

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

А. Д. КУЗНЕЦОВ

(Москва)

В настоящее время проблема устойчивости тонкостенных конструкций при динамическом нагружении представляет большой интерес, что вызвано бурным развитием современной техники. Обзор выполненных в этой области исследований приведен в [1, 2].

Большинство авторов сводят анализ устойчивости оболочки к исследованию ее движения при некоторых вполне определенных начальных данных, т. е. по существу решают задачу Коши. Потеря устойчивости отождествляется с моментом бурного нарастания прогиба.

В двумерном случае такая задача может быть поставлена только для оболочки с начальными неправильностями. При решении, как правило, использовался прием сведения оболочки к системе с конечным числом степеней свободы с последующим интегрированием полученных уравнений движения.

Здесь предлагается алгоритм решения обширного класса задач динамической устойчивости оболочек вращения при различных граничных условиях на торцах. Ряд полученных результатов был опубликован в [3]. В основу алгоритма положен квазистатический критерий устойчивости, развитый в работах [4, 5]. Поведение оболочки описывается уравнениями типа С. П. Тимошенко, позволяющими учесть волновой характер движения конструкции.

1. Для изучения процесса деформирования оболочки при динамическом нагружении воспользуемся нелинейными уравнениями движения, учитывающими деформацию сдвига и инерцию вращения [6]; введем следующие безразмерные параметры:

(1.1)

$$u = \frac{u^\circ}{A_1}, \quad v = \frac{v^\circ}{A_1}, \quad w = \frac{w^\circ}{A_1}, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \kappa_{11} = A_1 \kappa_{11}^\circ, \quad \kappa_{12} = A_1 \kappa_{12}^\circ, \quad \kappa_{22} = A_1 \kappa_{22}^\circ.$$

$$\psi = \frac{A_2'}{A_2}, \quad \psi_1 = \frac{A_1}{A_2}, \quad k_1 = \frac{A_1}{R_1}, \quad k_2 = \frac{A_1}{R_2}, \quad c^2 = \frac{12A_1^2}{h^2}$$

$$T_i = \frac{T_i^\circ}{B}, \quad Q_i = \frac{Q_i^\circ}{B}, \quad M_i = \frac{A_1}{D} M_i^\circ \quad (i=1,2)$$

$$T_{12} = \frac{T_{12}^\circ}{B}, \quad M_{12} = \frac{A_1}{D} M_{12}^\circ, \quad q = \frac{q^\circ A_1}{B}, \quad \tau = \frac{at}{A_1}$$

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (\dots)' = \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha_1}$$

Здесь A_1, A_2 — параметры Ляме поверхности оболочки; α_1 — безразмерная координата в осевом направлении; $u^\circ, v^\circ, w^\circ$ — перемещения в осевом, окружном и радиальном направлениях; φ_1, φ_2 — углы поворота нормали; h — толщина оболочки; R_1, R_2 — радиусы кривизны; $\kappa_{11}^\circ, \kappa_{22}^\circ, \kappa_{12}^\circ$ — изменения кривизн и кручения; $T_1^\circ, T_2^\circ, T_{12}^\circ, Q_1^\circ, Q_2^\circ, M_1^\circ, M_2^\circ, M_{12}^\circ$ — усилия и моменты в срединной поверхности; a — скорость звука в материале оболочки; ρ — плотность материала; t — время; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; q° — давление.

В соответствии с принятыми обозначениями осесимметричное движение оболочки будет описываться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_1' - (\varphi_1 Q_1)' + \psi(T_1 - \varphi_1 Q_1 - T_2) + k_1(Q_1 + \theta_1 T_1) - \varphi_1 q &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \\ Q_1' + (\theta_1 T_1)' + \psi(Q_1 + \theta_1 T_1) - k_1(T_1 - \varphi_1 Q_1) - k_2 T_2 + q &= \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \\ M_1' + \psi(M_1 - M_2) - c^2 Q_1 &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$T_1 = \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, \quad M_1 = -\kappa_{11} - \nu \kappa_{22} \quad (1 \Leftrightarrow 2) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \delta \varepsilon_{12}, \quad \delta = 0.43(1 - \nu) \\ \varepsilon_1 &= u' + k_1 w + 1/2 \theta_1^2, \quad \varepsilon_2 = \psi u + k_2 w, \quad \varepsilon_{12} = \theta_1 - \varphi_1 \\ \kappa_{11} &= \varphi_1', \quad \kappa_{22} = \psi \varphi_1, \quad \theta_1 = w' - k_1 u \end{aligned} \quad (1.4)$$

