

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЛ ИЗ РЕЗИНОПОДОБНОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПОДКРЕПЛЕНИЯ

М. Г. ЯКОВЕНКО

(Москва)

Устойчивость упругих тел из резиноподобного материала с учетом подкрепления рассматривается как устойчивость анизотропных тел при конечных деформациях. Уравнения бифуркации равновесия анизотропных идеально упругих тел выводятся на основе кинематических представлений, использующих понятие скорости изменения лагранжевых координат [1-3]. Получены уравнения как для сжимаемых, так и для несжимаемых материалов.

Для задачи об устойчивости ортотропной полосы из резиноподобного материала приводятся численные результаты при одной конкретной форме упругого потенциала. Полученное решение можно рассматривать как обобщение работы [4], посвященной устойчивости стержня из неогукковского материала.

1. Исходными являются уравнения равновесия в объеме и на граничной поверхности тела, которым удовлетворяет в процессе его безынерционного нагружения скорость изменения тензора напряжений Коши в фиксированной точке пространства. Эти уравнения при отсутствии объемных сил имеют вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \frac{\partial \sigma_{mj}}{\partial t} \right) = 0$$

$$n_i \circ \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \frac{\partial \sigma_{mj}}{\partial t} + v_s^* \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial a_s} - \frac{\partial v_i^*}{\partial a_s} \pi_{sj} + \frac{\partial v_s^*}{\partial a_s} \pi_{ij} \right) dS_0 = \frac{d}{dt} (F_j dS) \quad (1.1)$$

Здесь x_i — декартовы координаты точек неподвижного пространства (эйлеровы координаты), a_i — лагранжевы координаты тела (декартовы координаты точек положения материальных частиц тела в его начальном ненапряженном состоянии). Движение тела при выводе уравнений (1.1) рассматривается как смена именованных материальных частиц в фиксированной точке пространства, определяемая по закону [3] $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t)$.

За меру мгновенного движения принимается величина

$$v_i^* = - \frac{\partial}{\partial t} a_i(x_1, x_2, x_3, t) = v_i^*(a_1, a_2, a_3, t) \quad (1.2)$$

названная в [1] скоростью изменения лагранжевых координат материальных частиц в фиксированной точке пространства.

В уравнениях (1.1) ρ_0 и ρ — плотности тела в начальном и текущем состоянии, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ — тензор истинных напряжений Коши, $\pi_{ij} = (\rho_0 / \rho) (\partial a_i / \partial x_m) \sigma_{mj}$ — тензор напряжений Пиолы; эти тензоры удовлетворяют уравнениям

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_i = 0, \quad n_i \sigma_{ij} dS = F_j dS, \quad d\pi_{ij} / \partial a_i = 0, \quad n_i \circ \pi_{ij} dS_0 = F_j dS$$

Величины $n_i^\circ dS_0$, $n_i dS$ — векторы элементарных площадок граничной поверхности тела в начальном и текущем состоянии, $F_j dS$ — вектор поверхностной нагрузки, приходящейся на элементарную площадку граничной поверхности в текущем состоянии. Производная d/dt означает дифференцирование по времени при $a_i = \text{const}$.

Система уравнений (1.1) справедлива для любого деформируемого тела, граничная поверхность которого состоит все время из одних и тех же материальных частиц. Рассмотрим случай сжимаемого идеально упругого тела, закон состояния которого определяется соотношением [5]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \sigma_{mn}^\circ, \quad \sigma_{mn}^\circ = \left(\frac{\partial}{\partial c_{mn}^\circ} + \frac{\partial}{\partial c_{nm}^\circ} \right) \Phi \quad (1.3)$$

$$c_{ij}^\circ = \frac{\partial x_s}{\partial a_i} \frac{\partial x_s}{\partial a_j}$$

Здесь c_{ij}° — первая мера деформаций Грина, связанная с тензором деформаций Грина ε_{ij}° соотношением $c_{ij}^\circ = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}^\circ$, δ_{ij} — символ Кронекера; $\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}^\circ)$ — удельная потенциальная энергия, отнесенная к начальному объему.

