МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1977

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНКЕ, РАБОТАЮЩЕЙ НА ИЗГИБ

Н. В. БАНИЧУК

(Москва)

Исследуется изгиб упругой бесконечной пластинки с отверстием. Изучается влияние формы отверстия на напряженное состояние материала пластинки. Формулируется задача оптимизации, заключающаяся в отыскании формы отверстия, для которого реализуется минимум максимального (по области, занимаемой материалом) значения второго инварианта девиатора тензора напряжений. Для данной минимаксной задачи выводится необходимое и достаточное условие оптимальности и определяется форма отверстия. Показывается, что при изгибе пластинки с оптимальным отверстием средняя кривизна нейтральной поверхности постоянна. Максимальное же значение минимизируемого функционала в этом случае не достигается во внутренних точках области, занимаемой пластинкой, и, следовательно, пластические деформации (принимается критерий пластичности Мизеса) при изгибе впервые возникают на границах отверстий. Отметим, что для ряда плоских задач теории упругости формы отверстий с равнонапряженными границами найдены в [1–3].

1. Приведем основные уравнения, описывающие изгиб упругой бесконечной пластинки с отверстием, и сформулируем задачу оптимизации. Обозначим через G в плоскости xy двусвязную область, занимаемую материалом пластинки, а через Γ — границу отверстия. Наряду с прямоугольной системой координат xy будем использовать ортогональные координаты nt, связанные с контуром и отсчитываемые соответственно в нормальном и касательном направлениях к границе отверстия. Предполагается, что контур отверстия не содержит угловых точек. Для изгибающих моментов и перерезывающих сил в системах координат xy и nt используются общепринятые обозначения M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y и M_n, M_t, M_{nt}, N_n, N_t. Пластинка изгибается моментами $M_x^\infty\geqslant0$, $M_y^\infty\geqslant0$, $M_{xy}^\infty=0$, приложенными в бесконечно удаленных точках, а контур отверстия свободен от нагрузок.

Функция прогибов $w=w(x, y)$ в предположении об отсутствии внешних поперечных сил удовлетворяет бигармоническому уравнению (Δ^2 — бигармонический оператор)

$$\Delta^2 w=0, \qquad (x, y)\in G \tag{1.1}$$

Граничные условия, отвечающие предположению об отсутствии нагрузок на контуре отверстия, в точной формулировке записываются в виде

$$M_n=0, \quad M_{nt}=0, \quad N_n=0, \qquad (x, y)\in\Gamma \tag{1.2}$$

Изгибающие моменты и перерезывающие силы связаны с функцией прогибов w следующими соотношениями (см., например, [4, 5]):

$$\begin{gathered}M_x=-D(w_{xx}+\nu w_{yy}), \qquad M_y=-D(w_{yy}+\nu w_{xx}), \qquad M_{xy}=-D(1-\nu)w_{xy}\\ N_x=-D(\Delta w)_x, \qquad N_y=-D(\Delta w)_y, \qquad D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]\end{gathered} \tag{1.3}$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластинки.

В общем случае одно из условий (1.2), как известно (см. [4]), является лишним. Здесь имеется в виду то обстоятельство, что для отверстия произвольной формы решение уравнения (1.1) не может одновременно удовлетворять всем трем указанным условиям. Поэтому в технической теории пластин используется приближенная формулировка граничных условий в виде двух равенств $M_n=0$, $N_n+\partial M_{nt}/\partial s=0$.

Решение же краевой задачи с этими условиями приводит к искажению полей напряжений у краев отверстий. Важно отметить, что, как будет показано ниже, для отверстий оптимальной формы удается удовлетворить всем трем граничным условиям (1.2). Ниже при исследовании задачи оптимизации будут использоваться условия $M_n=0$, $M_{nt}=0$, а условие $N_n=0$ в случае отверстия оптимальной формы окажется выполненным автоматически.

Если функция прогибов $w(x, y)$ найдена как решение краевой задачи (1.1), (1.2) с дополнительными условиями на бесконечности и тем самым в силу соотношений (1.3) известны моменты и перерезывающие усилия, то отличные от нуля компоненты тензора напряжений подсчитываются по формулам

$$\sigma_x=12\xi M_xh^{-3},\qquad \sigma_y=12\xi M_yh^{-3},\qquad \tau_{xy}=12\xi M_{xy}h^{-3}$$

$$\tau_{xz}={}^3/_2(h^2-4\xi^2)N_xh^{-3},\qquad \tau_{yz}={}^3/_2(h^2-4\xi^2)N_yh^{-3}\tag{1.4}$$

Переменная ξ отсчитывается вдоль нормали к срединной поверхности и изменяется в пределах $-h/2\leqslant\xi\leqslant h/2$.

