

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВОРОТА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА КОМПОНЕНТЫ ФУНКЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

В. Н. БРАНЕЦ, О. Б. ДЕМИДОВИЧ

(Москва)

Проводится исследование кинематического оптимального разворота; рассматривается задача оптимизации разворота по быстродействию, когда управляющей функцией является величина угловой скорости твердого тела. При этом предполагается, что область управления определена ограничениями на компоненты угловой скорости, причем соотношение между предельными значениями компонент предполагается произвольным.

Рассматривается случай двух равных компонент предельной скорости при произвольной третьей; проводится анализ допустимых движений и выполняется построение областей движений на сфере. Дается анализ отличия оптимального по времени разворота от времени разворота при управлении по компонентам кватерниона.

Приводятся сравнительные характеристики в функции от параметра соотношения предельных скоростей. Дан качественный анализ общего случая соотношений между предельными скоростями.

При управлении угловым положением твердого тела иногда используются компоненты кватернионов. В [1] проводилось исследование кинематического оптимального разворота. В частности, была рассмотрена задача оптимизации пространственного разворота по быстродействию, когда управляющей функцией являлась величина угловой скорости твердого тела.

Необходимым условием оптимальности, полученным на основании принципа максимума Понтрягина [2], было условие максимума функции Гамильтона на множестве функций управления. Анализ показал, что функция Гамильтона выражается через угловую скорость вращения (функцию управления¹) ω_e и сопряженный вектор управления $p_e(t)$

$$H_e = \frac{1}{2} \omega_e \cdot p_e$$

Очевидно, что множество функций управления ограничено. В [1] рассматривался случай управления при ограничениях на компоненты вектора угловой скорости $|\omega_{ei}| \leq \Omega_i$ ($i=1, 2, 3$), где Ω_i — величины максимально допустимых компонент угловой скорости.

Из условия максимума функции Гамильтона будем иметь

$$\omega_{ei} = \Omega_i \operatorname{sign}(p_{ei}) \quad (i=1, 2, 3)$$

Таким образом с учетом приводимых ниже гипотез движение может происходить с одной из 26 допустимых угловых скоростей (фиг. 1): ω_m ($m=1-8$), ω_{ei} ($i=1-12$), ω_{an} ($n=1-6$).

При исследовании использовались следующие гипотезы.

1. Если обращается в нуль какая-либо компонента p_{ei} , то соответствующая компонента скорости ω_i может принимать три значения: $+\Omega_i$, 0, $-\Omega_i$.

2. Требуемый пространственный разворот задает как минимум одно начальное значение сопряженного вектора управления p_e .

3. Вектор p_e считается двухзначным, но движение реализуется одним из двух значений вектора p_e , сохраняющимися во всем последующем движении.

Основываясь на этих исходных положениях, в [1] решалась задача для $\Omega_1 = -\Omega_2 = \Omega_3$, т. е. границей множества допустимых управлений являлся куб.

Целью данной работы является исследование более общего случая движения, когда граница множества допустимых управлений — параллелепипед.

Проведем качественное исследование задачи. В случае равных Ω_i в зависимости от начального положения p_{e0} при движении вектора p_e на сфере, описанной около куба, существуют восемь зон B_m и шесть зон A_n (фиг. 2).

Пусть $\Omega_1 = \Omega_2$ и $\Omega_1 < \Omega_3$. Тогда картина зон изменится. Из фиг. 3 видно, что на сфере существуют восемь зон B_m , шесть зон A_n и две зоны нового типа R_1 и R_2 .

Границами между зонами являются сепаратрисы, однако их вид также изменяется. Так как рассматривается случай двух равных Ω_i , то каждая из зон B_m касается одновременно двух координатных плоскостей. Изменяется также вид зон A_n .

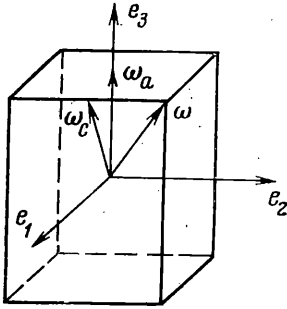
Зоны A_n , ограниченные сепаратрисами с четырьмя точками касания, назовем зонами первого типа, а зоны A_n , имеющие на границе две точки касания, — зонами второго типа.

¹ Подробнее см. [1].

