

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ  
С ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

И. П. ЛЫСЫЙ

(Львов)

Рассматривается задача теплопроводности и термоупругости для полосы с поперечной трещиной. Предполагается, что на ее берегах заданы температура или тепловой поток, а на свободной от внешних усилий гранях полосы поддерживается нулевая температура. Трещина имитируется непрерывно распределенными источниками тепла, плотность которых определяется из сингулярного интегрального уравнения. Получено фундаментальное решение задачи термоупругости и определены коэффициенты интенсивности напряжений.

1. Пусть в упругой бесконечной полосе шириной  $2d$  имеется центральная поперечная трещина длиной  $2l$ . Выберем систему координат  $xoy$  с началом в центре трещины, направив ось  $ox$  вдоль трещины, а ось  $oy$  параллельно граням полосы. Предположим, что на гранях полосы поддерживается нулевая температура, а на берегах трещины заданы температура или тепловой поток, направленный в противоположные стороны.

Введем безразмерные координаты, отнесенные к величине  $l$ , а также безразмерную длину трещины  $\delta = l/d$ , отнесенную к ширине полосы. Тогда граничные условия для температурного поля запишутся в виде

$$t\left(\pm \frac{1}{\delta}, y\right) = 0 \quad (|y| < \infty), \quad t(x, \pm 0) = f(x) \quad \text{или} \quad \frac{\partial t(x, \pm 0)}{\partial y} = \pm q(x) \quad (|x| < 1) \quad (1.1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что искомое температурное поле  $t(x, y)$  симметрично относительно оси  $ox$ .

Для решения поставленной задачи теплопроводности будем имитировать трещину непрерывно распределенными источниками тепла с неизвестной плотностью  $\gamma(x)$ . Тогда температурное поле в полосе определится по формуле

$$t(x, y) = \int_{-1}^1 \gamma(\xi) t_u(\xi, x, y) d\xi \quad (1.2)$$

Здесь  $t_u(\xi, x, y)$  — температура, обусловленная наличием в точке полосы источника тепла единичной мощности. Согласно [1] имеем

$$t_u = \frac{1}{4\pi\lambda} \ln \frac{\operatorname{ch}^{1/2}\pi\delta y + \cos^{1/2}\pi\delta(x+\xi)}{\operatorname{ch}^{1/2}\pi\delta y - \cos^{1/2}\pi\delta(x-\xi)}$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности полосы. Подставляя выражение (1.2) в граничные условия (1.1), для определения функции  $\gamma(x)$  получим следующие интегральные уравнения:

$$\int_{-1}^1 \gamma(\xi) \ln \left| \frac{\cos^{1/4}\pi\delta(x+\xi)}{\sin^{1/4}\pi\delta(x-\xi)} \right| d\xi = 2\pi\lambda f(x)$$

$$\int_{-1}^1 \gamma(\xi) \delta(\xi-x) d\xi = -2\lambda q(x) \quad (1.3)$$

где  $\delta(\xi-x)$  — дельта-функция Дирака. Из второго уравнения в (1.3) следует, что при заданном на берегах трещины тепловом потоке плотность источников тепла  $\gamma(x) = -2\lambda q(x)$ .

Для решения уравнения (1.3) сделаем замену переменных

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4} \pi \delta \xi = \frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4} \pi \delta x = \frac{1+\eta}{1-\eta}$$

В результате получим

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma_*(\tau) \ln \left| \frac{\tau-\eta}{\tau+\eta} \right| d\tau = -f_*(\eta) \quad (1.4)$$

$$a = \frac{\operatorname{tg}^{1/4} \pi \delta + 1}{\operatorname{tg}^{1/4} \pi \delta - 1}, \quad b = \frac{1}{a}, \quad \gamma_*(\tau) = \frac{\gamma(\xi) \operatorname{ch}^{2/4} \pi \delta \xi}{(1-\tau)^2}, \quad f_*(\eta) = \frac{1}{4} \pi \lambda \delta f(x)$$

Продифференцируем обе части уравнения (1.4) по  $\eta$ , а затем применим формулу обращения интеграла типа Коши [2]. Тогда найдем

$$\gamma_*(\eta) = \frac{1}{X(\eta)} \left[ C - \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{\tau X(\tau) f_*'(\tau) d\tau}{\tau^2 - \eta^2} \right], \quad X(\tau) = \sqrt{(a^2 - \tau^2)(\tau^2 - b^2)} \quad (1.5)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. После соответствующих вычислений имеем

$$C = \frac{b}{K(g)} \int_a^b \left[ \frac{b f_*(w)}{K(b/a)} + \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{\tau X(\tau) f_*'(\tau)}{\tau^2 - w^2} d\tau \right] \frac{dw}{X(w)}, \quad g = \sqrt{1 - a^4} \quad (1.6)$$

