

О ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АМОРТИЗИРУЮЩИХ ОПОР С ТВЕРДОЙ ПРЕГРАДОЙ

В. Ф. ХВОСТОВ

(Москва)

При исследованиях амортизируемого столкновения механических систем возникает задача определения контактных сил реакции на опорах амортизирующего устройства.

Для системы, допускающей относительное смещение контактирующих опор по заданным линиям, эта задача решена в [1]. В данной статье рассматривается общий случай взаимодействия, когда амортизирующие опоры могут смещаться при нагружении в произвольном направлении. Расчетная модель амортизирующего устройства представлена системой безынерционных податливых элементов, силовые характеристики которых задаются функциями вида $P = P(\delta, \text{sign } \delta')$, где δ и δ' — рабочий ход элемента и его скорость.

Метод определения контактных сил основан на приближенном решении задачи взаимодействия безмассовой опоры с плоскостью при плоскопараллельном движении системы. При численном интегрировании уравнений движения полученное решение применимо в более общих случаях. Для подтверждения последнего приводятся результаты числовых расчетов.

1. Пусть на отрезке времени Δt опора, определяемая в момент t радиус-вектором \mathbf{r}_0 , контактирует с твердой плоскостью, ориентация которой задается единичным вектором ее нормали \mathbf{n} . В окрестности рассматриваемой точки контакта вектор силы \mathbf{P}_k , действующей на опору со стороны конструкции амортизирующей системы, линейно зависит от ее относительного смещения δ

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{r}_0 + \delta) = \mathbf{P}_k(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial \mathbf{P}_k}{\partial \delta} \Big|_{\mathbf{r}_0} |\delta| \quad (1.1)$$

где $|\delta|$ — модуль вектора δ .

За рассматриваемый отрезок времени Δt амортизируемая система равномерно смещается параллельно самой себе. Это движение задается вектором смещения \mathbf{l} .

В момент $t + \Delta t$ требуется найти положение опоры \mathbf{r} и силу \mathbf{P} ее взаимодействия с плоскостью при условии, что их контакт характеризуется коэффициентом кулонова трения μ . В дальнейшем под силой взаимодействия \mathbf{P} будем понимать силу, действующую на опору со стороны твердой плоскости, т. е. $\mathbf{P} = -\mathbf{P}_k$.

Преобразуем выражение (1.1) к виду, удобному для определения силы взаимодействия \mathbf{P} . В частности, для второго слагаемого получим [1²]

$$\frac{\partial \mathbf{P}_k}{\partial \delta} \Big|_{\mathbf{r}_0} |\delta| = \delta \cdot \nabla \mathbf{P}_k(\mathbf{r}_0) = -D_p(\mathbf{r}_0) \delta \quad (1.2)$$

$$D_p(\mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial x} & \frac{\partial P_x}{\partial y} & \frac{\partial P_x}{\partial z} \\ \frac{\partial P_y}{\partial x} & \frac{\partial P_y}{\partial y} & \frac{\partial P_y}{\partial z} \\ \frac{\partial P_z}{\partial x} & \frac{\partial P_z}{\partial y} & \frac{\partial P_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

где $D_p(\mathbf{r}_0)$ — матрица жесткости в точке \mathbf{r}_0 .

Тогда

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + D_p \delta, \quad \mathbf{P}_0 = -\mathbf{P}_k(\mathbf{r}_0) \quad (1.3)$$

Здесь обозначения аргументов опущены для сокращения записи.

Преобразуем также условие, которому подчиняется силовое взаимодействие опоры с плоскостью

$$|\mathbf{P}_\tau| \leq \mu |\mathbf{P}_n|, \quad \mathbf{P}_\tau = \mathbf{n} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}_n = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{n} \quad (1.4)$$

где \mathbf{P}_τ — вектор, параллельный плоскости контакта; \mathbf{P}_n — вектор, перпендикулярный плоскости контакта. Возведя (1.4) в квадрат и сделав простые преобразования, по-

