

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ И ПЛАСТИЧНОСТИ

И. А. БИРГЕР

(Москва)

Необходимость обеспечения надежности ответственных конструкций приводит к более полному изучению проблем разрушения и, в частности, критериев макроскопического разрушения.

Обзор современного состояния вопроса можно найти в [1, 2].

Критерии разрушения часто используются как критерии пластичности. Предлагается простой и достаточно общий критерий разрушения и пластичности изотропных материалов, содержащий в частных случаях многие практически применяемые критерии.

1. Критерий разрушения и пластичности. Условия возникновения пластических деформаций или макроскопического разрушения можно выразить при помощи эквивалентных напряжений, полагая

$$\sigma_e = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \lambda_0, \lambda_1, \dots; \kappa_1, \kappa_2, \dots) = \sigma_*(T, t) \quad (1.1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ — параметры материала; $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ — структурные параметры, отражающие историю нагружения [3].

Величина σ_* представляет собой критическое напряжение, зависящее в общем случае от времени t и температуры T .

В связи с назначением критерия величина σ_* принимается равной: $\sigma_* = \sigma_b$ — пределу прочности; $\sigma_* = \sigma_T$ — пределу текучести; $\sigma_* = \sigma_{bl}$ — пределу длительной прочности; $\sigma_* = \sigma_{-1}$ — пределу выносливости.

Функция f должна быть однородной функцией первого порядка относительно переменных $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

В дальнейшем принято следующее правило обозначения главных напряжений: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Эквивалентные напряжения σ_e устанавливают соответствие между сложным напряженным состоянием и одноосным растяжением и позволяют наиболее просто определить запас прочности и вероятность разрушения.

В первом приближении откажемся от учета структурных параметров и примем критерий разрушения в следующем виде:

$$\sigma_e = \lambda_0 \sigma_i + \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 = \sigma_b \quad (1.2)$$

σ_i — интенсивность напряжений, σ_b — критическое значение напряжения растяжения

$$\sigma_i = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} / \sqrt{2}$$

В общем случае критерий (1.2) является четырехпараметрическим и для определения параметров $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ требуется проведение четырех базовых экспериментов.

Обычно в качестве таких опытов используют растяжение, сжатие и кручение образцов. Четвертым можно выбрать испытание тонкостенных

труб под внутренним давлением. Будем иметь соответственно

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sigma_b, \quad \sigma_1 = \sigma_b, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0 \\ \sigma_i &= \sigma_c, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\sigma_c\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{3}\tau_b, \quad \sigma_1 = \tau_b, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_b \\ \sigma_i &= 1/2\sqrt{3}\sigma_p, \quad \sigma_1 = \sigma_p, \quad \sigma_2 = 1/2\sigma_p, \quad \sigma_3 = 0\end{aligned}$$

где σ_b , σ_c , τ_b , σ_p — пределы прочности при растяжении, сжатии, кручении и разрушающее окружное напряжение при внутреннем давлении.

Из условия (1.2) и соотношений (1.3) следует

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} \left(1 + \frac{\sigma_b}{\sigma_c} - \frac{\sigma_b}{\tau_b} \right), \quad \lambda_1 = 1 - \lambda_0 \\ \lambda_2 &= 2 \frac{\sigma_b}{\sigma_p} - 1 + \frac{\sigma_b}{\sigma_c} - \frac{\sigma_b}{\tau_b} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} \left[1 + (\sqrt{3}-1) \frac{\sigma_b}{\sigma_c} - \frac{\sigma_b}{\tau_b} \right]\end{aligned}\quad (1.4)$$

Важно, что в принятой системе базовых экспериментов величина σ_p влияет лишь на параметр λ_2 .

Если величинам σ_b/σ_c , σ_b/τ_b , σ_b/σ_p заранее предписываются определенные значения, то возникают частные случаи критерия (1.2).

В таблице приведены однопараметрические критерии, использующие один базовый эксперимент — испытание на растяжение (1–5).