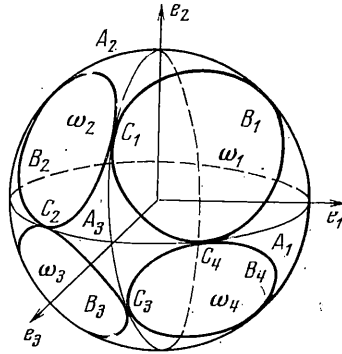
Кроме того, как указывалось, появились две новые зоны R_1 и R_2 . Движение в них выполняется с угловыми скоростями ω_m , которые меняются в процессе движения.

Если вектор управления p_{e0} находится на сепаратрисе, то, так же как и в случае равных Ω_i , имеем особые случаи движения. Согласно гипотезе (1) $\text{sign}(0)$ может принимать значения $+1, 0, -1$, таким образом возможны стационарные движения с угловыми скоростями ω_{cl} .

В зависимости от начального положения p_{e0} и суммарного угла вращения возможны следующие типы движений: стационарные вращения $\Lambda_z = \Lambda_m, \Lambda_z = \Lambda_{an}, \Lambda_z = \Lambda_{cl}$, простые вращения $\Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3, \Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4, \Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_1'$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Так же, как и в случае равных Ω_i , возможен замкнутый цикл, а при увеличении числа участков вращений вблизи центра зоны будем иметь скользящий режим, пределом которого является вращение с угловой скоростью ω_{an} .

Нетрудно заметить, что для зоны A_6 имеются те же типы движений. Аналогично рассматриваются зоны второго типа A_1, A_2, A_4, A_5 .

Для зоны R_1 будут следующие траектории: $\Lambda_z = \Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_z = \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_4$. Те же типы движений будут и для зоны R_2 .

При движении вектора p_e по сепаратрисе могут возникнуть траектории следующих типов: $\Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_{c1}, \Lambda_z = \Lambda_{c1} \Lambda_1, \Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_{c1} \Lambda_1', \Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_{c1} \Lambda_2, \Lambda_z = \Lambda_{c1} \Lambda_2 \Lambda_{c2}, \Lambda_z = \Lambda_1 \Lambda_{c1} \Lambda_2 \Lambda_{c2}$. Дальнейшее увеличение числа участков вращений зависит от соотношений между Ω_3 и Ω_1 , а также от суммарного угла вращения.

Аналогично получаются траектории сепаратрисы для зон второго типа.

При решении задачи использовался метод, изложенный в [1]. На сфере для каждого типа траектории строится ее область существования. Было показано, что области существования оптимальных траекторий покрывают всю сферу, т. е. при любом положении вектора p_{e0} можно указать траекторию, по которой выполняется разворот.

Так как условия максимума функции Гамильтона являются лишь необходимыми условиями оптимальности управления, то в некоторой точке на сфере могут существовать траектории нескольких типов, удовлетворяющих необходимым условиям; в этом случае из них необходимо выбрать наиболее короткую.

Заметим, что картины областей существования оптимальных траекторий для зон A_3 и A_6 будут одинаковы, так как типы движений для них одни и те же. То же самое можно сказать и о зонах A_1, A_2, A_4, A_5, R_1 и R_2 . Поэтому достаточно построить области существования оптимальных траекторий только для зон A_3, A_1 и R_1 . Картина областей зон A_3, R_1, R_2 и A_1 представлена на фиг. 4, 5. На фиг. 4 траектории $\Lambda_4 \Lambda_1, \Lambda_1 \Lambda_4, \Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_2 \Lambda_1$ обозначены соответственно 1, 2, 3, 4, а области $\Lambda_1 \Lambda_{c1} \Lambda_1, \Lambda_2 \Lambda_{c1} \Lambda_1, \Lambda_1 \Lambda_{c4} \Lambda_1, \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4, \Lambda_1 \Lambda_{c4} \Lambda_4, \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4, \Lambda_5 \Lambda_{c4} \Lambda_1$ обозначены $-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$, на фиг. 5 траектории $\Lambda_5 \Lambda_{c5} \Lambda_1, \Lambda_5 \Lambda_{c5}, \Lambda_5 \Lambda_{c5} \Lambda_5', \Lambda_1 \Lambda_4, \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_4, \Lambda_{c5} \Lambda_1 \Lambda_4, \Lambda_1 \Lambda_{c5} \Lambda_1, \Lambda_1 \Lambda_{c5} \Lambda_1 \Lambda_4$ обозначены соответственно 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, а области $\Lambda_1 \Lambda_{c5} \Lambda_1, \Lambda_5 \Lambda_{c5} \Lambda_5, \Lambda_5 \Lambda_{c5} \Lambda_1, \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_{c5} \Lambda_1 \Lambda_4, \Lambda_1 \Lambda_{c5} \Lambda_1 \Lambda_4 \Lambda_{c5} \Lambda_4$ обозначены $-\lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}$.

