УДК 539.3.01

РАСТЯЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОЛЬЦОМ ОДИНАКОВЫХ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

С. Б. ВИГДЕРГАУЗ

(Ленинград)

Напряженное состояние плоскости, имеющей N круглых отверстий радиуса r с центрами на окружности радиуса H, под действием всестороннего растяжения интенсивности P на бесконечности в последнее время рассматривалось в работе [1], при одноосном растяжении — в [2]. Примененные в них методы решения (Галеркина и коллокаций соответственно) не вполне пригодны, как показывают численные результаты, при сближенных границах области. В данной заметке сформулированная циклически симметричная задача решается видоизменением подхода, развитого в [3] к случаю конечной многосвязной области. Прослежена концентрация напряжений в опасной зоне вплоть до весьма малой ширины перемычек между отверстиями.

Обозначим через L границу рассматриваемой области S, через L_k границу, z_k — центр k-го отверстия ($k=1, 2, \ldots, N$), $|z_k|=H$. Отверстия в плоскости вносят возмущение в основное напряженное состояние, описываемое функциями $\varphi_0(z)=0.5Pz$ и $\psi_0(z)=0$. Соответствующие возмущению функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, голоморфные в S и убывающие на бесконечности, удовлетворяют на L_k условию

$$\varphi(t_0)+t_0\overline{\varphi'(t_0)}+\overline{\psi(t_0)}+C_k=P(t_0-t_k) \qquad (1)$$

где C_k — постоянная, t_k — фиксированная точка на L_k.

При решении первой краевой задачи обычно исходят из граничного условия в форме (1). Это не рационально, так как напряжения определяются не через сами функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а только через их производные. На границе рассматриваемой области формулы для напряжений, записанные в полярной системе координат с полюсом в центре k-го отверстия, имеют вид

$$\sigma_r+\sigma_\theta=4\operatorname{Re}\varphi'(t_0) \qquad (2)$$

$$\sigma_r+i\tau_{r\theta}=\varphi'(t_0)+\overline{\varphi'(t_0)}-\frac{\bar t_0-\bar z_k}{t_0-z_k}\left[\overline{t_0\varphi''(t_0)}+\overline{\psi'(t_0)}\right] \qquad (3)$$

где σ_r и $\tau_{r\theta}$ — известные функции.

Дифференцирование найденных тем или иным приближенным способом $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ сильно ухудшает точность результатов, когда границы области сближены. С другой стороны, условие (3) не содержит $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Поэтому имеет смысл так изменить порядок действий, что сначала из (3) определить $\varphi'(z)$ и $\psi'(z)$, далее по ним — поле напряжений, а затем, если необходимо, проинтегрировать решение для нахождения поля смещений.

При этом (3) сводится к регулярному интегральному уравнению типа уравнения Д. И. Шермана. Решая его методом наименьших квадратов, достаточно выбрать норму $W_2^2(L)$ для равномерной сходимости напряжений, а не $W_2^3(L)$, как в [3]. Понижение на единицу порядка производных, входящих в норму, и является сутью предлагаемой модификации метода [3].

Как показано ниже, это приводит к значительному уточнению численного расчета. Реализуя намеченный подход, можно упростить изложение, если при построении интегрального уравнения исходить не из (3), а из обычного уравнения Д. И. Шермана, принимающего для условия (1) вид

$$\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{\bar t_0-\bar z_i}-C_k=f(t_0) \qquad (4)$$

Уравнение (4) записано с учетом того, что $\varphi(z)$ можно представить (без внеинтегрального члена [4]) в форме

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt \qquad (5)$$

Из [5] следует, что в силу гладкости L ядра и решение $\omega(t)$ уравнения (4) непрерывно дифференцируемы достаточное число раз. Продифференцируем уравнение (4) по t_0. Интегрируя его по частям и обозначая $\omega'(t)$ через $\nu(t)$, получим

$$\nu(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \nu(t)\,\frac{\partial}{\partial t_0}\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\nu(t)}\,\frac{\partial}{\partial t_0}\,\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}\,dt +$$

$$+\frac{r^2}{(t_0-z_k)^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{(\bar t_0-\bar z_i)^2} = P, \qquad t_0\in L_k \tag{6}$$

$$\frac{\partial\bar t}{\partial t}=\frac{d\bar t}{dt}=-\frac{r^2}{(t-z_k)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\overline{\nu(t)}=\frac{\partial\bar t}{\partial t}\overline{\nu'(t)}$$

Перепишем функционалы b_i следующим образом:

$$b_i=-2\,\mathrm{Im}\left\{\int_{L_i}\omega(t)\,d\bar t\right\}=-2\,\mathrm{Im}\left\{\int_{L_i}\omega(t)\,\frac{d\bar t}{dt}\,dt\right\}=$$

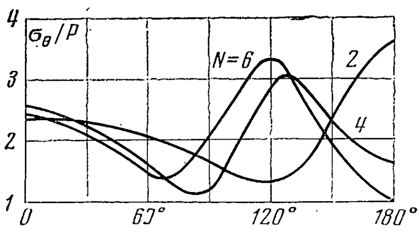
$$=2\,\mathrm{Im}\left\{\int_{L_i}\omega'(t)\,\bar t\,dt\right\}=2\,\mathrm{Im}\left\{\int_{L_i}\nu(t)\,\bar t\,dt\right\}.$$

Таким образом, уравнение (6) содержит только $\nu(t)$. Оно отвечает краевому условию (3), которое получается из (1) также дифференцированием по t_0. Разрешимость уравнения (6) при известных условиях статики следует из разрешимости уравнения (4). Для безусловной разрешимости к левой части уравнения (6) необходимо добавить член

$$b_{N+1}=-\frac{i}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_L\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right\}=-\frac{i}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_L\frac{\nu(t)}{t}\,dt\right\}$$

В условиях циклической симметрии преобразование $\omega(t)$ при повороте на угол $\tau=2\pi/N$ с учетом (5) имеет вид $\omega(t\exp(i\tau))=t\exp(i\tau)\,\omega(t)$. После дифференцирования будем иметь $\nu(t\exp(i\tau))=\nu(t)$.