лучим условие контакта в векторной форме

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})^2 \leq 0 \quad (1.5)$$

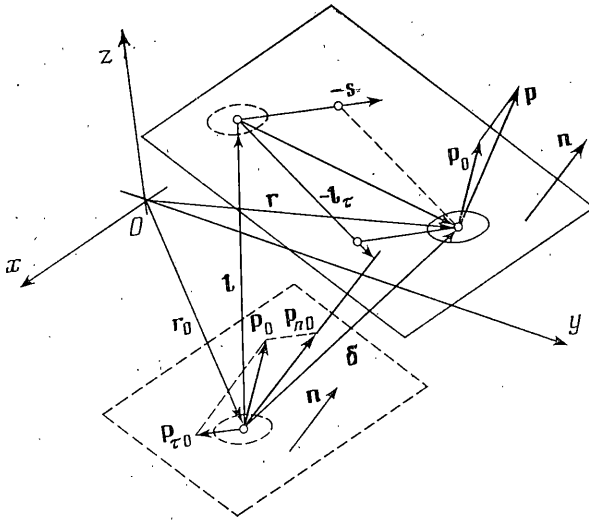
Если на рассматриваемом отрезке времени опора контактирует с плоскостью со скольжением, то

$$|\mathbf{P}_\tau| \equiv \mu |\mathbf{P}_n| \quad (1.6)$$

Подставив в (1.6) приведенные выражения для \mathbf{P}_τ и \mathbf{P}_n , продифференцируем его по времени. После несложных преобразований получим условие контакта скользящей опоры в дифференциальной форме

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}') = 0 \quad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем точка в позиции штриха означает производную по времени от соответствующей величины.



Фиг. 1

При дискретном счете приближенное с достаточной точностью решение задачи определяется при помощи условий (1.5) и (1.7) для моментов времени t и $t + \Delta t$. Искомое смещение δ (фиг. 1) будем определять в виде

$$\delta = \mathbf{l} - k_1 \mathbf{s} - k_2 \mathbf{l}_\tau + k_3 \mathbf{e}, \quad \mathbf{l}_\tau = \mathbf{n} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) \quad (1.8)$$

где \mathbf{s} — вектор направления скольжения, \mathbf{e} — вектор направления поправки (его определение будет дано ниже), k_1 , k_2 и k_3 — искомые коэффициенты. Определение скалярных величин k_1 , k_2 и k_3 составляет основу решения сформулированной задачи.

Невыполнение в момент t условия (1.5) указывает на начальное скольжение опоры. В этот момент $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}' = D_p \delta'$, $\delta' = \mathbf{l}' - k_1 \mathbf{s}'$ и, предполагая, что вектор скольжения коллинеарен компоненте силы в плоскости контакта, $\mathbf{s} \approx \mathbf{n} \times (\mathbf{P}_0 \times \mathbf{n})$. Подставляя эти выражения в (1.7), найдем относительную величину скольжения k_1

$$k_1 = \frac{\mathbf{P}_0 D_p \mathbf{l} - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_0) (\mathbf{n} D_p \mathbf{l})}{\mathbf{P}_0 D_p \mathbf{s} - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_0) (\mathbf{n} D_p \mathbf{s})} \quad (1.9)$$

Здесь при условии равномерного движения $\mathbf{s} \approx \mathbf{s}' \Delta t$, $\mathbf{l}' \approx \mathbf{l}' \Delta t$. Учитывая реальные условия скольжения, на величину коэффициента k_1 следует наложить следующее ограничение:

$$0 \leq k_1 \leq (\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}_0) / (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) \quad (1.10)$$

где \mathbf{u}_0 — вектор смещения опоры в момент t , обусловленный упругими деформациями амортизирующей системы.

Коэффициент k_2 выражает поправку в направлении относительного движения контактирующей плоскости. Для реальных условий контакта область значений k_2 ограничена отрезком $(0, 1)$. Для его определения выделим из (1.8) компоненту смещения $\delta_2 = \mathbf{l} - k_2 \mathbf{l}_\tau$, подставим в (1.3) и далее в (1.5).

Анализ решений полученного уравнения (предельное равенство нулю) и условий контакта опоры с плоскостью позволяет установить следующие значения коэффициента k_2 :

$$k_2 = \min_j \lambda_j \quad \begin{matrix} k_2=0 \text{ при } C_2 < 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 > 0 \\ \text{при } (C_2 \geq 0 \text{ или } \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 \leq 0), \quad \lambda_j \in (0, 1) \end{matrix} \quad (1.11)$$

$$k_2=1 \text{ при } (C_2 \geq 0 \text{ или } \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 \leq 0), \quad \lambda_j \notin (0, 1)$$

Здесь λ_j — корни уравнения

$$A_2 \lambda^2 - 2B_2 \lambda + C_2 = 0, \quad A_2 = |D_p \mathbf{l}_\tau|^2 - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} D_p \mathbf{l}_\tau)^2 \\ B_2 = \mathbf{P}_2 D_p \mathbf{l}_\tau - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2) (\mathbf{n} D_p \mathbf{l}_\tau), \quad C_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_2 - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2)^2, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_0 + D_p \mathbf{l}$$