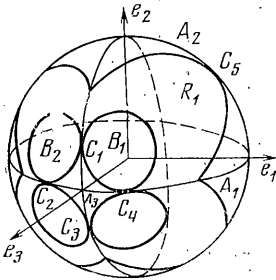
Рассмотрим вопрос об изменении зон и областей существования оптимальных траекторий при различных максимально допустимых угловых скоростях.

Пусть $(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)^{1/2} = 1$ и $\Omega_1 = \Omega_2$. Обозначим $\Omega_1 / \Omega_2 = k$. Проведем анализ для различных значений $k \neq 1$. Следует выделить два случая: $0 < k < 1$ и $k > 1$, которые и будут исследованы ниже. (Случай $k = 1$ подробно рассмотрен в [1].)

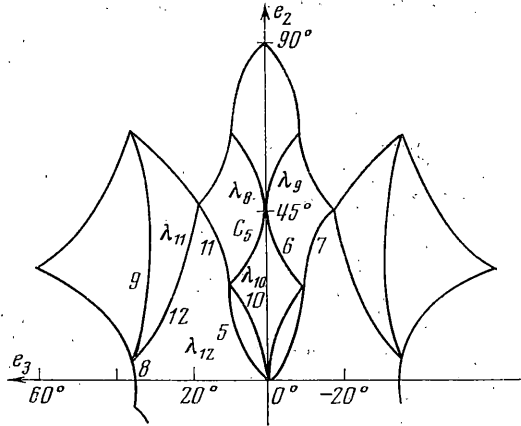
Пусть k изменяется в интервале $0 < k < 1$. При уменьшении k от 1 до 0 точки C_i ($i=1, 2, 3, 4$) (фиг. 3) будут двигаться на сфере к точке A_3 , в то время как точки C_5, C_8 останутся неподвижными.

Величина зон B_1, B_2, B_3, B_4 , а также расположенной между ними зоны A_3 будет уменьшаться. При $k \rightarrow 0$ все эти зоны стягиваются в точку.

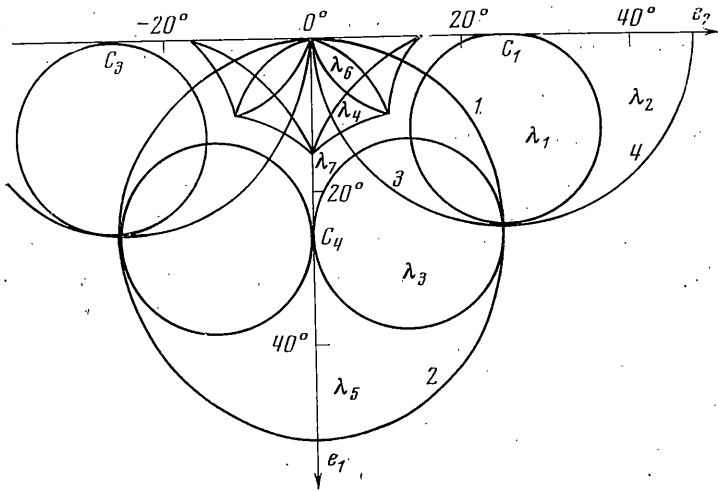
Зона R_1 будет расти, а зона A_1 уменьшаться, стягиваясь в дугу при $k \rightarrow 0$. Изменение структуры и конфигурации зон влечет за собой изменение областей существования оптимальных траекторий. При $k=1$ существуют только зоны B_m и зоны A_n



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

первого типа. При $k < 1$ зона A_3 остается зоной первого типа и поэтому картина областей для нее сохраняется, уменьшаясь только в размере (фиг. 4)¹.

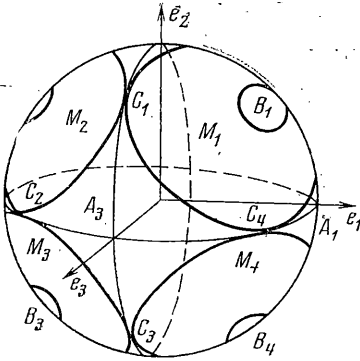
В отличие от зоны A_3 зона A_1 становится зоной второго типа (она ограничена сепаратрисой с двумя точками C_1 и при $k \rightarrow 0$ стягивается в дугу). На фиг. 5 представлена картина областей существования оптимальных траекторий для зон A_1, R_1 и R_2 при $k=1/2$. Как видно на фигуре, траектории самой зоны A_1 исчезли и всю зону покрывают траектории сепаратрисы и зон R_1 и R_2 . Например, пропадает траектория $\lambda_5 A_1$, а вместо нее появляется траектория $\lambda_5 A_{C_5} A_1$ (обозначенная цифрой 5).