Будем характеризовать напряженное состояние материала в каждой точке величиной F второго инварианта девиатора тензора напряжений $((x, y)\in G+\Gamma,\ -h/2\leqslant\xi\leqslant h/2)$

$$F=\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)=$$

$$=144\xi^2h^{-6}[(M_x+M_y)^2+3(M_{xy}^2-M_xM_y)]+{}^{27}/_4(h^2-4\xi^2)^2h^{-6}[N_x^2+N_y^2]\tag{1.5}$$

Функция F явно зависит от ξ и через величины M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y зависит от переменных x, y. Величина F используется для оценки напряженного состояния среды в условии пластичности Мизеса. Достижение функцией F в некоторой точке (x, y, ξ) значения, характерного для материала пластинки, означает появление в указанной точке пластической деформации. Из соображений обеспечения прочности и отсутствия пластических деформаций точка максимума F является наиболее опасной, так как в процессе пропорционального увеличения нагрузок в данной точке впервые начинается текучесть материала.

Рассматриваемая ниже задача оптимизации заключается в отыскании формы контура Γ, для которого реализуется минимvм максимального значения F, по области, занимаемой материалом пластинки

$$F_*=\min_\Gamma\max_{xy}\max_\xi F,\qquad (x, y)\in G+\Gamma,\qquad \xi\in[-h/2, h/2]\tag{1.6}$$

При отыскании минимума по Γ в (1.6) предполагается, что искомый контур не может стягиваться в точку, т. е . не допускается отсутствие отверстия.

2. Представим функцию F в виде суммы двух слагаемых

$$F=S+T,\qquad S=144\xi^2h^{-6}[(M_x+M_y)^2+3(M_{xy}^2-M_xM_y)]$$

$$T={}^{27}/_4(h^2-4\xi^2)^2h^{-6}[N_x^2+N_y^2]\tag{2.1}$$

и рассмотрим предварительно вспомогательную задачу минимизации максимального значения S на контуре Γ

$$S_*=\min_\Gamma\max_{xy}\max_\xi S,\qquad (x, y)\in\Gamma,\qquad \xi\in[-h/2, h/2]\tag{2.2}$$

Величина, записанная в квадратных скобках в формуле (2.1) для S, является положительной. Это свойство является следствием положительности функции F. Действительно, предполагая противное и полагая $\xi=\pm h/2$, в выражении для F приходим к противоречию $F=S<0$. Используя отмеченное свойство, заключаем, что максимум по ξ в (2.2) достигается при $\xi=\pm h/2$.

Получим выражение для функции S в граничных точках. С этой целью проведем вспомогательные преобразования. Величина F инвариантна относительно перехода от одной ортогональной системы координат к другой. Учитывая это свойство и имеющее место равенство

$$(F)_{\xi=\pm h/2}=(S)_{\xi=\pm h/2}=36h^{-4}[(M_x+M_y)^2+3(M_{xy}^2-M_xM_y)]$$

заключаем, что выражение, записанное в квадратных скобках, инвариантно относительно перехода от осей xy к координатам nt т. е.

$$(M_x+M_y)^2+3(M_{xy}^2-M_xM_y)=(M_n+M_t)^2+3(M_{nt}^2-M_nM_t)$$

Используя далее граничные условия $M_n=0$, $M_{nt}=0$; приходим к следующему выражению для S в граничных точках:

$$S=aM_t^2,\qquad a=144\xi^2h^{-6},\qquad (x,\ y)\in\Gamma \tag{2.3}$$

Для исследования задачи минимизации по Γ максимального значения aM_t^2 предварительно выведем формулу, связывающую значения изгибающих моментов M_t в точках контура Γ, с величинами моментов, заданных на бесконечности. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\omega=M_x+M_y$. На основании соотношений (1.3) имеем

$$\omega=-D(1+\nu)\Delta w \tag{2.4}$$

Распределение прогибов w удовлетворяет бигармоническому уравнению (1.1) и, следовательно, функция ω является гармонической, т. е.

$$\Delta\omega=0,\qquad (x,\ y)\in G \tag{2.5}$$

Приведем граничные условия, которым функция ω удовлетворяет на контуре Γ и в бесконечно удаленных точках. С учетом равенства $M_x+M_y=M_n+M_t$ и граничного условия $M_n=0$ при $(x,\ y)\in\Gamma$ получим

$$\omega=M_t,\qquad (x,\ y)\in\Gamma \tag{2.6}$$

При стремлении точки $(x,\ y)$ к бесконечности функция ω стремится к значению $M_x^\infty+M_y^\infty$, т. е. для бесконечно удаленных точек области G имеем условие