где  $K(g)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

В качестве примера рассмотрим случай, когда на берегах трещины задана постоянная температура  $T_0$ , а грани полосы поддерживаются при нулевой температуре. Тогда

$$\gamma(x) = \frac{\pi \lambda \delta T_0 \cos^{2/4} \pi \delta (1 + \operatorname{tg}^{1/4} \pi \delta)^2}{2K(b/a) \sqrt{\sin^{2/4} \pi \delta - \sin^{2/4} \pi \delta x}} \quad (1.7)$$

2. Определим коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленных температурным полем (1.2), когда грани полосы и берега трещины свободны от внешних усилий. В данном случае, вследствие симметрии напряженного состояния относительно линии расположения трещины коэффициент  $k_2 = 0$ , а  $k_1$  определяется по формуле

$$k_1 = l \int_{-1}^1 k_1^*(x) \sigma_{yy}(x) dx \quad (2.1)$$

Здесь  $k_1^*(x)$  — функция Грина для коэффициента интенсивности напряжений, обусловленных приложенными в точке  $\xi = x$  равными и противоположно направленными нормальными единичными сосредоточенными силами;  $\sigma_{yy}$  — нормальные напряжения на линии трещины в сплошной полосе, обусловленные распределенными на отрезке  $[-1, 1]$  с плотностью  $\gamma(\xi)$  источниками тепла. Эти напряжения выражаются по формуле

$$\sigma_{yy} = \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \sigma_{yy}^{(u)}(\xi - x) d\xi \quad (2.2)$$

где  $\sigma_{yy}^{(u)}$  — напряжения от теплового источника единичной интенсивности, расположенного в точке  $(\xi, 0)$  оси  $ox$ . Известно [1], что

$$\sigma_{yy}^{(u)} = \frac{BG}{2\pi} \left\{ \ln \left| \frac{\sin W_-(\xi)}{\cos W_+(\xi)} \right| + \right. \quad (2.3)$$

$$+ \int_0^{\infty} \left[ \frac{(\xi_1 N_1(\xi) - N_2(\xi)) [N_2(x) - x_1 N_1(x) - 4/\eta \operatorname{ch}^{1/2} \eta \operatorname{ch}^{1/2} \eta x_1]}{M_+(\eta) \operatorname{ch}^{2 1/2} \eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\xi_1 N_2(\xi) - N_1(\xi)) [N_1(x) - x_1 N_2(x) - 4/\eta \operatorname{sh}^{1/2} \eta \operatorname{sh}^{1/2} \eta x_1]}{M_-(\eta) \operatorname{sh}^{2 1/2} \eta} \right] d\eta \left. \right\}$$

$$W_{\mp}(\xi) = 1/4 \pi \delta(\xi \mp x), \quad N_1(\xi) = \operatorname{ch}^{1/2} \eta \operatorname{sh}^{1/2} \eta \xi_1, \quad N_2(\xi) = \operatorname{sh}^{1/2} \eta \operatorname{ch}^{1/2} \eta \xi_1$$

$$\xi_1 = \xi \delta, \quad x_1 = x \delta, \quad M_{\pm}(\eta) = 2/\eta (\operatorname{sh} \eta \pm \eta), \quad B = [(1+\nu)\alpha_t]/[\lambda(1-\chi)]$$

где  $\alpha_t$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $G$  — модуль сдвига;  $\chi = \nu$  для плоской деформации,  $\chi = 0$  для плоского напряженного состояния;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

В случае симметричного нагружения противоположных берегов трещины коэффициенты интенсивности напряжений легко найти через производную от смещения  $v(x)$  верхнего берега по формуле

$$k_{1\mp} = \mp \frac{E\sqrt{\pi l}}{2(1-\chi^2)} \lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-x^2} \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad (2.4)$$

где  $E$  — модуль упругости. Здесь и в дальнейшем в формулах для коэффициентов интенсивности напряжений верхний знак соответствует правому, а нижний — левому концам трещины.