Коэффициент k_3 выражает поправку в направлении действия силы. Для его определения искомое смещение (1.8) опоры представим в виде

$$\delta = \delta_3 + k_3 \mathbf{e}, \quad \delta_3 = \mathbf{l} - k_1 \mathbf{s} - k_2 \mathbf{l}_\tau \quad (1.12)$$

где вектор \mathbf{e} определен условиями

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (\mathbf{n} \times \mathbf{P}_3) D_p \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_0 + D_p \delta_3$$

Подставляя (1.12) в (1.5), получим

$$A_3 k_3^2 + 2B_3 k_3 + C_3 \leq 0, \quad A_3 = |D_p \mathbf{e}|^2 - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} D_p \mathbf{e})^2 \\ B_3 = \mathbf{P}_3 D_p \mathbf{e} - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3) (\mathbf{n} D_p \mathbf{e}), \quad C_3 = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_3 - (1 + \mu^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3)^2 \quad (1.13)$$

Поправка k_3 определяется только для случая $C_3 > 0$. Анализ коэффициентов A_3 и B_3 приводит к следующим соотношениям:

$$B_3 H > 0 \text{ при } A_3 > 0; \quad B_3 \geq 0 \text{ при } A_3 < 0 \\ H = [\mathbf{n} \times (\mathbf{P}_3 \times \mathbf{n})] \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{P}_e \times \mathbf{n})], \quad \mathbf{P}_e = D_p \mathbf{e} \quad (1.14)$$

С учетом (1.14) из (1.13) получим

$$k_3 = \frac{1}{A_3} [-B_3 + (B_3^2 - A_3 C_3)^{1/2} \text{sign } H] \quad \text{при } A_3 \neq 0 \\ k_3 = -\frac{1}{2} \frac{C_3}{B_3} \quad \text{при } A_3 = 0, \quad B_3 \neq 0 \quad (1.15)$$

При $C_3 \leq 0$ $k_3 = 0$. Случай $A_3 = B_3 = 0$ при $C_3 \neq 0$ невозможен, если $\det(D_p) \neq 0$. Найденное смещение δ определяет искомое положение опоры $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \delta$ и контактную силу \mathbf{P} согласно (1.3).

2. Найдем аналитическое выражение матрицы жесткости для амортизирующей системы, представленной на фиг. 2. Податливая стойка закреплена одним концом на корпусе модели при помощи сферического шарнира. В шарнирном соединении установлены взаимно ортогональные силовые элементы, нагружающие стойку моментами при ее угловых отклонениях. На свободном конце стойки образована опора, которая и воспринимает контактную нагрузку. Для безынерционной амортизирующей системы сила на опоре определяется выражением

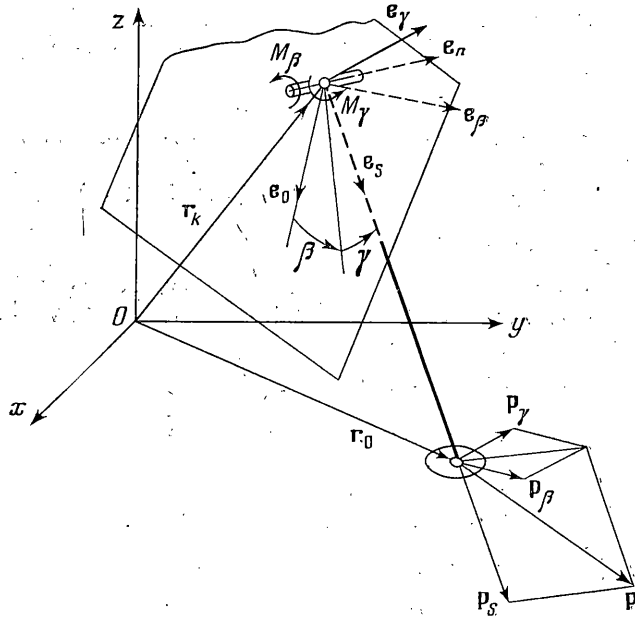
$$\mathbf{P} = S \mathbf{e}_s + \frac{1}{L} M_\beta \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{L} M_\gamma \mathbf{e}_\gamma, \quad S = S(\delta_s, \text{sign } \delta_s^*), \quad M_\beta = M_\beta(\beta, \text{sign } \beta^*), \quad M_\gamma = M_\gamma(\gamma, \text{sign } \gamma^*) \quad (2.1)$$

$$L = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|, \quad \delta_s = L - L_0, \quad \text{sign } \delta_s^* = \text{sign}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_s), \quad \mathbf{e}_s = \frac{1}{L} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \omega_0 \times \mathbf{r}$$

$$\beta = -\text{arc sin}(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\beta), \quad \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n |\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n|^{-1}, \quad \text{sign } \beta^* = \text{sign}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\beta)$$

$$\gamma = \text{arc sin}(\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{e}_\gamma = \mathbf{e}_s \times (\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_s) |\mathbf{e}_s \times (\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_s)|^{-1}, \quad \text{sign } \gamma^* = \text{sign}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\gamma)$$