Дифференцируя выражение (1.3) по времени при $x_i = \text{const}$ и используя при этом соотношения [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_p}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right) = \frac{\partial v_p^*}{\partial a_j} \frac{\partial x_i}{\partial a_p}$$

$$\frac{\partial c_{ij}^\circ}{\partial t} = \frac{\partial v_p^*}{\partial a_i} c_{pj}^\circ + c_{ip}^\circ \frac{\partial v_p^*}{\partial a_j} \quad (1.4)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= - \frac{\partial v_p^*}{\partial a_p} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \sigma_{mn}^\circ + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_m} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \sigma_{mn}^\circ + \\ &+ \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_n} \frac{\partial x_j}{\partial a_p} \sigma_{mn}^\circ + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \frac{\partial \sigma_{mn}^\circ}{\partial c_{ts}^\circ} \left(\frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} c_{pt}^\circ + c_{sp}^\circ \frac{\partial v_p^*}{\partial a_t} \right) = \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \left(-\sigma_{mn}^\circ \delta_{ps} + \delta_{pm} \sigma_{sn}^\circ + \delta_{np} \sigma_{ms}^\circ + \frac{\partial \sigma_{mn}^\circ}{\partial c_{ts}^\circ} c_{pt}^\circ + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \sigma_{mn}^\circ}{\partial c_{st}^\circ} c_{tp}^\circ \right) \frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} K_{mns p} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$K_{mns p} = -\sigma_{mn}^\circ \delta_{ps} + \delta_{pm} \sigma_{sn}^\circ + \delta_{np} \sigma_{ms}^\circ + \frac{\partial \sigma_{mn}^\circ}{\partial c_{ts}^\circ} c_{pt}^\circ + \frac{\partial \sigma_{mn}^\circ}{\partial c_{st}^\circ} c_{tp}^\circ$$

Тензор $K_{mns p}$ можно преобразовать к виду

$$K_{mns p} = \left(\frac{\partial}{\partial c_{mn}^\circ} + \frac{\partial}{\partial c_{nm}^\circ} \right) \left(c_{pt}^\circ \frac{\partial}{\partial c_{ts}^\circ} + c_{tp}^\circ \frac{\partial}{\partial c_{st}^\circ} - \delta_{ps} \right) \Phi \quad (1.6)$$

Тензор $K_{mns p}$ определяет мгновенные модули упругости деформируемого тела и зависит только от накопленных в теле конечных деформаций (но не от конечных поворотов). Имеет место симметрия: $K_{mns p} = K_{nmsp}$. Если тело изотропное, то удельная потенциальная энергия зависит лишь от инвариантов мер деформаций. Нетрудно проверить, что в этом случае тензор $K_{mns p}$ симметричен не только по индексам m и n , но также и по индексам s и p , т. е. $K_{mns p} = K_{mnp s}$. Поэтому для изотропного тела в определя-

ющее уравнение (1.5) входит только симметричная часть градиента $\partial v_s^* / \partial a_i$, что было другим путем показано в статьях [1, 2].

Подставляя (1.5) в уравнения (1.1), получим систему дифференциальных уравнений и граничных условий, которым удовлетворяет вектор v_i^* при деформировании сжимаемого упругого тела

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \left(K_{mns p} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \right) = 0 \quad (1.7)$$

$$n_i \circ \left(K_{mns p} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} + v_s^* \frac{\partial \pi_{mj}}{\partial a_s} - \frac{\partial v_m^*}{\partial a_s} \pi_{sj} + \frac{\partial v_s^*}{\partial a_s} \pi_{ij} \right) dS_0 = \frac{d}{dt} (F_j dS)$$

Геометрические граничные условия состоят в задании скоростей материальных частиц граничной поверхности $v_i = (\partial x_i / \partial a_j) v_j^*$.