Значения параметров				Эквивалентные напряжения	$\frac{\sigma_b}{\sigma_c}$	$\frac{\sigma_b}{\tau_b}$	$\frac{\sigma_b}{\sigma_p}$
λ_0	λ_1	λ_2	λ_3				

однопараметрические критерии

1	1	0	0	0	σ_i	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	0	1	0	-1	$\sigma_1 - \sigma_3$	1	2	1
3	0	1	0	0	σ_1	0	1	1
4	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$

двухпараметрические критерии

6	0	1	0	$-\chi$	$\sigma_1 - \chi\sigma_3$	$1 + \chi$		1
7	$\frac{1}{2}(1+\chi)$	$\frac{1}{2}(1-\chi)$			$\frac{1}{2}(1+\chi)\sigma_i + \frac{1}{2}(1-\chi)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\chi)$		$\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\chi) + \frac{3}{4}(1-\chi)$
8	χ	$1-\chi$	0	0	$\chi\sigma_i + (1-\chi)\sigma_1$	$1 + (\sqrt{3}-1)\chi$		$1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\chi$

1 — критерий интенсивности напряжений (Губер, Мизес); 2 — критерий максимальных касательных напряжений (Кулон — Треска — Сен-Венан); 3 — критерий максимального напряжения растяжения; 4 — критерий максимальной деформации растяжения; 5 — критерий Слободярева; 6 — критерий Мора; 7 — критерий Надаи; 8 — критерий Писаренко — Лебедева.

Первые два классических критерия применяются для достаточно пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию; остальные критерии используются для хрупких материалов и для прогнозирования длительной прочности.

Значения λ_j ($j=0\div 3$) находятся из равенств (1.4), если принять отношения σ_b/σ_c , σ_b/τ_b , σ_b/σ_p , свойственные указанным критериям. Простая структура критерия (1.2) позволяет непосредственно выписать значения параметров λ_j для рассматриваемых критериев.

В таблице также указаны частные случаи двухпараметрических (6—8) условий разрушения, для которых в качестве базовых приняты опыты на растяжение и сжатие ($\chi=\sigma_b/\sigma_c$ — отношение пределов прочности при растяжении и сжатии).

Если в качестве второго базового опыта используется кручение, то величина коэффициента χ определяется при помощи экспериментально полученного отношения σ_b/τ_b .

Критерии Мора и Надаи даны в обычном линейном приближении. Критерий А. А. Лебедева — Г. С. Писаренко [1], являющийся развитием критерия В. П. Сдобырева [4], также дан в линейном варианте, который, по-видимому, предпочтительнее рекомендуемого в [1] квадратичного варианта

$$\chi^2 \sigma_t^2 + (1 - \chi^2) \sigma_c^2 = \sigma_b^2$$

Квадратичный критерий предписывает одинаковую прочность материала при всестороннем равномерном растяжении и сжатии. Для плоского напряженного состояния квадратичный и линейный вариант примерно равноценны.

Значения λ_j вытекают из формул (1.4) при соответствующих σ_b/τ_b и σ_b/σ_p . Таким образом, критерий (1.2) содержит в частных случаях семь известных критериев разрушения и пластичности, большинство из которых широко используются в практических расчетах.

Разберем более подробно плоское напряженное состояние. Обозначим главные напряжения σ_ξ и σ_η . Зависимость

$$\varphi(\sigma_\xi, \sigma_\eta) = \sigma_c - \sigma_b = 0 \quad (1.5)$$

выражает условия разрушения (или пластичности). Кривая (1.5) (фиг. 1) симметрична относительно прямой, равнонаклоненной к осям σ_ξ и σ_η , в силу изотропности материала.

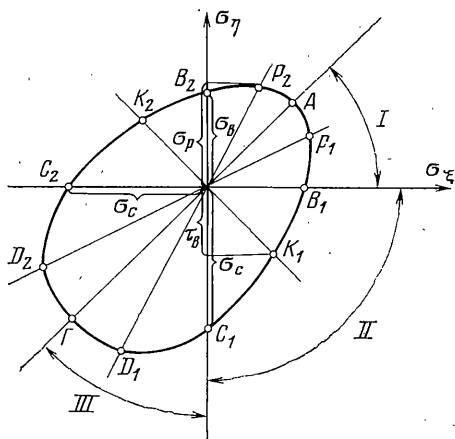
На фиг. 1 указаны граничные точки: А — двойное растяжение; P_1, P_2 — полуторное растяжение; B_1, B_2 — растяжение; K_1, K_2 — кручение; C_1, C_2 — сжатие; D_1, D_2 — полуторное сжатие; Г — двойное сжатие¹.

Построение границы (1.5) будем проводить методом лучей, полагая $\sigma_\eta = k\sigma_\xi$. Тогда

$$\sigma_t = \sigma_\xi \operatorname{sign}(\sigma_\xi) \sqrt{1+k^2} - k$$

причем значение $\operatorname{sign} \sigma_\xi$ в каждой области известно.