где S , M_β , M_γ — заданные силовые характеристики податливых элементов амортизации, L_0 — первоначальная длина стойки, \mathbf{V}_0 и ω_0 — линейная и угловая скорости по-



Фиг. 2

луса O , e_0 — единичный вектор первоначального положения стойки, e_n — единичный вектор нормали к плоскости отсчета.

Матрицу D_p представим в когулированном виде

$$D_p = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

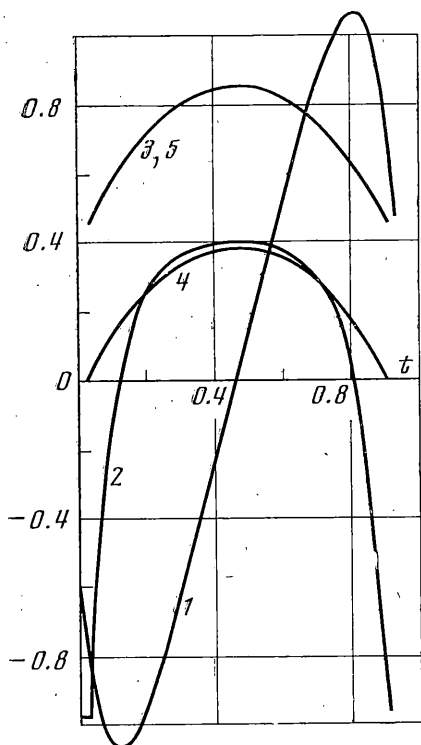
Для сокращения последующих записей введем обозначения: $q_1=x$, $q_2=y$, $q_3=z$. Дифференцируя (2.1) по координатам q_i , найдем элементы столбцы матрицы (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial q_i} = & \frac{dS}{d\delta_S} \frac{\partial \delta_S}{\partial q_i} e_S + S \frac{\partial e_S}{\partial q_i} - \frac{1}{L^2} (M_\beta e_\beta + M_\gamma e_\gamma) \frac{\partial L}{\partial q_i} + \\ & + \frac{1}{L} \left(\frac{dM_\beta}{d\beta} \frac{\partial \beta}{\partial q_i} e_\beta + M_\beta \frac{\partial e_\beta}{\partial q_i} \right) + \frac{1}{L} \left(\frac{dM_\gamma}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} e_\gamma + M_\gamma \frac{\partial e_\gamma}{\partial q_i} \right) \quad (2.3) \\ \frac{\partial \delta_S}{\partial q_i} = & \frac{\partial L}{\partial q_i} = e_{Si}, \quad \frac{\partial e_S}{\partial q_i} = \frac{1}{L} (e_i - e_{Si} e_S), \quad \frac{\partial \beta}{\partial q_i} = -e_0 \cdot \frac{\partial e_\beta}{\partial q_i} [1 - (e_0 \cdot e_\beta)^2]^{-1/2} \\ \frac{\partial e_\beta}{\partial q_i} = & e_\beta \times (u_\beta \times e_\beta), \quad u_\beta = \left(\frac{\partial e_S}{\partial q_i} \times e_n \right) |e_S \times e_n|^{-1}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} = e_n \cdot \frac{\partial e_S}{\partial q_i} [1 - (e_n \cdot e_S)^2]^{-1/2} \\ \frac{\partial e_\gamma}{\partial q_i} = & e_\gamma \times (u_\gamma \times e_\gamma), \quad u_\gamma = \left[\frac{\partial e_S}{\partial q_i} \times (e_n \times e_S) + e_S \times \left(e_n \times \frac{\partial e_S}{\partial q_i} \right) \right] |e_S \times (e_n \times e_S)|^{-1} \end{aligned}$$