К уравнениям (1.2) - (1.4) необходимо добавить шесть граничных условий (по три на каждом торце)

$$\begin{aligned} [T_{1*} - (T_1 - \varphi_1 Q_1)] \Delta_1 + (u_* - u)(1 - \Delta_1) &= 0 \\ [Q_{1*} - (Q_1 + \theta_1 T_1)] \Delta_2 + (w_* - w)(1 - \Delta_2) &= 0 \\ [M_{1*} - M_1] \Delta_3 + (\varphi_{1*} - \varphi_1)(1 - \Delta_3) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\Delta_i = 0$, если задано кинематическое условие, и $\Delta_i = 1$, если задана внешняя нагрузка; $T_{1*}(\tau)$, $Q_{1*}(\tau)$, $M_{1*}(\tau)$ - внешние условия и момент; u_* , w_* , φ_* - перемещения и угол поворота.

Начальные условия для случая динамического нагружения запишутся следующим образом:

$$u = w = \varphi_1 = \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = 0 \quad (1.6)$$

Уравнения (1.2) - (1.4) совместно с (1.5), (1.6) полностью определяют поведение оболочки. При решении поставленной задачи использовался метод прямых [7].

2. Возможность использования статического метода при анализе устойчивости оболочек при нестационарных деформациях была установлена в [4] на примере вязкоупругих оболочек.

В динамике аналогичный подход был развит в [5]. Решение при этом разделяется на два этапа. На первом этапе на основе уравнений динамики определяется осесимметричное движение конструкции, на втором анализ сводится к рассмотрению тех же линеаризованных уравнений, что и в статике. Различие заключается в том, что параметры основного напряженно-деформированного состояния (в уравнениях обозначены нулевым индексом) будут зависеть не только от координаты α_1 , но и от времени

$$\begin{aligned} F_1' + \psi(F_1 - T_2) + \psi_1(T_{12} + T_{20} e_{21} - \varphi_{10} Q_2) + k_1 F_3 - \\ - \varphi_1 q - (\varepsilon_2' \varphi_1)_0 Q_1 - (Q_1 \varphi_1)_0 \varepsilon_2' - (Q_1 \varepsilon_2')_0 \varphi_1 = 0 \\ F_2' + \psi(F_2 + T_{20} e_{21} - \varphi_{10} Q_2 + T_{12}) + \psi_1 T_2 - \varphi_2 q - \\ - (Q_1 \varepsilon_2')_0 \varphi_2 + k_2 (\theta_{10} T_{12} + Q_2 + T_{20} \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$F_3' + \psi F_3 + \psi_1(Q_2 + T_{20} \theta_2 + \theta_{10} T_{12}) - k_1 F_1 - k_2 T_2 + Q_{10} \varepsilon_2' + \varepsilon_{20}' Q_1 = 0$$

$$F_4' + \psi(F_4 - M_2) + \psi_1(M_{12} + M_{20} e_{21}) + k_1(\theta_{10} F_4 + M_{10} \theta_1) - c^2 Q_1 = 0$$