¹ Двойное растяжение или сжатие означает одинаковые напряжения в двух главных направлениях; полуторное растяжение или сжатие — напряжение в одном из главных направлений составляет половину от другого.



Фиг. 1

Для граничных точек из условия (1.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \text{область I } (\sigma_1 = \sigma_{\xi}, \sigma_2 = \sigma_{\eta}, \sigma_3 = 0) \\ \sigma_{\xi} &= \frac{\sigma_b}{\lambda_0 \sqrt{1+k^2} - k + \lambda_1 + \lambda_2 k} \quad (0 \leq k \leq 1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \text{область II } (\sigma_1 = \sigma_{\xi}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_{\eta}) \\ \sigma_{\xi} &= \frac{\sigma_b}{\lambda_0 \sqrt{1+k^2} - k + \lambda_1 + \lambda_3 k} \quad (-\infty \leq k \leq 0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} & \text{область III } (\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_{\xi}, \sigma_3 = \sigma_{\eta}) \\ \sigma_{\xi} &= \frac{\sigma_b}{-\lambda_0 \sqrt{1+k^2} - k + \lambda_2 + \lambda_3 k} \quad (1 \leq k \leq \infty) \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Трехпараметрические критерии. Эти критерии получаются из общего условия (1.2) после дополнительных ограничений.

Основной вариант трехпараметрического критерия возникает при следующем допущении: влияние промежуточного главного напряжения σ_2 мало по сравнению с двумя другими. Тогда, полагая $\lambda_2 = 0$, находим

$$\sigma_e = \lambda_0 \sigma_i + \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_3 \sigma_3 = \sigma_b \quad (2.1)$$

При использовании базовых опытов на растяжение, сжатие и кручение получаются прежние значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3$ из (1.4).

Для случая тонкостенной трубы под внутренним давлением из критерия (2.1) следует

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_0 + \lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_c} + \frac{\sigma_b}{\tau_b} \right) \quad (2.2)$$

что, естественно, обращает в нуль величину λ_2 по одному из равенств (1.4).

В отличие от четырехпараметрического критерия отношение σ_b/σ_p предписывается по результатам предшествующих опытов. Трехпараметрический критерий (2.1) сохраняет достаточную общность, так как охватывает все ранее указанные частные случаи, за исключением критериев Надаи и максимального удлинения.

Для расчетов по трехпараметрическому критерию в формулах (1.6)–(1.8) следует положить $\lambda_2 = 0$. Нетрудно установить, что для критерия (2.1) границы области неразрушения всегда проходят через точки растяжения и сжатия (B_1, B_2, C_1, C_2) и точки двойного растяжения и сжатия (A, Γ).

Точки кручения K_1, K_2 определяются величиной σ_b/τ_b . Для точек полуторного растяжения P_1, P_2 (цилиндрический сосуд при внутреннем давлении) будем иметь

$$\sigma_P = \sigma_{\xi 1} = \sigma_{\eta 2} = 2\sigma_b / \left(1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_c} + \frac{\sigma_b}{\tau_b} \right) \quad (2.3)$$

Для точек полуторного сжатия (цилиндрический сосуд под внешним давлением) будем иметь аналогичные зависимости

$$\sigma_D = \sigma_{\eta 1} = \sigma_{\xi 2} = -2\sigma_b / \left(\frac{\sigma_b}{\tau_b} + \frac{\sigma_b}{\sigma_c} - 1 \right) \quad (2.4)$$