Как отмечено выше, уравнение (6) можно получить и непосредственно из (3) без использования (4) способом, предложенным в [4] для любой разрешимой краевой задачи, но при этом придется отдельно доказывать существование и единственность решения.



Построение вычислительной схемы метода наименьших квадратов для уравнения (6) аналогично проведенному в [3] и здесь не излагается.

Численные расчеты осуществлялись на ЭВМ. В таблице показана зависимость коэффициента концентрации $K=\sigma_{\theta\,\max}/P$ на L от геометрического параметра области $\lambda=r/H\sin\tau/2$ для $N=4$ и 6.

Порядок нормальной системы равнялся 11. Время счета одного варианта — от 10 до 30 *мин* в зависимости от N. Погрешность оценивалась по точности выполнения граничных условий и не превышала 2.2% (случай $\lambda=1.12$, $N=4$). Аналогичные расчеты по методике [4] для системы того же порядка дают погрешность 6% ($\lambda=1.12$, $N=6$).

Отметим, что хотя и в этом случае погрешность сравнительно невелика, ее уменьшение заметно изменяет величину K при малых λ. В последней колонке таблицы при-

λ	$N=2$	$N=4$	$N=6$	$N_1=4$
1.120	4.99	3.78	4.18	—
1.125	4.91	3.70	4.12	—
1.250	3.65	3.03	3.29	—
1.50	2.89	2.63	2.69	4.1
1.75	2.58	2.33	2.44	3.95
2.0	2.41	2.21	2.30	3.7
2.5	2.24	2.09	2.16	3.55
3.0	2.15	2.05	2.10	3.45
5.0	2.05	2.01	2.03	3.15

водятся данные из [2] по расчету методом коллокации одноосного растяжения ($N=N_1=4$) рассматриваемой области до значения $\lambda=1.5$.

В таблице приведены также данные для случая $N=2$, соответствующие известному решению Линга [6]. Полученные результаты подтверждают качественный вывод в [1] о некотором разгружении контура при переходе от двух к большему числу отверстий.

На фигуре приведены угловые распределения σ_θ/P вдоль контура отверстия при $\lambda=1.250$ для $N=2$, 4, 6. Максимальное напряжение, как и следовало ожидать, наблюдается вблизи линии центров двух соседних отверстий.

Поступила 17 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев, «Вища школа», 1975.
2. *Hamada M., Mizushima I., Hamamoto M., Masuda T.* A Numerical method for Stress concentration problems of infinite plates with many circular holes subjected to uniaxial tension. Trans. ASME. Ser. H, J. Engng Mater. Technolog., 1974, vol. 96, No. 1. (Рус. перев.: Теор. основы инж. расчетов. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. H, 1974, т. 96, № 1.)
3. *Вигдергауз С. Б.* О плоской задаче теории упругости для многосвязных областей с циклической симметрией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
4. *Шерман Д. И.* Об одном способе рассмотрения краевых задач теории функций и двумерных задач теории упругости. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
5. *Манджавидзе Г. Ф.* Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
6. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.–Л., Гостехиздат, 1950.

УДК 539.374

ОБРАТНАЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ

В. М. МИРСАЛИМОВ

(Липецк)

При проектировании некоторых типов тепловыделяющих элементов приходится проводить расчет температурных напряжений в сплошной среде, пронизанной цилиндрическими каналами, оси которых параллельны одна другой [1, 2]. Для предотвращения концентрации напряжений представляет интерес отыскание такой формы цилиндрического канала, при которой нет каких-либо участков, предпочтительных для хрупкого разрушения или пластических деформаций.

Рассматривается задача об отыскании равнопрочной формы канала при условии, что по всему объему тела интенсивность тепловыделения q равномерна, тело может свободно расширяться и что система находится в стационарном состоянии, а теплосъем реализуется через поверхности каналов. Критерием, определяющим равнопрочную форму канала, служит условие отсутствия концентрации напряжений на поверхности канала или требование зарождения пластической области сразу по всей поверхности канала [3]. Считается, что каналы расположены в вершинах двоякопериодической сетки, максимальный температурный перепад в среде невелик, и свойства материала постоянны в пределах этого перепада.

Метод решения рассматриваемой задачи представляет собой обобщение метода решения двоякопериодических упругопластических задач [4–6].

Пусть имеется двоякопериодическая решетка с неизвестными криволинейными отверстиями, имеющими центры в точках

$$P_{mn}=m\omega_1+n\omega_2 \quad (m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots), \qquad \omega_1=2, \qquad \omega_2=2l\exp(i\alpha), \qquad l>0, \qquad \operatorname{Im}\omega_2>0$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке P_{mn} через L_{mn}, а внешность контуров L_{mn} через D_z.

На неизвестном контуре отверстия L_{mn} граничные условия имеют вид

$$\partial T/\partial n=h(T_0-T)/\delta \tag{1}$$

$$\sigma_n=p, \qquad \tau_{nt}=0, \qquad \sigma_t=\sigma_*=\text{const} \tag{2}$$