$$F_5' + \psi(F_5 + M_{12} + M_{20} e_{21}) + \psi_1 M_2 + k_2(M_{20} \theta_2 + \theta_{10} M_{12}) - c^2(Q_2 + Q_{10} e_{12}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= T_1 - \Phi_{10} Q_1 - Q_{10} \Phi_1, & F_2 &= T_{12} + T_{10} e_{12} - Q_{10} \Phi_2 \\
 F_3 &= Q_1 + \theta_{10} T_1 + T_{10} \theta_1, & F_4 &= M_1, & F_5 &= M_{12} + M_{10} e_{12}, & e_{12} &= v', & e_{21} &= \psi_1 u' - \psi v
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Добавочные удлинения и сдвиги, изменения кривизн и кручения срединной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= u' + k_1 w + \theta_{10} \theta_1, & \varepsilon_2 &= \psi_1 v' + \psi u + k_2 w \\
 \varepsilon_{12} &= v' + \psi_1 u' - \psi v + \theta_{10} \theta_2, & \varepsilon_{1z} &= \theta_1 - \Phi_1, & \varepsilon_{2z} &= \theta_2 - \Phi_2, & \kappa_{11} &= \Phi_1' \\
 \kappa_{22} &= \psi_1 \Phi_2' + \psi \Phi_1, & \kappa_{12} &= \Phi_2' + \psi_1 \Phi_1' - \psi \Phi_2, & \theta_1 &= w' - k_1 u, & \theta_2 &= \psi_1 u' - k_2 v \\
 (\dots)' &= \frac{\partial (\dots)}{\partial \alpha_2}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Физические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, & M_1 &= -\kappa_{11} - \nu \kappa_{22}, & Q_1 &= \delta \varepsilon_{1z} & (1 \neq 2) \\
 T_{12} &= \delta_1 \varepsilon_{12}, & M_{12} &= -\delta_1 \kappa_{12}, & \delta_1 &= 1/2 (1 - \nu)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для того, чтобы разделить переменные в уравнениях (2.1) – (2.4) и удовлетворить требованию периодичности по кольцевой координате, разложим все компоненты, характеризующие состояние потери устойчивости оболочки, в ряды Фурье по координате α_2

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\alpha_1) \cos n\alpha_2, \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\alpha_1) \sin n\alpha_2 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 X &= \{F_1, F_3, F_4, Q_1, T_2, M_2, u, w, \Phi_1, \theta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_{11}, \kappa_{22}\} \\
 Y &= \{F_2, F_5, e_{12}, e_{21}, \varepsilon_{1z}, \theta_2, \Phi_2, \kappa_{12}, T_{12}, M_{12}, Q_2\}
 \end{aligned}$$

Полученная система уравнений сводится к системе десяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных y_i ($i=1, \dots, 10$)

$$\begin{aligned}
 y_1 &= F_1, & y_2 &= F_2, & y_3 &= F_3, & y_4 &= F_4, & y_5 &= F_5, & y_6 &= u, & y_7 &= v \\
 y_8 &= w, & y_9 &= \Phi_1, & y_{10} &= \Phi_2
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Эта система записывается в виде

$$y_i' = f_i(\alpha_1, n, \tau, y_1, \dots, y_{10}) \tag{2.7}$$

Значения функций f_i здесь не приводятся.

Граничные условия могут быть записаны следующим образом:

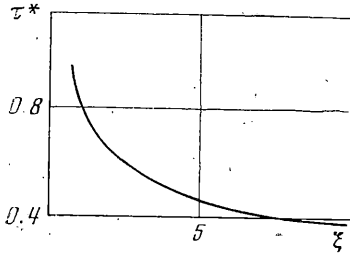
$$y_i^{(j)} \Delta_{i+5j} + y_{i+5}^{(j)} (1 - \Delta_{i+5j}) = 0 \quad (i=1, \dots, 5; j=0, 1) \tag{2.8}$$

где $j=0$ при $\alpha_1 = \alpha_{10}$ и $j=1$ при $\alpha_1 = \alpha_{1N}$.

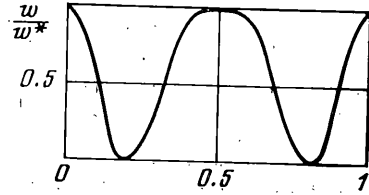
Система линейных однородных дифференциальных уравнений (2.7) с однородными граничными условиями (2.8) имеет для некоторых значений параметра τ нетривиальное решение. Наименьшее из этих значений будем принимать за критическое. Поставленная краевая задача решается методом ортогональной прогонки [8].