Введем функцию напряжений  $F$ , которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0 \quad (2.5)$$

Применяя к (2.5) интегральное преобразование Фурье и учитывая граничные условия

$$\sigma_{xx}(\pm 1/\delta, y) = \sigma_{xy}(\pm 1/\delta, y) = \sigma_{xy}(x, 0) = 0$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\sigma_{0yy}(x, 0) \quad \text{при } |x| < 1, \quad v(x, 0) = 0 \quad \text{при } |x| \geq 1$$

для определения  $v'(x)$  получим сингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-1}^1 \frac{v'(\xi) d\xi}{\xi - x} - \int_{-1}^1 v'(\xi) R(x, \xi) d\xi = \frac{2\pi}{A} \sigma_{0yy}(x, 0), \quad A = \frac{E'}{1-\chi^2} \quad (2.6)$$

$$R(x, \xi) = \int_{-1}^{\infty} \left\{ \delta \operatorname{sh} \eta \delta (x - \xi) \left( 2 - \frac{\eta^2 + 2 \operatorname{ch}^2 \eta}{\eta + \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta} \right) + \delta^2 \eta \operatorname{ch} \eta \delta (x - \xi) \times \right.$$

$$\left. \times \left[ x - \xi - \frac{(x - \xi) \operatorname{ch}^2 \eta - \xi}{\eta + \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta} \right] + \frac{\delta^3 \eta \xi x \operatorname{sh} \eta \delta (x - \xi)}{\eta + \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta} \right\} d\eta$$

Решение уравнения (2.6) можно найти асимптотическим методом в виде ряда по степеням  $\delta$  [3]. Найдем фундаментальное решение уравнения (2.6). С этой целью запишем правую часть через дельта-функцию

$$\int_{-1}^1 \frac{v'(\xi) d\xi}{\xi-x} = \frac{2\pi}{A} \frac{\delta(s-x)}{l} + \int_{-1}^1 v'(\xi) R(x, \xi) d\xi \quad (2.7)$$

и решение уравнения (2.6) будем искать в виде следующего ряда:

$$v'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{2n} v_n'(x), \quad R(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x, \xi) \delta^{2n} \quad (2.8)$$

Функции  $R_n(x, \xi)$  определяются соотношениями

$$R_n(x, \xi) = \frac{2n+1}{(2n-1)!} (x-\xi)^{2n-1} a_{2n-1} + \frac{\xi(x-\xi)^{2n-2}}{(2n-2)!} b_{2n-1} + \\ + \frac{\xi(x-\xi)^{2n-3}}{(2n-3)!} b_{2n-1} - \frac{(x-\xi)^{2n-1}}{(2n-1)!} b_{2n+1} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

$$a_n = \int_0^{\infty} \eta^n \left( 1 - \frac{\text{ch}^2 \eta}{\eta + \text{sh} \eta \text{ ch} \eta} \right) d\eta, \quad b_n = \int_0^{\infty} \frac{\eta^n d\eta}{\eta + \text{sh} \eta \text{ ch} \eta}$$

Подставим (2.8) и (2.9) в уравнение (2.7), приравняем выражения при одинаковых степенях  $\delta$  и применим к полученной системе уравнений формулу обращения интеграла типа Коши. В результате для определения  $v'(x)$  получим следующие рекуррентные соотношения:

$$v_0'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[ C - \frac{2\sqrt{1-s^2}}{Al(s-x)} \right] \\ v_n'(x) = -\frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-x} d\tau \sum_{k=0}^{n-1} R_{n-k}(\tau, \xi) v_k'(\xi) d\xi \quad (2.10)$$

Произвольная постоянная  $C$  определяется из условия  $v(\pm 1) = 0$ , из которого следует  $C = 0$ .

Из (2.8) и (2.10) находим значение для  $v'(x)$ , в котором ограничимся членами порядка  $\delta^4$  (в связи с громоздкостью выражений)

$$v'(x) = -\frac{2\sqrt{1-s^2}}{A\pi l \sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{1}{s-x} + \varepsilon_1 x \delta^2 + \right. \\ \left. + [\varepsilon_2 s + \varepsilon_3 (s^2-1)x - 2\varepsilon_2 s x^2 + 3\varepsilon_3 x^3] \delta^4 + O(\delta^6) \right\} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_1 = 3a_1 - b_1 - b_3, \quad \varepsilon_2 = {}^5/4 a_3 - b_3^{-1/4} b_5, \quad \varepsilon_3 = {}^5/6 a_3^{-1/2} b_3^{-1/6} b_5$$