Для несжимаемого тела, когда $\rho_0 / \rho = \det \|c_{ij}^\circ\| = 1$, вывод подобных уравнений несколько другой. Тензор напряжений Коши несжимаемого идеально упругого тела равен [5] (P — произвольное гидростатическое напряжение):

$$\sigma_{ij} = P \delta_{ij} + \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \left(\frac{\partial}{\partial c_{mn}^\circ} + \frac{\partial}{\partial c_{nm}^\circ} \right) \Phi$$

Определяющее уравнение для скорости изменения тензора напряжений Коши имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \left(p f_{mn}^\circ + N_{mns p} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} \right) \\ N_{mns p} &= \left(\frac{\partial}{\partial c_{mn}^\circ} + \frac{\partial}{\partial c_{nm}^\circ} \right) \left(c_{pi}^\circ \frac{\partial}{\partial c_{st}^\circ} + c_{ip}^\circ \frac{\partial}{\partial c_{is}^\circ} \right) \Phi \\ p &= \partial P / \partial t, \quad f_{mn}^\circ = (\partial a_m / \partial x_i) (\partial a_n / \partial x_i) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система уравнений относительно вектора v_i^* следующая:

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \left[\left(p f_{mn}^\circ + N_{mns p} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} \right) \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \right] = 0, \quad \frac{\partial v_m^*}{\partial a_m} = 0 \quad (1.9)$$

$$n_m \circ \left[\left(p f_{mn}^\circ + N_{mns p} \frac{\partial v_p^*}{\partial a_s} \right) \frac{\partial x_j}{\partial a_n} + v_s^* \frac{\partial \pi_{mj}}{\partial a_s} - \frac{\partial v_m^*}{\partial a_s} \pi_{sj} \right] dS_0 = \frac{d}{dt} (F_j dS)$$

Увеличение числа неизвестных за счет появления скаляра p компенсируется дополнительным дифференциальным уравнением $\partial v_m^* / \partial a_m = 0$, которое следует из (1.4) и выражает условие несжимаемости материала.

Уравнения (1.7) и (1.9) могут служить для решения задач о наложении малой деформации на конечную, в частности — для исследования устойчивости конечных деформаций. Неустойчивость определяется существованием нетривиального решения соответствующей однородной краевой задачи. Из этого условия находится критическое значение внешней нагрузки.

Указанная однородная краевая задача получается из уравнений (1.7) или (1.9) варьированием поля скоростей v_i^* в фиксированный момент времени при фиксированной нагрузке и кинематических условиях. В частности, при «мертвой» нагрузке на поверхности тела уравнения устойчивости, если не вводить новых обозначений для вариаций скоростей, имеют вид уравнений (1.7) или (1.9) с нулевой правой частью в граничных условиях.

2. В качестве иллюстрации возможного применения уравнений (1.7) и (1.9) решается задача о поверхностной неустойчивости полуплоскости из ортотропного материала. Оси a_1 и a_2 совмещаются с осями ортотропии. Тогда удельная потенциальная энергия в случае плоской деформации

($c_{13}^\circ = c_{23}^\circ = 0$, $c_{33}^\circ = 1$) задается в виде [5]:

$$\Phi = \Phi(c_{11}^\circ, c_{22}^\circ, c_{12}^\circ c_{21}^\circ) \quad (2.1)$$

Если тело изотропно, то зависимость (2.1) имеет более простой вид: $\Phi = \Phi(j_1, j_2)$, где $j_1 = c_{11}^\circ + c_{22}^\circ$, $j_2 = c_{11}^\circ c_{22}^\circ - c_{12}^\circ c_{21}^\circ$. Если тело к тому же и несжимаемое, то $j_2 = 1$ и $\Phi = \Phi(j_1)$.