$$\omega=M_x^\infty+M_y^\infty \tag{2.7}$$

В связи с приведенными соотношениями (2.5)—(2.7) отметим одно свойство гармонических функций. Рассмотрим семейство гармонических функций, непрерывных в $G+\Gamma$ и стремящихся на бесконечности к заданной положительной константе A. Для любой функции Ω из этого семейства и принимаемых ею значений на границе $\Gamma((\Omega)_\Gamma=f)$ согласно принципу максимума (см., например, [6]) имеет место неравенство

$$|\Omega(x,\ y)|\leqslant\max_{\xi\eta}|f(\xi,\ \eta)| \tag{2.8}$$

в котором $(x,\ y)\in G+\Gamma$, а $(\xi,\ \eta)\in\Gamma$. Из (2.8), в частности, следует, что

$$A\leqslant\max_{\xi\eta}|f| \tag{2.9}$$

Если в неравенстве (2.9) реализуется знак строгого равенства, то функция Ω тождественно равна константе A. Поэтому минимум по f

функционала $\max_{\xi\eta}|f|$ достигается на единственной функции $f(\xi, \eta) = A(\Omega(x, y)\equiv A)$ рассматриваемого семейства и равен A, т. е.

$$\min_f \max_{\xi\eta}|f|=A \tag{2.10}$$

Свойство (2.10) остается верным и при наличии в плоскости xy n отверстий, ограниченных замкнутыми контурами Γ_i $(\Gamma=\Sigma\Gamma_i, i=1, 2, \ldots, n)$.

Замечая далее, что согласно (2.3) $(S)_\Gamma=aM_t^2(a>0)$, и применяя к соотношениям (2.5)–(2.7) формулу (2.10), в которой $A=M_x^\infty+M_y^\infty$, $f=M_t$, получим, что минимум максимального значения F на контуре Γ достигается тогда и только тогда, когда

$$M_t=M_x^\infty+M_y^\infty, \qquad (x, y)\in\Gamma \tag{2.11}$$

Таким образом, равенство (2.11) является необходимым и достаточным условием оптимальности во вспомогательной задаче (2.2). Из (2.3), (2.11) вытекает формула

$$S_*=36h^{-4}(M_x^\infty+M_y^\infty)^2 \tag{2.12}$$

3. Рассмотрим задачу минимизации максимального значения S в области $G+\Gamma$ и покажем, что условие оптимальности в этой задаче также выражается равенством (2.11). С этой целью изучим поведение функции S в области $G+\Gamma$ и докажем, что для контуров, удовлетворяющих условию (2.11), функция S достигает своего максимального значения на границе отверстия.

Воспользуемся комплексным представлением [5] изгибающих моментов M_x, M_y, M_{xy} и перерезывающих сил N_x, N_y через две аналитические функции $\Phi(z)$ $\Psi(z)$ (чертой обозначена комплексно-сопряженная функция)

$$\begin{gathered} M_x+M_y=-2D(1+\nu)[\Phi(z)+\bar{\Phi}(z)] \\ M_y-M_x+2iM_{xy}=2D(1-\nu)[z\Phi'(z)+\Psi(z)] \\ N_x-iN_y=-4D\Phi'(z), \qquad z=x+iy \end{gathered} \tag{3.1}$$

Предположим выполненным условие (2.11). В этом случае аналитическая функция $\Phi(z)$ постоянна в области определения и равна

$$\Phi(z)={}^1/_4(M_x^\infty+M_y^\infty) \tag{3.2}$$

Это равенство получено в [2] при исследовании обратных краевых задач плоской теории упругости. С учетом (3.2) первые две формулы (3.1) запишутся в виде

$$M_x+M_y=M_x^\infty+M_y^\infty, \qquad M_y-M_x+2iM_{xy}=2D(1-\nu)\Psi(z) \tag{3.3}$$

Второе соотношение (3.3) и комплексно-сопряженное равенство

$$M_y-M_x-2iM_{xy}=2D(1-\nu)\bar{\Psi}(z)$$

перемножим почленно. Тогда получим $(b=4D^2(1-\nu)^2)$

$$Q\equiv(M_x+M_y)^2+4(M_{xy}^2-M_xM_y)=b\Psi\bar{\Psi} \tag{3.4}$$

Подставим функции Ψ и $\bar{\Psi}$ в виде $\Psi=u+iv$, $\bar{\Psi}=u-iv$, где u и v — действительные величины. Тогда выражение для Q преобразуется к виду, удобному для последующих оценок

$$Q=b(u^2+v^2) \tag{3.5}$$

Величины u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ и являются гармоническими функциями ($\Delta u=\Delta v=0$). Применяя к функции Q оператор Лапласа и проводя несложные выкладки, с использованием отмеченных свойств функций u и v приходим к неравенству

$$\Delta Q=4b(\nabla u)^2\geqslant 0 \tag{3.6}$$

Таким образом, Q является субгармонической функцией. Через ∇ в (3.6) обозначен оператор градиента. Субгармоническая функция Q, как известно, не может достигать максимума во внутренних точках области определения. Основываясь на этом, покажем, что максимум функции S достигается на границе Г. Для удобства доказательства воспользуемся выражениями (2.1), (3.4) и представим функции Q и S в следующем виде:

$$S=a(Q_1+3Q_2),\quad Q=b(Q_1+4Q_2),\quad Q_1=(M_x+M_y)^2,\quad Q_2=M_{xy}^2-M_xM_y \tag{3.7}$$