Коэффициенты  $a_n, b_n$  равны  $a_1 = 0.2734$ ,  $a_3 = 1.9971$ ,  $b_1 = 0.7685$ ,  $b_3 = 1.2415$ ,  $b_5 = 6.9411$ . После подстановки выражения (2.11) в формулу (2.4) получим

$$k_1^*(\pm l, s) = -\sqrt{\frac{1-s^2}{\pi l}} \left\{ \frac{1}{1 \mp s} - \varepsilon_1 \delta^2 - [\mp \varepsilon_2 s + \varepsilon_3 (s^2+2)] \delta^4 + O(\delta^6) \right\} \quad (2.12)$$

При помощи формул (2.1) (2.12) можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений в полосе с поперечной трещиной, когда на ее берегах заданы произвольные нормальные усилия. Сначала найдем эти коэффициенты, когда к берегам трещины приложена нагрузка (2.3). С этой целью запишем выражение (2.3) в виде

$$\sigma_{yy}^{(u)}(\xi, x) = \frac{BG}{2\pi} [\varphi_1(\xi, x) + \varphi_2(\xi, x)] \quad (2.13)$$

$$\varphi_1(\xi, x) = \ln \left| \frac{\sin^{1/4} \pi (\xi - x) \delta}{\cos^{1/4} \pi (\xi + x) \delta} \right| = \ln \left| \frac{1}{4} \pi (\xi - x) \delta \right| -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} e_n \delta^{2n} [(\xi - x)^{2n} - (2^{2n} - 1)(\xi + x)^{2n}]$$

где  $\varphi_2(\xi, x)$  — регулярная часть выражения (2.3), которую после разложения в ряд по степеням  $\delta$  можно записать следующим образом:

$$\varphi_2(\xi, x) = c_1 + (\xi^2 c_2 + x^2 c_3 + \xi x c_4) \delta^2 +$$

$$+ [\xi^2 (\xi^2 + 6x^2) c_5 + x^4 c_6 + \xi x^3 c_7 + \xi^3 x c_8] \delta^4 + O(\delta^6) \quad (2.14)$$

$$e_n = \frac{\pi^{2n} |B_{2n}|}{2^{2n+1} n (2n)!}, \quad c_1 = 4 \int_0^{\infty} \frac{\text{th}^{1/2} \eta L_1(\eta)}{\eta M_+(\eta)} d\eta, \quad c_2 = -2 \int_0^{\infty} \frac{L_1^2(\eta) d\eta}{M_+(\eta)}$$

$$c_3 = \int_0^{\infty} \frac{\eta \text{th}^{1/2} \eta L_2(\eta) d\eta}{M_+(\eta)}, \quad c_4 = -3 \int_0^{\infty} \frac{L_3(\eta) L_4(\eta) d\eta}{M_-(\eta)}$$

$$c_5 = -\frac{1}{12} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 L_1(\eta) L_2(\eta) d\eta}{M_+(\eta)}$$

$$c_6 = \frac{1}{32} \int_0^{\infty} \frac{\eta^3 \text{th}^{1/2} \eta [^{1/12} \text{th}^{1/2} \eta - 1]}{M_+(\eta)} d\eta$$

$$c_7 = \frac{5}{24} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 L_3(\eta) [^{1/10} \text{cth}^{1/2} \eta - 1]}{M_-(\eta)} d\eta, \quad c_8 = -\frac{3}{8} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 L_4^2(\eta) d\eta}{M_-(\eta)}$$

$$L_1 = 1 - ^{1/4} \eta \text{th}^{1/2} \eta, \quad L_2 = 1 - ^{1/8} \eta \text{th}^{1/2} \eta$$

$$L_3 = 1 - ^{1/2} \eta \text{cth}^{1/2} \eta, \quad L_4 = 1 - ^{1/6} \eta \text{cth}^{1/2} \eta$$