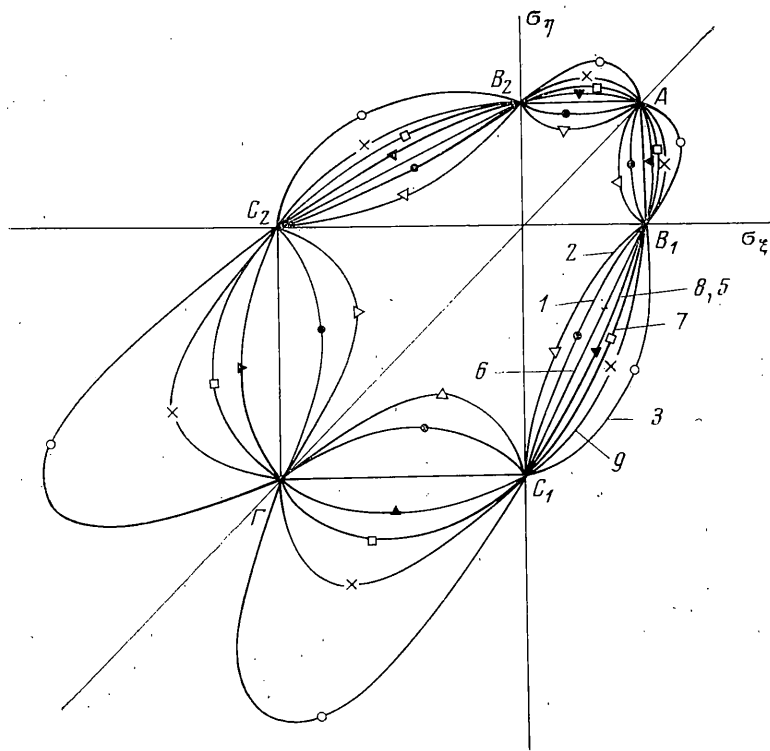
На фиг. 2 показаны граничные линии для трехпараметрических критериев прочности. Линии обозначены в соответствии с отношением σ_b/τ_b , которое дается критериями прочности, приведенными в таблице.

Расчеты проведены при $\chi=1/2$. Линия 1 соответствует $\sigma_b/\tau_b=\sqrt{3}$; линия 2 соответствует $\sigma_b/\tau_b=2$. Если $\sigma_b/\tau_b=1+\sigma_b/\sigma_c=1.5$, то критерий (2.1) совпадает с критерием Мора (линия 6); при $\sigma_b/\tau_b=(\sqrt{3}+1)/2=1.36$ он совпадает с условиями Сдобырева и Лебедева — Писаренко (линия 8, 5). Кривая 9 соответствует критерию (2.1) при $\chi=0.5$, $\sigma_b/\tau_b=1.2$.

Примечательно, что при $\sigma_b/\tau_b > 1 + \sigma_b/\sigma_c$ граница области неразрушения имеет вогнутые участки, что не прогнозируется другими условиями прочности¹.

На фиг. 3 приведено сопоставление экспериментальных и расчетных точек по критерию (2.1) для магниевого сплава [5].

Отношение σ_b/τ_b существенно влияет на протекание границ области неразрушения. При малых σ_b/τ_b трехпараметрический критерий (2.1) об-



Фиг. 2

наруживает значительное превышение разрушающего напряжения в точках D_1 и D_2 над величиной предела прочности при сжатии. Однако выбор величины σ_b/τ_b не может быть произвольным. В действительности, каждому отношению σ_b/σ_c соответствует только определенный диапазон значений σ_b/τ_b , причем меньшим отношениям σ_b/σ_c отвечает и меньшая величина σ_b/τ_b . Например, по теории Мора

$$\sigma_b/\tau_b = 1 + \sigma_b/\sigma_c \quad (2.5)$$

¹ Исключение составляет статистическое условие разрушения С. Д. Волкова [5].

Приближенную оценку области значений σ_b/τ_b в рамках трехпараметрического критерия (2.1) можно установить при помощи равенства (2.2), учитывая, что по экспериментальным данным для большинства конструкционных материалов отношение σ_b/σ_p не сильно отличается от единицы

$$1 - \Delta_1 < \frac{\sigma_b}{\sigma_p} < 1 + \Delta_2$$

Обычно можно считать $\Delta_1 = 0.15$, $\Delta_2 = 0.05$. Тогда на основе равенства (2.2) получим

$$1 - 2\Delta_1 + \frac{\sigma_b}{\sigma_c} \leq \frac{\sigma_b}{\tau_b} \leq 1 + 2\Delta_2 + \frac{\sigma_b}{\sigma_c}$$

Для рассматриваемого примера ($\sigma_b/\sigma_c = 0.5$) следует $1.2 \leq \sigma_b/\tau_b \leq 1.6$.