3. Рассмотрим потерю устойчивости сферического сегмента под действием мгновенно приложенного внешнего давления, которое в дальнейшем остается постоянным

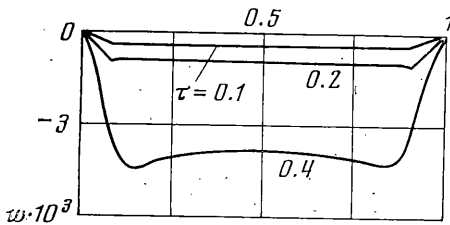
$$q = \xi q_0, \quad q_0 = \sqrt{1/3 (1 - \nu^2)} h/R \tag{3.1}$$



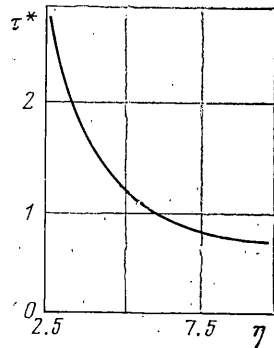
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

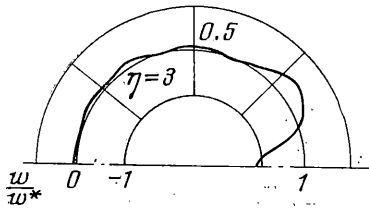
Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что в данном случае в зависимости от геометрических параметров оболочки может реализовываться как осесимметричное прохлопывание всего сегмента, так и выпучивание с образованием двух и более волн в окружном направлении. Случай осесимметричной деформации и потери устойчивости в другой постановке исследовался в ряде работ [2].

В качестве граничных условий рассматривалась жесткая заделка по краю $u=v=w=\varphi_1=\varphi_2=0$. В куполе сферы принимались условия симметрии $u=F_2=F_3=\varphi_1=F_5=0$.

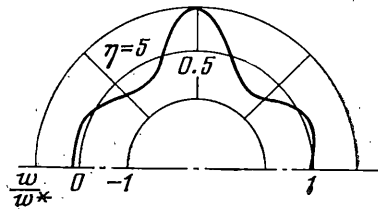
Геометрия оболочки определялась безразмерным геометрическим параметром подобия Z , характеризующим относительную длину оболочки $Z=2\gamma_0(1-\nu^2)^{1/4}(R/h)^{1/2}$, где γ_0 — угол полураствора купола.

Расчеты критического времени проводились для оболочки с $Z=6.8$, $R/h=100$; результаты представлены на фиг. 1 в виде графика зависимости критического времени τ^* от параметра нагрузки ξ . Форма выпучивания при $\xi=10$ приведена на фиг. 2 (w^* — максимальное значение прогиба). Для других значений нагрузки вид кривых прогиба получается практически одинаковым.

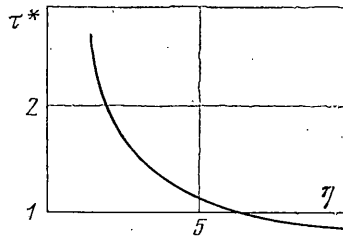
Динамический эффект проявляется в последовательном возрастании числа волн в окружном направлении, по которым оболочка теряет устойчивость, с ростом прикладываемой нагрузки (при статическом нагружении оболочка заданной геометрии теряет устойчивость по двум волнам в окружном направлении). В данном случае на рассмотренном интервале по нагрузке оно менялось от $n=2$ при $\xi=1$ до $n=5$ при $\xi=10$. Характер деформирования сферической оболочки при невозмущенном движении до потери устойчивости показан на фиг. 3.