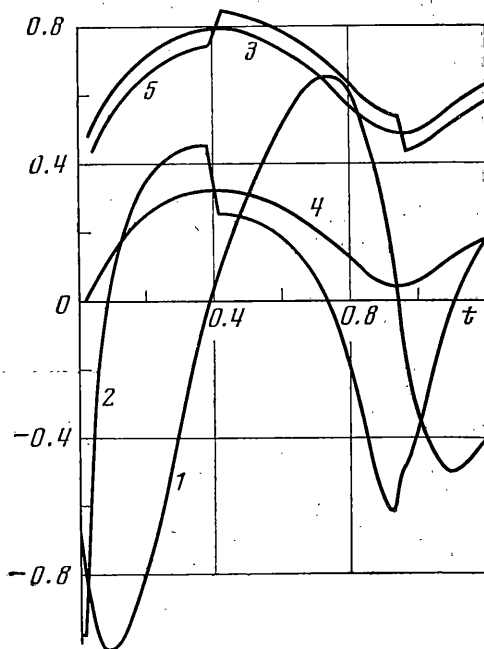
Здесь производные $dS/d\delta_S$, $dM_\beta/d\beta$, $dM_\gamma/d\gamma$ определяются из заданных силовых характеристик податливых элементов, e_{Si} — компонент вектора e_S , e_i — единичный вектор направления координатной оси q_i .

Таким образом, выражение (2.3) и примыкающие к нему формулы позволяют определить матрицу жесткости для любого положения опоры и возможного направления ее смещения. Аналогичным способом можно получить аналитические выражения матриц жесткости и для других схем амортизации.

3. При исследовании динамического столкновения движущейся модели с амортизирующими опорами и неподвижной произвольной преграды полученные решения применимы для определения сил реакции на опорах.



Фиг. 3



Фиг. 4

В этом случае движение модели удобно описать дифференциальными уравнениями в системе координат, связанной с корпусом модели (например, уравнения Эйлера – Лагранжа). В этой системе координат исходное смещение поверхности относительно j -й опоры за рассматриваемый отрезок времени Δt будет

$$I_j = (V_0 + \omega_0 \times r_j) \Delta t$$

Здесь V_0 и ω_0 – векторы поступательной и угловой скоростей модели (полюса O) в момент t , r_j – радиус-вектор j -й опоры в момент t .

При известных r_j и I_j определяется и матрица жесткости $D_p(r_j)$ (см. п. 2). На каждом шаге численного интегрирования поверхность преграды в окрестности точки контакта j -й опоры аппроксимируется касательной плоскостью. Критерием выбора шага интегрирования может служить неравенство $1 - n_k \cdot n_{k+1} < \epsilon$, где n_k и n_{k+1} – единичные векторы нормалей аппроксимирующих плоскостей для рассматриваемой опоры в смежных отрезки времени интегрирования, ϵ – некоторое малое число. Этим определены начальные условия контактного взаимодействия j -й опоры и плоскости, решение которого дано в п. 1.

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрен вертикальный удар модели о твердую поверхность полусферической формы. Расчетная модель представляет собой шар с четырьмя опорами, образованными упруго прикрепленными к нему жесткими стержнями. Амортизация удара происходит за счет упругих сил, вызванных угловыми отклонениями стержней, и сил контактного трения между опорами и поверхностью преграды.

Результаты расчетов представлены графиками следующих параметров (Фиг. 3, 4): y' [м/сек] (кривые 1) и y'' [м/сек²] (кривые 2) соответствуют $y''/10$ – вертикальные скорость и ускорение модели, α [рад] (кривые 3) – угол направления нормали к поверхности преграды в точке контакта опоры, β [рад] (кривые 4) – угол отклонения опорного стержня, γ [рад] (кривые 5) – угол направления вектора силы реакции P . При этом α , β и γ отсчитываются от вертикали. Шаг интегрирования $\Delta t = 0.001$ сек.

В случае отсутствия контактного трения ($\mu = 0$) результаты близки к идеальным (Фиг. 3), а именно: вектор P силы контактного взаимодействия опоры с поверхностью преграды направлен почти по нормали к поверхности ($|\alpha - \gamma| < 10^{-4}$), а скорость отскока модели (в момент $\beta = 0$) почти равна скорости до удара ($|\Delta y'| < 10^{-2}$).

На фиг. 4 представлены результаты расчета при коэффициенте контактного трения $\mu=0.05$. В этом случае модель как бы «прилипает» к сфере, совершая затухающее колебательное движение. При этом вектор \mathbf{P} силы контактного взаимодействия опоры с поверхностью преграды также совершает угловое колебание относительно нормали к поверхности, характеризуемое разностью углов $\alpha-\gamma$.

Поступила 18 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Хвостов В. Ф. Определение сил динамического взаимодействия амортизирующих опор твердого тела с преградой произвольной формы. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.