где  $B_{2n}$  — числа Бернулли. После подстановки выражений (2.13), (2.14) в формулу (2.1) и вычисления интегралов найдем

$$k_1(\xi) = ^{1/2} B G \sqrt{U} / \pi [k_{11}(\xi) + k_{12}(\xi)] \quad (2.15)$$

$$k_{11}(\xi) = \pm \xi - \ln ^{1/8} \pi \delta + [^{1/2} \varepsilon_1 (\ln ^{1/8} \pi \delta - g_1(\xi)) - 2 \varepsilon_1 (g_2(\xi) \pm 2\xi)] \delta^2 +$$

$$+ [^9/8 \varepsilon_3 (\ln ^{1/8} \pi \delta - ^{5/12} + ^{2/3} \xi^2 + ^{2/9} \xi^3) \pm \varepsilon_2 \xi (^{1/3} \xi^2 - ^{1/2}) +$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_1 g_3(\xi) - \varepsilon_2 (14g_4(\xi) \pm 24\xi \pm 32\xi)] \delta^4 + O(\delta^6)$$

$$k_{12}(\xi) = -c_1 + (^{1/2} \varepsilon_1 c_1 - \xi^2 c_2 - ^{1/2} c_3 \mp ^{1/2} \xi c_4) \delta^2 +$$

$$+ [^9/8 c_1 \varepsilon_3 + ^{1/2} \varepsilon_1 (c_2 \xi^2 + ^{1/4} c_3) - \xi^2 (\xi^2 + 3) c_5 - ^{3/8} c_6 \mp ^{1/2} \xi (c_7 + \xi^2 c_8)] \delta^4 + O(\delta^6)$$

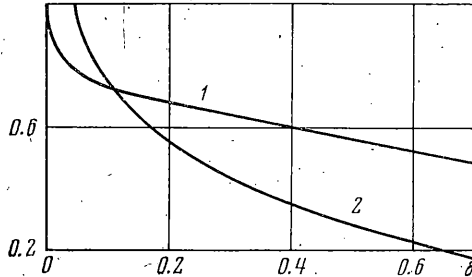
$$g_1(\xi) = ^{1/2} - \xi^2, \quad g_2(\xi) = g_1(\xi) + 2\xi^2, \quad g_3(\xi) = g_2(\xi) + ^{1/2}, \quad g_4(\xi) = ^{3/8} + 3\xi^2 + \xi^4$$

Коэффициенты  $e_n$  и  $c_n$  будут равны  $e_1=0.1028$ ,  $e_2=0.0003$ ,  $c_1=0.8225$ ,  $c_2=-0.8008$ ,  $c_3=0.7367$ ,  $c_4=1.262$ ,  $c_5=-0.0579$ ,  $c_6=0.3559$ ,  $c_7=0.8156$ ,  $c_8=-1.2231$ .

Когда источники тепла размещены в полосе с плотностью  $\gamma(\xi)$ , то

$$k_1 = \frac{1}{2} BG \sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) [k_{11}(\xi) + k_{12}(\xi)] d\xi \quad (2.16)$$

Если на берегах трещины задана температура, то формулу (2.16) можно представить еще в другом, более удобном для вычислений виде.



С этой целью исключим в (2.2) логарифмическую часть ядра, воспользовавшись выражениями (1.3) и (2.3); в результате будем иметь

$$\sigma_{yy}(x) = BG \left[ -\lambda f(x) + \frac{1}{2} \pi^{-1} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \varphi_2(\xi, x) d\xi \right]$$

После подстановки этого выражения в формулу (2.1) найдем

$$k_1 = -BG\lambda \int_{-1}^1 k_1^*(x) f(x) dx + \frac{1}{2} BG \sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_{-1}^1 k_{12}(x) \gamma(x) dx \quad (2.17)$$

Рассмотрим пример. Пусть на берегах трещины задана постоянная температура  $T_0$  (задача 1) или постоянный тепловой поток  $-q_0$ , направленный в противоположные стороны (задача 2). Тогда для первой задачи  $\gamma(x)$  определяется по формуле (1.17), а для второй задачи имеем  $\gamma(x) = 2\lambda q_0$ . После подстановки этих значений  $\gamma(x)$  в формулы (2.16) и (2.17) находим значения коэффициентов интенсивности напряжений  $k_1^{(1)}$  и  $k_1^{(2)}$ .

На фигуре представлены зависимости  $k_1^{(1)}/BG\lambda T_0 \sqrt{\pi l}$  (кривая 1) и  $k_1^{(2)}/BG\lambda q_0 \sqrt{\pi l}$  (кривая 2) от безразмерной величины  $\delta = l/d$ . Из графиков видно, что коэффициенты интенсивности напряжений уменьшаются с ростом  $\delta$ .

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила 23 VII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
3. Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л. Центральная поперечная трещина в упругой полосе. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.