Рассматривается полуплоскость $a_2 \leq 0$. Докритическое напряженно-деформированное состояние однородно

$$\sigma_{11} = \text{const}, \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, c_{11}^\circ = \text{const}, c_{22}^\circ = \text{const}, c_{12}^\circ = 0$$

Разыскивается такое критическое значение напряжения σ_{11} , когда становится возможным появление поля скоростей v_i^* , характеризующее выпучивание первоначально плоской граничной поверхности. Вначале решается задача для несжимаемого материала. Дифференциальные уравнения однородной краевой задачи (плоская форма потери устойчивости, $v_3^* = 0$), следуют из (1.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(p f_{11}^\circ + N_{1111} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_1} + N_{1122} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_2} \right) + \frac{\partial}{\partial a_2} \left(N_{1212} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} + N_{1221} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \left(N_{1212} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} + N_{1221} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_2} \right) + \frac{\partial}{\partial a_2} \left(p f_{22}^\circ + N_{2211} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_1} + N_{2222} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v_1^*}{\partial a_1} + \frac{\partial v_2^*}{\partial a_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Граничные условия при $a_2 = 0$ ($n_1^\circ = 0$, $n_2^\circ = 1$)

$$\begin{aligned} N_{1212} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} + N_{1221} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_2} - \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} \sigma_{11}^\circ &= 0 \\ N_{2211} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_1} + N_{2222} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_2} + p f_{22}^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В краевой задаче (2.2), (2.3) компоненты тензора N_{mnp} определяются выражениями

$$\begin{aligned} N_{1111} &= 4c_{11}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{11}^\circ \partial c_{11}^\circ} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial c_{11}^\circ}, & N_{2222} &= 4c_{22}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{22}^\circ \partial c_{22}^\circ} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial c_{22}^\circ}, \\ N_{1122} &= 4c_{22}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{11}^\circ \partial c_{22}^\circ}, & N_{2211} &= 4c_{11}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{11}^\circ \partial c_{22}^\circ}, \\ N_{1212} &= 2 \frac{\partial \Phi}{\partial c_{11}^\circ} + 2c_{22}^\circ \frac{\partial \Phi}{\partial (c_{12}^\circ c_{21}^\circ)}, & N_{1221} &= 2 \frac{\partial \Phi}{\partial c_{22}^\circ} + 2c_{11}^\circ \frac{\partial \Phi}{\partial (c_{12}^\circ c_{21}^\circ)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Можно показать, что выражения $(c_{11}^\circ N_{1212} / \rho_0)^{1/2}$ и $(c_{22}^\circ N_{1221} / \rho_0)^{1/2}$ определяют скорости распространения плоских поперечных волн по направлениям осей a_1 и a_2 . Остальные компоненты тензора N_{mnp} , которые могли бы появиться в (2.2), (2.3), равны нулю в силу однородности докритического состояния. Для изотропного материала $N_{1212} = N_{1221} = 2\partial\Phi / \partial j_1$.

Кроме того, понадобятся соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^\circ &= p f_{11}^\circ + 2\partial\Phi / \partial c_{11}^\circ, \quad \sigma_{22}^\circ = p f_{22}^\circ + 2\partial\Phi / \partial c_{22}^\circ = 0 \\ f_{11}^\circ &= \frac{1}{c_{11}^\circ}, \quad f_{22}^\circ = \frac{1}{c_{22}^\circ}, \quad \sigma_{11} = 2c_{11}^\circ \frac{\partial \Phi}{\partial c_{11}^\circ} - 2c_{22}^\circ \frac{\partial \Phi}{\partial c_{22}^\circ} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вследствие несжимаемости материала к данным о докритическом состоянии должно быть присоединено условие $c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} = 1$.