¹ В силу симметрии на фиг. 4, 5 дана картина областей для половины зон A_i и A_3 .

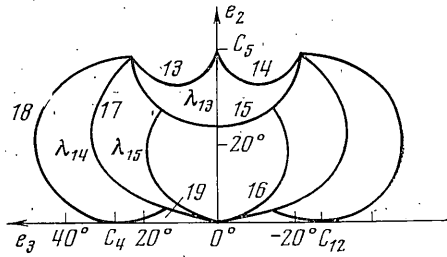
Изменяется область $\Lambda_5\Lambda_{c5}\Lambda_5'$ (λ_9). Ее границами являются траектории: $\Lambda_5\Lambda_{c5}$ (6) (которая стала короче, так как максимальный угол поворота $\Phi_5 < \pi$), $\Lambda_{c5}\Lambda_5$, а также траектория $\Lambda_5\Lambda_{c5}\Lambda_5'$ (7) (здесь угол Φ_5 равен предельному) и траектория $\Lambda_5'\Lambda_{c5}\Lambda_5$.

Траектория $\Lambda_1\Lambda_4$ (8) стала короче и уже не проходит через центр зоны A_1 . Возникает траектория $\Lambda_2\Lambda_1\Lambda_4$ (9), которая является одной из границ области $\Lambda_2\Lambda_1\Lambda_{c5}\Lambda_1\Lambda_4$ (λ_{11}). Появляется область $\Lambda_1\Lambda_{c5}\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_{c8}\Lambda_4$ (λ_{12}) с границами: $\Lambda_1\Lambda_4$ (8), $\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_{c8}\Lambda_4$, $\Lambda_4\Lambda_{c8}\Lambda_4$, $\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_{c8}$, $\Lambda_{c5}\Lambda_1\Lambda_4$ (10), $\Lambda_1\Lambda_{c5}\Lambda_1$ (11), $\Lambda_1\Lambda_{c5}\Lambda_1\Lambda_4$ (12).

В точке A_1 граница $\Lambda_{c5}\Lambda_1\Lambda_4$ (10) при $\Phi_1 = \Phi_4$ переходит в траекторию $\Lambda_5\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_{c8}$, которая представляет собой точку, и далее следует траектория $\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_{c8}$.



Фиг. 6



Фиг. 7

При $k \rightarrow 0$ точка C_4 стремится к A_3 , области $\Lambda_1\Lambda_{c5}\Lambda_1$ (λ_8), $\Lambda_5\Lambda_{c5}\Lambda_1$ уменьшаются, стягиваясь к дуге, а области $\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_{c8}\Lambda_4\Lambda_8$, $\Lambda_1\Lambda_{c5}\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_{c8}\Lambda_4$ растут. При $k \rightarrow 0$ области двух последних типов занимают почти всю сферу.

Перейдем к анализу случая $k > 1$. С ростом k зона A_3 (фиг. 6) увеличивается, и точки C_i ($i=1, 2, 3, 4$) движутся от центра A_3 .

Зона A_1 ограничена сепаратрисами с точками C_4, C_{12} , которые при увеличении k движутся к центру A_1 ; таким образом зона A_1 стягивается в точку при $k \rightarrow \infty$. Поскольку предельный вид зоны изменился по сравнению со вторым типом, назовем эти зоны зонами третьего типа. Вместо зон R_1 и R_2 появились четыре зоны M (фиг. 6), но типы движений для зон R_i ($i=1, 2$) и M одинаковы.

Картина областей существования оптимальных траекторий для A_1 и M представлена на фиг. 7. Видно, что всю зону покрывают траектории сепаратрисы. На фиг. 7 траектории $\Lambda_{c5}\Lambda_1, \Lambda_5\Lambda_{c5}, \Lambda_5\Lambda_1, \Lambda_5\Lambda_1\Lambda_{c4}, \Lambda_1\Lambda_{c4}\Lambda_1, \Lambda_{c4}\Lambda_1, \Lambda_1\Lambda_{c4}\Lambda_1$ обозначены соответственно 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, а области $\Lambda_5\Lambda_{c5}\Lambda_1, \Lambda_1\Lambda_{c4}\Lambda_1, \Lambda_5\Lambda_1\Lambda_{c4}\Lambda_1 - \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}$.

