответствующие известному решению Линга [6]. Полученные результаты подтверждают качественный вывод в [4] о некотором разгружении контура при переходе от двух к большему числу отверстий.

На фигуре приведены угловые распределения σ_θ/P вдоль контура отверстия при $\lambda=1.250$ для $N=2$, 4, 6. Максимальное напряжение, как и следовало ожидать, наблюдается вблизи линии центров двух соседних отверстий.

Поступила 17 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев, «Вища школа», 1975.
2. *Hamada M., Mizushima I., Hamamoto M., Masuda T.* A Numerical method for Stress concentration problems of infinite plates with many circular holes subjected to uniaxial tension. Trans. ASME. Ser. H, J. Engng Mater. Technolog., 1974, vol. 96, No. 1. (Рус. перев.: Теор. основы инж. расчетов. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Н, 1974, т. 96, № 1.)
3. *Вигдергауз С. Б.* О плоской задаче теории упругости для многосвязных областей с циклической симметрией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
4. *Шерман Д. И.* Об одном способе рассмотрения краевых задач теории функций и двумерных задач теории упругости. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
5. *Манджавидзе Г. Ф.* Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
6. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.– Л., Гостехиздат, 1950.

УДК 539.374

ОБРАТНАЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ

В. М. МИРСАЛИМОВ

(Липецк)

При проектировании некоторых типов тепловыделяющих элементов приходится проводить расчет температурных напряжений в сплошной среде, пронизанной цилиндрическими каналами, оси которых параллельны одна другой [1, 2]. Для предотвращения концентрации напряжений представляет интерес отыскание такой формы цилиндрического канала, при которой нет каких-либо участков, предпочтительных для хрупкого разрушения или пластических деформаций.

Рассматривается задача об отыскании равнопрочной формы канала при условии, что по всему объему тела интенсивность тепловыделения q равномерна, тело может свободно расширяться и что система находится в стационарном состоянии, а теплосъем реализуется через поверхности каналов. Критерием, определяющим равнопрочную форму канала, служит условие отсутствия концентрации напряжений на поверхности канала или требование зарождения пластической области сразу по всей поверхности канала [3]. Считается, что каналы расположены в вершинах двоякопериодической сетки, максимальный температурный перепад в среде невелик, и свойства материала постоянны в пределах этого перепада.

Метод решения рассматриваемой задачи представляет собой обобщение метода решения двоякопериодических упругопластических задач [4–6].

Пусть имеется двоякопериодическая решетка с неизвестными криволинейными отверстиями, имеющими центры в точках

$$P_{mn}=m\omega_1+n\omega_2 \quad (m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots), \qquad \omega_1=2, \qquad \omega_2=2l\exp(i\alpha), \qquad l>0, \qquad \operatorname{Im}\omega_2>0$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке P_{mn} через L_{mn}, а внешность контуров L_{mn} через D_z.

На неизвестном контуре отверстия L_{mn} граничные условия имеют вид

$$\partial T/\partial n=h(T_0-T)/\delta \tag{1}$$

$$\sigma_n=p, \qquad \tau_{nt}=0, \qquad \sigma_t=\sigma_*=\mathrm{const} \tag{2}$$

где t и n – направление касательной и нормали к контуру тела, $T(x, y)$ – температура в области D_z, T_0 – температура охлаждающей среды, δ – коэффициент теплопроводности материала тела, h – коэффициент теплоотдачи.

В случае упругого тела величина $\sigma_*=\text{const}$ подлежит определению в процессе решения. Для упругопластического материала соотношение $\sigma_t=\sigma_*$ представляет собой условие, накладываемое на развитие пластической зоны, т. е. сводится к требованию, чтобы пластическая зона в момент зарождения охватывала сразу весь контур отверстия, не проникая в глубь тела. В этом случае σ_* – заданная величина. Температура $T(x, y)$ в области D_z является решением уравнения теплопроводности $\Delta T(x, y)+q/\delta=0$.

Термоупругие напряжения определяются по формулам [7]:

$$\sigma_x+\sigma_y=8\operatorname{Re}\Phi(z)-\alpha ET(x, y)$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=4[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]-\alpha E\int\frac{\partial T}{\partial z}d\bar{z}$$

Здесь α – коэффициент линейного температурного расширения, E – модуль упругости материала.