Как уже указывалось выше, задание значений σ_b/σ_p приводит к различным вариантам трехпараметрического критерия. Полагая $\sigma_b/\sigma_p = 1$, в равенстве (1.4) получим для λ_2 зависимость $\lambda_2 = (2 - \sqrt{3})\lambda_0$ и соответственно следующую форму трехпараметрического критерия:

$$\sigma_e = \lambda_0 \sigma_i + \lambda_1 \sigma_1 + (2 - \sqrt{3})\lambda_0 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 = \sigma_b \quad (2.6)$$

В точках, соответствующих растяжению, сжатию и кручению, критерий будет иметь значения, соответствующие экспериментальным данным. В точке полуторного растяжения выполняется заранее предписанное условие $\sigma_b/\sigma_p = 1$; в точке полуторного сжатия

$$\sigma_D = \sigma_{\text{нл}} = 2\sigma_{\text{нл}} = -\sigma_b (\sigma_b / \tau_b - 1)^{-1}$$

В точках двойного растяжения и сжатия будем иметь соответственно

$$\sigma_A = \sigma_b (2 + \sigma_b / \sigma_c - \sigma_b / \tau_b)^{-1}, \quad \sigma_T = -\sigma_b (\sigma_b / \tau_b - 1)^{-1}$$

Если выполняется условие (2.5), то критерий (2.6) совпадает с критерием Мора.

Отметим еще один вариант трехпараметрического критерия, вытекающего из (1.2) при $\lambda_0 = 0$

$$\sigma_e = \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 \quad (2.7)$$

Этому критерию свойственна кусочно-плоская предельная поверхность. Из условия $\lambda_0 = 0$ и первого соотношения в (1.4) следует зависимость (2.5), характерная для критерия Мора.

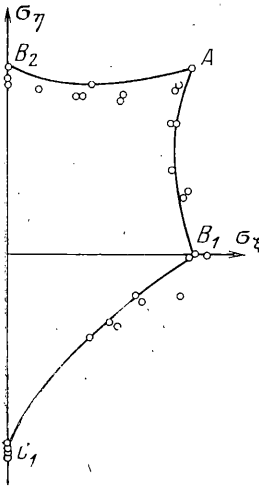
В качестве базовых экспериментов критерия (2.7) могут служить опыты на растяжение, сжатие и внутреннее давление. Тогда получим

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2(\sigma_b/\sigma_p - 1), \quad \lambda_3 = -\sigma_b/\sigma_c \quad (2.8)$$

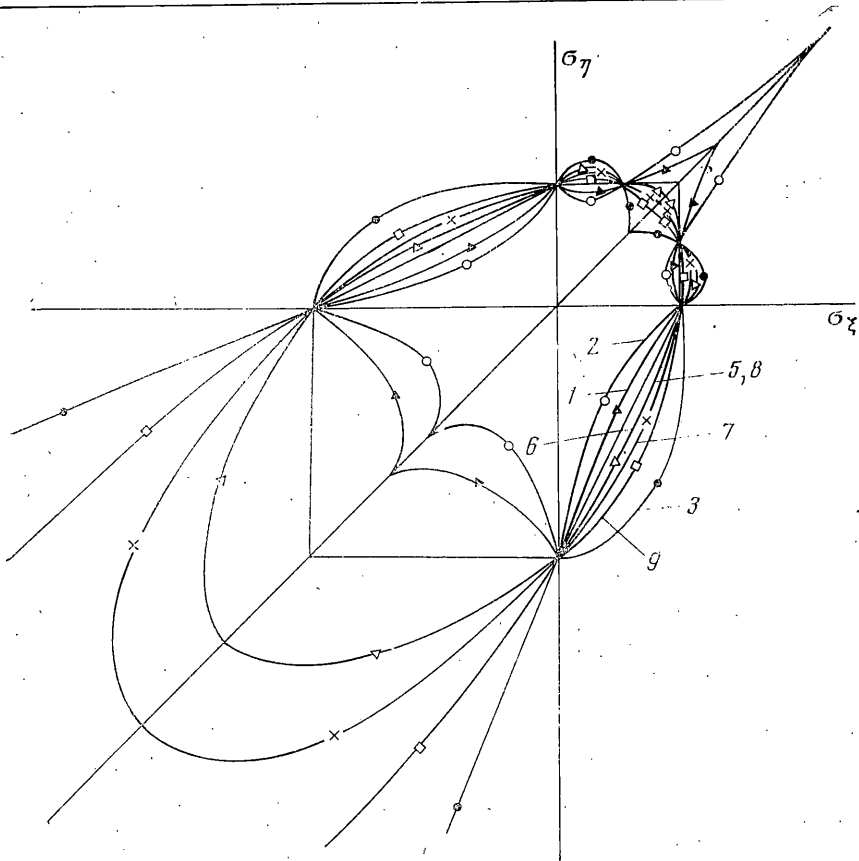
$$\sigma_e = \sigma_1 + 2 \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_p} - 1 \right) \sigma_2 - \frac{\sigma_b}{\sigma_c} \sigma_3 = \sigma_b$$

На фиг. 4 показаны границы области неразрушения по трехпараметрическому критерию (2.6). Аналогично фиг. 2 линии обозначены в соответствии с отношением σ_b/τ_b , которое дается критериями прочности, приведенными в таблице.