Область $\Lambda_1\Lambda_{c5}\Lambda_1$ уменьшилась, а у области $\Lambda_1\Lambda_{c4}\Lambda_1$ (λ_{14}) появилась новая граница (17), так как первый угол поворота $\Phi_1 < \pi$. При $k \rightarrow \infty$ все области уменьшаются и стягиваются в точку.

Зона A_3 остается зоной первого типа и картина областей для нее остается такой же, только увеличивается в размерах.

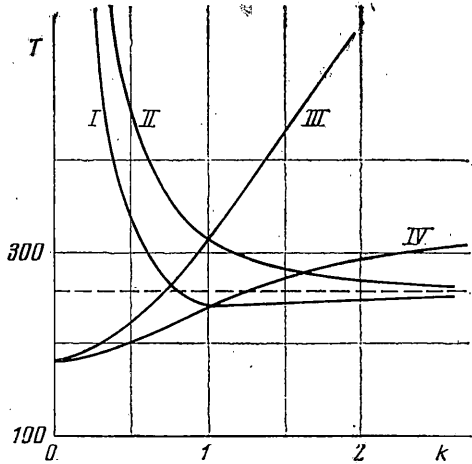
Таким образом, при изменениях k внутри интервалов $0 < k < 1$ и $1 < k < \infty$, т. е. для зон одного типа картина областей существования оптимальных траекторий качественно не меняется, изменяются только размеры и форма областей. Разрывы линии границ областей, а также возникновение новых границ и областей имеет место лишь при переходе через $k=1$, т. е. когда меняется тип зоны.

Области существования траекторий зон A_1, A_2, A_4, A_5 непрерывно переходят в области зон A_3, R_1, R_2, A_6 , т. е. области существования оптимальных траекторий покрывают всю сферу.

В центре зоны A_3 наряду с областями простых траекторий существуют траектории сепаратрисы. Численный анализ показал, что наиболее «короткими» из всех этих траекторий являются траектории, состоящие из меньшего числа участков.

Проанализируем время выполнения разворота с целью сравнения оптимального управления с управлением по компонентам кватерниона.

В точках ω_n и ω_{c1} оптимальное управление совпадает с управлением по компонентам кватерниона. В остальных случаях оптимальное управление «короче». Разность между временем разворота по оптимальным траекториям и при управлении по компонентам кватерниона растет по мере роста угла суммарного разворота и достигает максимума для $\Phi_2 = \pi$ в точках A_n .



Фиг. 8

На фиг. 8 для различных значений k построены графики времени разворота на угол π при оптимальном управлении и при управлении по компонентам кватерниона для центра зон A_n . Кривые I и IV соответствуют времени разворота при оптимальном управлении для зон A_1 и A_3 ; кривые II и III соответствуют времени разворота при управлении по компонентам кватерниона для зон A_1 и A_3 .

Из графиков видно, что для зоны A_3 при $k > 1$ время разворота при управлении по компонентам кватерниона резко возрастает с ростом k . Уже для $k=2$ управление по компонентам кватерниона существенно хуже оптимального (время разворота возрастает в 1.9 раза).

В случае $k \rightarrow \infty$ фактически происходит вырождение управления, так как при этом $\Omega_3 \rightarrow 0$, т. е. становится необходимым управлять по двум угловым скоростям. Нетрудно заметить, что если имеются только две угловые скорости, то при управлении по компонентам кватерниона нельзя осуществить разворот вокруг третьей оси, тогда как при оптимальном управлении такой разворот возможен и время разворота ограничено.

Перейдем к общему случаю ограничения на компоненты угловой скорости, когда все угловые скорости различны. Пусть для определенности $\Omega_1 > \Omega_2$, $\Omega_2 > \Omega_3$. На фиг. 9 показана картина зон для этого случая. Так же, как и в первых двух случаях, на сфере существуют зоны B_m , A_n , R_k , M_l . Однако зоны A_n первого типа исчезли, остались лишь зоны A_n второго и третьего типа.

При уменьшении Ω_3 до 0 зоны третьего типа стягиваются в точку, а зоны второго типа «сужаются» до своего предельного значения и величина их зависит от соотношения между Ω_1 и Ω_2 .

Таким образом, если при переходе от случая $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$ к случаю $\Omega_1 = \Omega_2$ при изменяющемся Ω_3 характер зон претерпел качественные изменения, то переход к общему случаю новой картины не дал. Поскольку характер движений для каждой зоны известен, то для любых соотношений между Ω_i качественно известна вся картина движений и справедливы изложенные выше результаты.

Поступила 10 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.