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z=\omega(\zeta)$. Аналитическая функция $z=\omega(\zeta)$ осуществляет конформное отображение области D_z на область D_ζ в плоскости ζ, являющуюся внешностью окружностей Γ_{mn} радиуса λ с центрами в точках P_{mn}.

Обозначим $\varphi(\zeta)=\Phi[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta)=\Psi[\omega(\zeta)]$, $t(\zeta, \bar{\zeta})=T[\omega(\zeta), \overline{\omega(\zeta)}]$.

Для температуры $t(\zeta, \bar{\zeta})$ в D_ζ будем иметь

$$t(\zeta, \bar{\zeta})=2\operatorname{Re}F(\zeta)-q\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}/4\delta \tag{3}$$

Здесь $F(\zeta)$ – аналитическая в D_ζ функция, удовлетворяющая на контуре Γ_{mn} нелинейному краевому условию

$$\zeta F'(\zeta)+\bar{\zeta}\overline{F'(\zeta)}-\frac{q}{4\delta}[\zeta\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}+\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}\omega(\zeta)]+$$

$$+\frac{h}{\delta}\lambda|\omega'(\zeta)|\left[F(\zeta)+\overline{F(\zeta)}-\frac{q}{4\delta}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\right]=\frac{h}{\delta}\lambda|\omega'(\zeta)|T_0 \tag{4}$$

На основе равенств [7]:

$$\sigma_n+\sigma_t=\sigma_x+\sigma_y,\qquad \sigma_t-\sigma_n+2i\tau_{nt}=\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\lambda^2\overline{\omega'(\zeta)}}(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})$$

и граничных условий (2), а также формулы (3) для определения трех аналитических функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ получим нелинейную краевую задачу на Γ_{mn}:

$$8\operatorname{Re}\varphi_0(\zeta)=\sigma_*+p,\qquad \zeta^2[\overline{\omega(\zeta)}\varphi_0'(\zeta)+\omega'(\zeta)\psi(\zeta)]=b\lambda^2\overline{\omega'(\zeta)} \tag{5}$$

$$\varphi_0(\zeta)=\varphi(\zeta)-\frac{\alpha E}{4}F(\zeta)+\frac{q^*}{32}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)},\qquad q^*=\frac{\alpha Eq}{\delta},\qquad b=\frac{\sigma_*-p}{4}$$

Искомые функции $F(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ ищем в виде рядов [4, 8]:

$$F(\zeta)=\beta_{00}\zeta^2+\beta_1\nu(\zeta)+a_0+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!},\qquad \varphi(\zeta)=\alpha_0+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!}$$

$$\psi(\zeta)=d\zeta^2+\frac{\alpha E\beta_1}{4}\zeta_*(\zeta)+\beta_0+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\frac{\lambda^{(2k+2)}\gamma^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_{2k+2}-\frac{\alpha E}{4}a_{2k+2}\right)\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k+1)}(\zeta)}{(2k+1)!} \tag{6}$$

$$\omega(\zeta)=\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!},\qquad \nu(\zeta)=-\iint\gamma(\zeta)\,d\zeta,\qquad \zeta_*(\zeta)=-\int Q(\zeta)\,d\zeta$$

где $\gamma(\zeta)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $Q(\zeta)$ — специальная мероморфная функция [8, 9].

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (6). Из условия периодичности поля температур, напряжений, а также в силу

λ	A_6	A_6^*	A_{12}^*	A_4	A_4^*	A_8^*
0.1	−0.00001	−0.00001	0	−0.00162	−0.00178	0
0.2	−0.00027	−0.00029	0	−0.00912	−0.01059	0
0.3	−0.00197	−0.00209	0	−0.02537	−0.03127	0
0.4	−0.00913	−0.01073	0	−0.05109	−0.06726	0.00003
0.5	−0.03580	−0.04213	0.00002	−0.08190	−0.11343	0.00067
0.6	−0.63077	−0.40742	0.00011	−0.10057	−0.13351	0.00470
0.7	−	−	−	−0.05747	−0.05640	0.01694