Условие (2.6) можно использовать для материалов, у которых прочность при действии внутреннего давления близка к прочности при растяжении. Условие (2.8) является естественным обобщением условия Мора.



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Четырехпараметрический критерий. Если для трехпараметрического критерия $\lambda_2=0$ величина σ_b/σ_p была задана отношениями σ_b/σ_c и σ_b/τ_b , то для рассматриваемого критерия ее можно принять соответствующей экспериментальным данным.

Для плоского напряженного состояния границы области неразрушения определяются формулами (1.6)–(1.8). Здесь в отличие от трехпараметрического критерия $\lambda_2=0$ точки двойного растяжения или сжатия уже не имеют ординаты σ_b и σ_c соответственно (фиг. 2), а будут равны

$$\sigma_A = \sigma_{\xi A} = \sigma_{\eta A} = \sigma_b / \left(2 \frac{\sigma_b}{\sigma_p} + \frac{\sigma_b}{\sigma_c} - \frac{\sigma_b}{\tau_b} \right)$$

$$\sigma_{\Gamma} = \sigma_{\xi \Gamma} = \sigma_{\eta \Gamma} = -\sigma_b / \left(1 + \frac{\sigma_b}{\tau_b} - 2 \frac{\sigma_b}{\sigma_p} \right)$$

Для точки полуторного сжатия

$$\sigma_D = \sigma_{\eta 1} = 2\sigma_{\xi 1} = -\sigma_b / \left(\frac{\sigma_b}{\tau_b} - \frac{\sigma_b}{\sigma_p} \right)$$

Для четырехпараметрического критерия заданными являются точки $P_1, P_2, B_1, B_2, K_1, K_2, C_1, C_2$.

Отметим, что во втором и четвертом квадрантах границы области неразрушения для трехпараметрических критериев ($\lambda_2=0, \sigma_b/\sigma_p=1$) и четырехпараметрического критерия совпадают.

Влияние величин σ_b/σ_c , σ_b/τ_b , σ_b/σ_p и соотношений между ними оказываются существенным для положения границ области неразрушения.

Для реальных конструкционных материалов между указанными величинами должны существовать зависимости типа полосовых функций. Приблизительно можно принять $\sigma_b/\tau_b = \sigma_b/\sigma_p + \sigma_b/\sigma_c \pm \Delta$, где обычно $\Delta = 0.1 \div 0.2$.

Отметим, что классические однопараметрические критерии разрушения Мизеса и максимальных касательных напряжений пригодны только для пластичных материалов при $\sigma_b = \sigma_c$.

В технике возрастает применение материалов с ограниченной пластичностью, для которых $\sigma_b < \sigma_c$ (высокопрочные сплавы, литые, порошковые и другие материалы).

Для класса малопластичных материалов наиболее важным уточнением является определение предела прочности при сжатии. Это позволяет широко использовать в практических расчетах двухпараметрические критерии прочности¹.

Применение трех и четырехпараметрических критериев дает возможность дальнейшего уточнения результатов (обычно не более чем на 20–40%), что существенно для конструкций ответственного назначения.

В тех случаях, когда отсутствуют экспериментальные данные о величинах σ_b/τ_b и σ_b/σ_p , более надежно использовать двухпараметрические критерии.

В настоящее время еще недостаточен объем экспериментальных исследований по прочности и пластичности при сложном напряженном состоянии.

Накопление соответствующих данных и сопоставление с расчетными позволит отобрать наиболее простые и эффективные критерии разрушения и пластичности среди нескольких десятков уже известных. Возможно, что при таком отборе предложенный критерий будет сохранен.

Поступила 8 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. Киев, «Наукова думка», 1969.
2. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. В сб.: Разрушение, т. 2. М., «Мир», 1975.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
4. Сдобырев В. П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 6.
5. Волков С. Д. Единая статистическая теория прочности твердых тел. Ж. техн. физ., 1954, т. 24, вып. 12.

¹ Для усталостной прочности двухпараметрические критерии основываются на пределах выносливости при растяжении – сжатии и кручении.