Решение дифференциальных уравнений (2.2) принимается в виде ($k = \pi/l_0$, l_0 — длина полуволны в метрике недеформированного тела)

$$p = k(B_1 \vartheta_1 \xi_1 e^{k\xi_1 a_2} + B_2 \vartheta_2 \xi_2 e^{k\xi_2 a_2}) \sin ka_1$$

$$v_1^* = -(B_1 \xi_1 e^{k\xi_1 a_2} + B_2 \xi_2 e^{k\xi_2 a_2}) \cos ka_1, \quad v_2^* = -(B_1 e^{k\xi_1 a_2} + B_2 e^{k\xi_2 a_2}) \sin ka_1 \quad (2.6)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = [c_{22}^{\circ} (N_{2222} - N_{2211} - N_{1221}) + c_{11}^{\circ} (N_{1111} - N_{1122} - N_{1212})] / c_{11}^{\circ} N_{1221}$$

$$\xi_1^2 \xi_2^2 = c_{22}^{\circ} N_{1212} / c_{11}^{\circ} N_{1221}, \quad \vartheta_i = c_{11}^{\circ} (N_{1122} + N_{1212} - N_{1111} + N_{1221} \xi_i^2) \quad (2.7)$$

Для обеспечения условия затухания величин v_i^* и p при $a_2 \rightarrow -\infty$ должны выполняться неравенства $\text{Re } \xi_i > 0$.

Подстановка (2.6) в граничные условия (2.3) приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} N_{1212} + N_{1221} \xi_1^2 - \sigma_{11}^{\circ} & N_{1212} + N_{1221} \xi_2^2 - \sigma_{11}^{\circ} \\ (N_{2211} - N_{2222} + f_{22}^{\circ} \vartheta_1) \xi_1 & (N_{2211} - N_{2222} + f_{22}^{\circ} \vartheta_2) \xi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

После преобразований из (2.8) получается условие неустойчивости в форме

$$\sigma_{11} = \frac{c_{11}^{\circ} (N_{1111} - N_{1122}) + c_{22}^{\circ} (N_{2222} - N_{2211})}{1 - \xi_1 \xi_2 N_{1221} / N_{1212}} \quad (2.9)$$

Далее необходимо исследовать выполнение условий $\text{Re } \xi_i > 0$. Для этого (2.9) подставляется в (2.7), что с учетом равенства

$$c_{11}^{\circ} N_{1212} - c_{22}^{\circ} N_{1221} = 2c_{11}^{\circ} (\partial\Phi / \partial c_{11}^{\circ}) - 2c_{22}^{\circ} (\partial\Phi / \partial c_{22}^{\circ}) = \sigma_{11} \quad (2.10)$$

приводит к зависимости

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = -\xi_1 \xi_2 - 2c_{22}^{\circ} / c_{11}^{\circ} + (c_{22}^{\circ} / c_{11}^{\circ})^2 / (\xi_1 \xi_2)$$

Из последнего выражения находят комбинации

$$(\xi_1 + \xi_2)^2 = (c_{22}^{\circ} / c_{11}^{\circ} - \xi_1 \xi_2)^2 / (\xi_1 \xi_2) \quad (2.11)$$

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 = (c_{22}^{\circ} / c_{11}^{\circ} + \xi_1 \xi_2) (c_{22}^{\circ} / c_{11}^{\circ} - 3\xi_1 \xi_2) / (\xi_1 \xi_2)$$

Параметры ξ_1^2 и ξ_2^2 могут быть либо комплексно-сопряженными, либо действительными положительными числами. И в том и в другом случае согласно (2.7) должно выполняться неравенство $N_{1212} / N_{1221} > 0$, которому с учетом (2.10) можно придать форму $\sigma_{11}^{\circ} / N_{1212} < 1$.