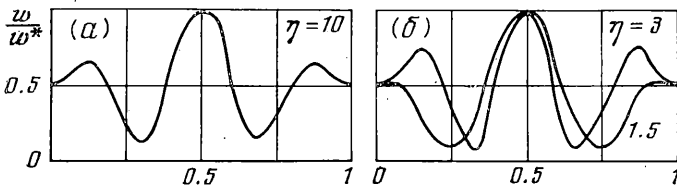
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

4. Рассмотрим замкнутую тороидальную оболочку, находящуюся под действием мгновенно приложенного внешнего давления

$$q = \eta q_0, \quad q_0 = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{d_1} \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^3}, \quad \left(d_1 = \frac{d}{R}\right) \quad (4.1)$$

Граничные условия при $\alpha_{10} = \pi/2$ и $\alpha_{1N} = 3\pi/2$ задавались в виде условий симметрии.

В качестве основного параметра, определяющего геометрию тороидальной оболочки, был выбран параметр

$$Z = \frac{2\gamma_0 \sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{1+d_1}} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (4.2)$$

Для полного тора $\gamma_0 = \pi$. В частном случае $d_1 = 0$ выражение (4.2) переходит в соответствующее соотношение для Z , характеризующего геометрию сферической оболочки.

Расчеты критического времени проводились для различных значений нагрузки; результаты представлены на фиг. 4 в виде графика зависимости τ^* от η . Все данные относятся к оболочке с $Z=20$, $d_1=8$, $R/h=100$.

На фиг. 5, 6 представлены формы выпучивания в зависимости от величины параметра нагрузки η .

Как и в случае со сферической оболочкой, динамический эффект проявляется в возрастании числа волн n при потере устойчивости с возраста-

нием прилагаемого давления. В связи с этим интересно заметить, что в статике замкнутая тороидальная оболочка теряет устойчивость всегда по двум волнам в окружном направлении.

Рассмотрим сегмент тороидальной оболочки у большого диаметра тора, ограниченный углами $\alpha_{10}=\pi/2-\gamma_0$ и $\alpha_{1N}=\pi/2+\gamma_0$.

Нагрузка, как и прежде, будет определяться выражением (4.1), где

$$q_0 = \sqrt{\frac{4}{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{1+2d_1} \frac{h}{R}$$

В частном случае $d_1=0$ это выражение переходит в выражение для q_0 , характеризующее критическое давление для сферической оболочки.

Граничные условия при выпучивании принимались в следующем виде: в середине оболочки — условие симметрии $u=F_2=F_3=\varphi_1=F_5=0$, на правом торце — жесткое защемление $u=v=w=\varphi_1=\varphi_2=0$.

Расчеты критического времени τ^* проводились для оболочки с $Z=5$, $d_1=3$, $R/h=100$. Результаты представлены на фиг. 7 в виде зависимости критического времени. Формы выпучивания в зависимости от величины приложенного давления представлены на фиг. 8, а, б.

Проведенные исследования показали, что сегмент тороидальной оболочки теряет устойчивость с образованием большого числа волн в окружном направлении. Минимум критического времени по n слабо обусловлен, хотя и в меньшей степени, чем в аналогичных задачах статической устойчивости.

Динамический эффект проявляется также в последовательном возрастании числа волн в окружном направлении, по которому оболочка теряет устойчивость с возрастанием прикладываемой нагрузки.

Поступила 25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Агамиров В. Л. Обзор исследований по устойчивости конструкций при импульсном нагружении. В сб.: Расчет пространственных конструкций, № 12. М., Стройиздат, 1969.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
3. Кузнецов А. Д. Устойчивость оболочек вращения при динамическом нагружении. Тр. XIX научн. конф. МФТИ. Долгопрудный, 1974.
4. Григolloк Э. И., Липовцев Ю. В. Устойчивость оболочек в условиях ползучести. ПМТФ, 1965, № 4.
5. Даревский В. М. Устойчивость оболочки при динамической нагрузке. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970.
6. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. Изд-во МГУ, 1963.
7. Мяченков В. И. Исследование поведения симметрично нагруженных упругих оболочек вращения при динамическом нагружении с помощью метода прямых. Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
8. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Численное решение задач статики и динамики тонкостенных оболочечных конструкций. В сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности, вып. 1. Изд-во Горьковск. ун-та, 1974.