самоуравновешенности задачи и периодичности главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D_ζ, следует

$$\beta_{00}=\frac{q}{16\delta}\frac{\delta_1\overline{\omega}_2-\delta_2\overline{\omega}_1}{\pi i},\qquad \beta_1=\frac{q}{8\delta}\frac{\overline{\omega}_1\omega_2-\overline{\omega}_2\omega_1}{\pi i},\qquad d=\frac{q^*}{64\pi i}(\gamma_2\overline{\omega}_1-\gamma_1\overline{\omega}_2)$$

$$\beta_2\lambda^2\delta_1+\lambda^2(\overline{\delta}_1+\gamma_1)(\alpha_2-{}^1/_4E\alpha a_2)-2\alpha_0\overline{\omega_1}-\beta_0\omega_1={}^1/_2D_1$$
$$\beta_2\lambda^2\delta_2+\lambda^2(\overline{\delta}_2+\gamma_2)(\alpha_2-{}^1/_4E\alpha a_2)-2\alpha_0\overline{\omega_2}-\beta_0\omega_2={}^1/_2D_2$$

$$\delta_1=2\zeta(\omega_1/2),\qquad \delta_2=2\zeta(\omega_2/2),\qquad \zeta(\zeta)=-\int\gamma(\zeta)\,d\zeta$$

$$D_2=\frac{E\alpha}{3}\beta_{00}(\omega_2{}^2\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_2{}^3)-\frac{E\alpha}{2}\beta_1\left(K_2-\frac{3}{8}\overline{\delta}_2\overline{\omega}_2{}^2+\frac{1}{4}\delta_2\omega_2\overline{\omega}_2-\frac{1}{24}\gamma_2\omega_2{}^2\right)-E\alpha a_0\overline{\omega}_2$$

$$D_2=\frac{E\alpha}{3}\beta_{00}(\omega_2{}^2\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_2{}^3)-\frac{E\alpha}{2}\beta_1\left(K_2-\frac{3}{8}\overline{\delta}_2\overline{\omega}_2{}^2+\frac{1}{4}\delta_2\omega_2\overline{\omega}_2-\frac{1}{24}\gamma_2\omega_2{}^2\right)-E\alpha a_0\overline{\omega}_2$$

$$\gamma_1=2Q(\omega_1/2)-\overline{\omega}_1\gamma(\omega_1/2),\qquad \gamma_2=2Q(\omega_2/2)-\overline{\omega}_2\gamma(\omega_2/2)$$

$$K_1=2\overline{\xi}(\omega_1/2)-2\nu_*(\omega_1/2)+\overline{\omega}_1\nu(\omega_1/2),\qquad \xi(\zeta)=\int\nu(\zeta)\,d\zeta$$

$$K_2=2\overline{\xi}(\omega_2/2)-2\nu_*(\omega_2/2)+\overline{\omega}_2\nu(\omega_2/2),\qquad \nu_*(\zeta)=\int\zeta_*(\zeta)\,d\zeta$$

В силу выполнения условий периодичности система граничных условий (4), (5) на Γ_{mn} (m, $n=0$, ±1, $\pm2,\ldots$) заменяется функциональными уравнениями, например на контуре Γ_{00}. Для составления уравнений относительно остальных коэффициентов выражений (6) функций $F(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки $\zeta=0$. Подставив эти разложения в граничные условия (4), (5) на контуре Γ_{00} ($\zeta=\lambda\exp(i\theta)$) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно A_{2k}, α_{2k}, β_{2k}, a_{2k}. Постоянная σ_* определяется из соотношения

$$8\left[\alpha_0-\frac{\alpha E}{4}a_0+\frac{q^*}{32}B-\frac{\alpha E}{4}\beta_1\ln\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}r_{0,k}\lambda^{2k+2}\left(\alpha_{2k+2}-\frac{\alpha E}{4}a_{2k+2}\right)\right]=\sigma_*+p$$

$$r_{j,k}=\frac{(2j+2k+1)!\,g_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+2)!\,2^{2j+2k+2}},\qquad g_j={\sum_{m,n}}'\frac{1}{T^{2j}},\qquad T_1=\frac{1}{2}P_{mn}\tag{7}$$

где B — коэффициент при нулевой степени $e^{i\theta}$ в разложении функции $r^2=\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}$. Отметим, что в случае, когда коэффициент теплоотдачи h очень велик, условие (1) можно заменить условием постоянства температуры на кромках отверстий.