Параметры ξ_1 и ξ_2 также либо комплексно-сопряженные, либо действительные числа одного знака. Поэтому $\xi_1 \xi_2 = +\sqrt{c_{22}^{\circ} N_{1212} / c_{11}^{\circ} N_{1221}}$. Тогда из анализа (2.11) выясняется следующее. При $c_{22}^{\circ} / c_{11}^{\circ} > 9N_{1212} / N_{1221}$, т. е. когда $\sigma_{11}^{\circ} / N_{1212} < -8$, величины ξ_1 и ξ_2 — действительные числа одного знака (положительные). Если же $c_{22}^{\circ} / c_{11}^{\circ} < 9N_{1212} / N_{1221}$, т. е. $-8 < \sigma_{11}^{\circ} / N_{1212} < 1$, то ξ_1 и ξ_2 — комплексно-сопряженные числа (с положительной, например, действительной частью).

Таким образом, независимо от конкретной формы упругого потенциала условие затухания выполняется, если только для найденных критических значений параметров напряженно-деформированного состояния выполняется неравенство $\sigma_{11}^{\circ} / N_{1212} < 1$.

Поэтому решение

$$\sigma_{11} = \frac{c_{11}^{\circ} (N_{1111} - N_{1122}) + c_{22}^{\circ} (N_{2222} - N_{2211})}{1 - \sqrt{c_{22}^{\circ} N_{1221} / c_{11}^{\circ} N_{1212}}} \quad (2.12)$$

является достаточно общим. Из (2.12) с учетом равенств

$$\sigma_{11} = 2c_{11}^{\circ} (\partial\Phi / \partial c_{11}^{\circ}) - 2c_{22}^{\circ} (\partial\Phi / \partial c_{22}^{\circ}), \quad c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} = 1$$

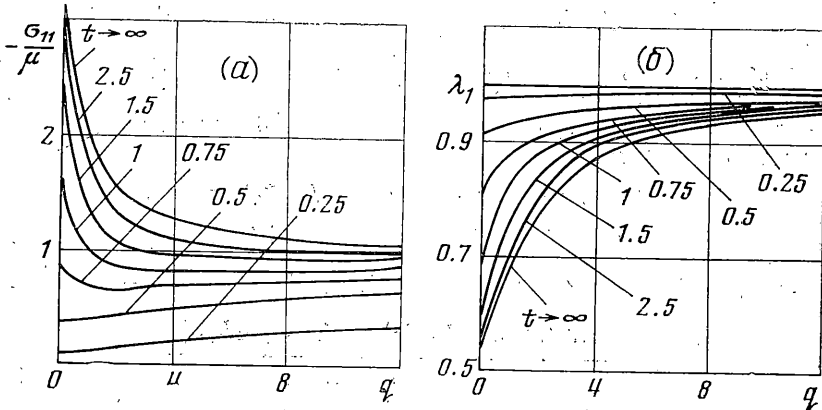
находится критическое значение деформации.

Для изотропного тела, когда $\Phi = \Phi(j_1)$, из (2.12) определяется условие потери устойчивости в форме ($\lambda_1 = \sqrt{c_{11}^0}$)

$$(\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1)\Phi' + 2(\lambda_1^4 - 1)^2\Phi'' = 0 \quad (2.13)$$

где штрихи означают производные от функции по ее аргументу.

При помощи краевой задачи (2.2), (2.3) решается также задача об устойчивости бесконечной полосы $-h_0/2 \leq a_2 \leq h_0/2$ из ортотропного несжи-



маемого материала. Докритическое состояние соответствует описанному выше. Решение уравнений (2.2) для изгибной формы потери устойчивости принимается в форме

$$\begin{aligned} v_1^* &= -(A_1 \xi_1 \operatorname{sh} k \xi_1 a_2 + A_2 \xi_2 \operatorname{sh} k \xi_2 a_2) \cos ka_1 \\ v_2^* &= -(A_1 \operatorname{ch} k \xi_1 a_2 + A_2 \operatorname{ch} k \xi_2 a_2) \sin ka_1 \\ p &= k(A_1 \vartheta_1 \xi_1 \operatorname{sh} k \xi_1 a_2 + A_2 \vartheta_2 \xi_2 \operatorname{sh} k \xi_2 a_2) \sin ka_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