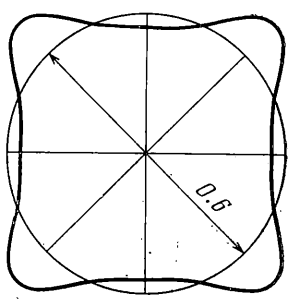
В случае треугольной решетки

$$\omega_1=2,\qquad \omega_2=2e^{{}^1/_3i\pi},\qquad \beta_{00}=0,\qquad \beta_1=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{q}{\delta},\qquad \beta_0=0,\qquad d=0$$

$$4\left(\alpha_0-\frac{\alpha E}{4}a_0\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\beta_2\lambda^2-\frac{\sqrt{3}\,q^*}{8\pi}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+2\gamma^{(-3)}(1)+2\gamma^{(-2)}(1)-2Q^{(-2)}(1)\right]$$

Условия симметрии для треугольной решетки приводят к соотношениям $\alpha_{6k\pm2}=\beta_{6k+2\pm2}=A_{6k\pm2}=a_{6k\pm2}=0$ $(k=0, 1,\ldots)$.

Результаты расчета для функции $\omega(\zeta)$ в первых двух приближениях при $p=0$ представлены в таблице (A_6, A_6^*, A_{12}^*, звездочкой отмечено второе приближение). В первом приближении уравнение равнопрочного контура отверстия имеет вид



$$r^2=\lambda^2(c+c_1\cos 6\theta),\qquad c=a^2+({}^1/_{25}+{}^1/_{49}\lambda^{24}r_{3,2}{}^2)A_6{}^2$$
$$c_1=2aA_6({}^1/_7\lambda^{12}r_{3,2}-{}^1/_5),\quad a=1+A_6\lambda^6 r_{0,2}$$

В случае квадратной решетки $\omega_1=2$, $\omega_2=2i$, $\beta_{00}=0$, $\beta_1=q/\pi\delta$, $\beta_0=0$, $d=q^*\gamma_1/16\pi$

$$4\left(\alpha_0-\frac{\alpha E}{4}a_0\right)=\frac{\pi}{2}\beta_2\lambda^2+\frac{q^*}{4\pi}\left[\frac{5}{12\pi}g_2-\frac{\pi}{4}-2\gamma^{(-3)}(1)+2Q^{(-2)}(1)-2\gamma^{(-2)}(1)\right]$$

Условия симметрии для квадратной решетки приводят к соотношениям $\alpha_{4k+2}=\beta_{4k}=A_{4k+2}=a_{4k+2}=0$ $(k=0, 1,\ldots)$.

Результаты расчета для функции $\omega(\zeta)$ в первых двух приближениях при $p=0$ даны в таблице (A_4, A_4^*, A_8^*). В первом приближении уравнение равнопрочного контура отверстия имеет вид

$$r^2=\lambda^2(c+c_1\cos 4\theta),\quad c=a^2+({}^1/_9+{}^1/_{25}\lambda^{16}r_{2,1}{}^2)A_4{}^2,\quad c_1=2aA_4({}^1/_5\lambda^8 r_{2,1}-{}^1/_3),\quad a=1+A_4\lambda^4 r_{0,1}$$

На фигуре представлена равнопрочная форма отверстия для $\lambda=0.6$.

Автор глубоко благодарен Л. А. Галину, Ю. Н. Работнову, Г. П. Черепанову за внимание к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Мухина Г. В.* Определение термических напряжений в среде с пустотами. Атомная энергия, 1958, т. 5, вып. 2.
2. *Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.* Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах. М., Госатомиздат, 1962.
3. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В сб.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
4. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Упругопластическая задача для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
5. *Мирсалимов В. М.* Некоторые упругопластические задачи для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. ПМТФ, 1974, № 4.
6. *Мирсалимов В. М.* Об оптимальной форме отверстий для перфорированной пластины при изгибе. ПМТФ, № 6.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
8. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
9. *Фильштинский Л. А.* Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. В сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1964.