где ϑ_i и ξ_i определяются выражениями (2.7). Подстановка (2.14) в граничные условия (2.3), которые должны выполняться при $a_2 = \pm h_0/2$, приводит к решению задачи в виде ($t = 1/2 \pi h_0/l_0$)

$$\sigma_{11} = \frac{[c_{11}^0(N_{1111} - N_{1122}) + c_{22}^0(N_{2222} - N_{2211})](\xi_1 \operatorname{th} \xi_2 t - \xi_2 \operatorname{th} \xi_1 t)}{\xi_1 \operatorname{th} \xi_2 t - \xi_2 \operatorname{th} \xi_1 t - \sqrt{c_{22}^0 N_{1221}/c_{11}^0 N_{1212}}(\xi_1 \operatorname{th} \xi_1 t - \xi_2 \operatorname{th} \xi_2 t)} \quad (2.15)$$

Решение для симметричной формы потери устойчивости получается из (2.15) заменой $\operatorname{th} \xi_i t$ на $\operatorname{cth} \xi_i t$. При $t \rightarrow \infty$ из (2.15) получается решение для полуплоскости (2.12).

В качестве примера рассмотрим материал с упругим потенциалом

$$\Phi = \mu(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) + 1/2 \alpha (\varepsilon_{11}^0)^2$$

типа материала Трелоара [4], армированного вдоль оси a_1 волокнами, придающими телу свойства анизотропии. В данном случае

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \mu(c_{11}^0 - c_{22}^0) + \alpha c_{11}^0 \varepsilon_{11}^0, & N_{1111} &= 2\mu + \alpha(c_{11}^0 + 2\varepsilon_{11}^0) \\ N_{2222} &= 2\mu, & N_{1212} &= \mu + \alpha \varepsilon_{11}^0, & N_{1221} &= \mu, & N_{1122} &= N_{2211} = 0 \\ \xi_{1,2} &= 1/2(\sqrt{a+2\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-2\sqrt{b}}), & a &= 1+q(3\lambda_1^2-1)+1/\lambda_1^4 \\ b &= (1+q(\lambda_1^2-1))/\lambda_1^4, & q &= 1/2\alpha/\mu, & \lambda_1 &= \sqrt{c_{11}^0} \end{aligned}$$

С учетом последних выражений из уравнения (2.15) может быть численно найдено критическое удлинение $\lambda_1 = \lambda_1(q, t)$. Критическое значение напряжения (истин-

ного) определяется после этого из соотношения

$$\sigma_{11}/\mu = \lambda_1^2 - 1/\lambda_1^2 + q\lambda_1^2(\lambda_1^2 - 1)$$

Результаты расчетов представлены на фигуре (а, б). Интересно отметить, что при больших значениях относительной толщины полосы армирование приводит вначале к понижению критического напряжения. Для полуплоскости ($t \rightarrow \infty$) критическое напряжение монотонно убывает при возрастании q и стремится к $-\mu$. При $q=0$, т. е. для изотропного материала, получается известное решение для материала Трелора [4].

3. Рассмотрим устойчивость полуплоскости из ортотропного сжимаемого материала. Краевая задача следует из (1.7). Дифференциальные уравнения в объеме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(K_{1111} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_1} + K_{1122} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_2} \right) + \frac{\partial}{\partial a_2} \left(K_{1212} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} + K_{1221} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \left(K_{1221} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_2} + K_{1212} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} \right) + \frac{\partial}{\partial a_2} \left(K_{2211} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_1} + K_{2222} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Граничные условия при $a_2=0$ имеют вид

$$K_{1212} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} + K_{1221} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_2} - \frac{\partial v_2^*}{\partial a_1} \sigma_{11}^\circ = 0 \quad (3.2)$$

$$K_{2211} \frac{\partial v_1^*}{\partial a_1} + K_{2222} \frac{\partial v_2^*}{\partial a_2} = 0$$

$$\begin{aligned} K_{1111} &= \sigma_{11}^\circ + 4c_{11}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{11}^\circ \partial c_{11}^\circ}, & K_{2222} &= 4c_{22}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{22}^\circ \partial c_{22}^\circ} \\ K_{1212} &= 2c_{22}^\circ \frac{\partial \Phi}{\partial (c_{12}^\circ c_{21}^\circ)} + \sigma_{11}^\circ, & K_{1221} &= 2c_{11}^\circ \frac{\partial \Phi}{\partial (c_{12}^\circ c_{21}^\circ)} \\ K_{1122} &= 4c_{22}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{11}^\circ \partial c_{22}^\circ} - \sigma_{11}^\circ, & K_{2211} &= 4c_{11}^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{11}^\circ \partial c_{22}^\circ} \\ \sigma_{11}^\circ &= 2\partial \Phi / \partial c_{11}^\circ, & \sigma_{22}^\circ &= 2\partial \Phi / \partial c_{22}^\circ = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Можно показать, что выражения $\sqrt{c_{11}^\circ K_{1111}}/\rho_0$, $\sqrt{c_{22}^\circ K_{2222}}/\rho_0$ и $\sqrt{c_{11}^\circ K_{1212}}/\rho_0$, $\sqrt{c_{22}^\circ K_{1221}}/\rho_0$ представляют собой скорости распространения соответственно продольных и поперечных плоских волн в направлениях осей a_1 и a_2 .

Решение уравнений (3.1) принимается в виде

$$v_1^* = (A_1 e^{k\xi_1 a_2} + A_2 e^{k\xi_2 a_2}) \cos ka_1, \quad v_2^* = (A_1 \vartheta_1 e^{k\xi_1 a_2} + A_2 \vartheta_2 e^{k\xi_2 a_2}) \sin ka_1 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 &= (K_{1111} K_{2222} - K_{1122} K_{2211} - K_{1122} K_{1221} - K_{2211} K_{1212}) / K_{1221} K_{2222} \\ \xi_1^2 \xi_2^2 &= K_{1111} K_{1212} / K_{2222} K_{1221}, \quad \vartheta_i = (K_{1111} - K_{1221} \xi_i^2) / [(K_{1122} + K_{1212}) \xi_i] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подстановка (3.4) в граничные условия (3.2) приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} (K_{1212} - \sigma_{11}^\circ) \vartheta_1 + K_{1221} \xi_1 & (K_{1212} - \sigma_{11}^\circ) \vartheta_2 + K_{1221} \xi_2 \\ K_{2222} \vartheta_1 \xi_1 - K_{2211} & K_{2222} \vartheta_2 \xi_2 - K_{2211} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

Из (3.6) после преобразований находится решение в форме

$$\sigma_{11}^\circ = \frac{K_{1111} K_{2222} - K_{1122} K_{2211}}{K_{2211} - \sqrt{K_{1111} K_{2222} K_{1221} / K_{1212}}}$$

которое имеет смысл, если только $K_{1111}K_{1212}/K_{2222}K_{1221} > 0$. Анализ параметров ξ_1 и ξ_2 , подобный проведенному в п. 2, показывает, что и здесь условие затухания $\operatorname{Re} \xi_i > 0$ выполняется при любой форме упругого потенциала.

Поступила 4 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабух Л. И., Яковенко М. Г. Уравнения бифуркации равновесия упругого изотропного тела в скоростях изменения лагранжевых координат. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
2. Балабух Л. И., Яковенко М. Г. Об учете деформационной анизотропии в задачах устойчивости изотропных упругих тел. В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
3. Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. М., «Наука», 1969.
4. Бидерман В. Л. Устойчивость стержня из неогукковского материала. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
5. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.