Величина Q_1 согласно (3.3) является константой ($Q_1=(M_x^\infty+M_y^\infty)^2$). Функция же Q, как было показано, не достигает максимума во внутренних точках области. Поэтому и величина Q_2 не может принимать максимального значения в указанных точках. Используя отмеченные свойства величин Q_1 и Q_2 и представление (3.7) для функции S, приходим к выводу, что S, так же как и Q, не достигает максимума во внутренних точках области $G+\Gamma$. Из непосредственного сопоставления значений $a(M_x^\infty+M_y^\infty)^2$ и $a(M_x^\infty+M_y^\infty)^2-3aM_x^\infty M_y^\infty$, принимаемых функцией S соответственно на Г и в бесконечно удаленных точках области, вытекает, что максимум S достигается на границе Г.

Доказанное утверждение позволяет непосредственно установить условие оптимальности в задаче минимизации максимального значения S на области $G+\Gamma$. При выполнении условия (2.11) максимум S по области $G+\Gamma$ достигается в точках контура Г. Максимальное же значение S на Г, как было показано в п. 2, достигает своего минимума тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.11). Следовательно, и в задаче минимизации максимального значения S по области $G+\Gamma$ необходимое и достаточное условие оптимальности дается равенством (2.11).

4. Рассмотрим основную задачу (1.1) — (1.6). Применяя результаты п. 3, покажем, что условие оптимальности в этой задаче также выражается равенством (2.11). Действительно, для отверстий, удовлетворяющих (2.11), на основании соотношений (3.1), (3.2) имеем $N_x-iN_y=-4D\Phi'(z)=0$ и, следовательно, во всей области

$$N_x=N_y=0 \tag{4.1}$$

В этом случае $T=0$ для всех $(x, y)\in G+\Gamma$ и имеет место равенство

$$F=S,\quad (x, y)\in G+\Gamma \tag{4.2}$$

Для отверстий произвольной формы всюду

$$F=S+T\geqslant S \tag{4.3}$$

Сопоставляя соотношения (4.2), (4.3) и учитывая, что минимум максимального значения S по области $G+\Gamma$ достигается тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2.11), приходим к выводу, что и в задаче (1.1) — (1.6) это равенство является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Отыскание формы оптимального контура с использованием соотношения (2.11) приводит к замкнутой краевой задаче для бигармонического уравнения (1.1) с граничными условиями $M_{nt}=0$, $M_n=0$ и заданными условиями на бесконечности, причем соотношение (2.11) служит для определения неизвестной границы Г. При помощи равенств $M_x+M_y=-D(1+\nu)\Delta w$ и $M_x+M_y=M_x^\infty+M_y^\infty$ данная задача сводится к обратной краевой задаче для уравнения Пуассона

$$\Delta w=c, \quad c=-(M_x^\infty+M_y^\infty)[D(1+\nu)]^{-1}$$

исследованной методами теории функций комплексного переменного в [2]. Используя результаты работы [2], получим, что при изгибе пластинки отверстия эллиптической формы

$$x^2(M_x^\infty)^{-2}+y^2(M_y^\infty)^{-2}=\lambda^2 \tag{4.4}$$

являются оптимальными. Через λ^2 в (4.4) обозначена произвольная положительная константа. Для пластинки с оптимальным отверстием (4.4) в силу (4.1) оказывается выполненным неучтенное краевое условие $N_n=0$. Следствием равенства (4.1) является также то, что все компоненты тензора напряжений и функция F на срединной поверхности ($\xi=0$) обращаются в нуль.

Отметим, что средняя кривизна срединной поверхности изогнутой пластинки с оптимальным отверстием постоянна для всех точек $(x, y)\in G+\Gamma$:

$$K=1/r_x+1/r_y=\Delta w=c$$

где r_x^{-1} и r_y^{-1} — кривизны, соответствующие направлениям x и y.

5. Предположим, что в пластинке имеется n отверстий, ограниченных контурами Γ_k ($\Gamma=\Sigma\,\Gamma_k$, $k=1, 2,\ldots, n$). Граничные условия на Г и условия на бесконечности считаются теми же, что и в п. 1. В рассматриваемом случае применение свойства (2.10) позволяет показать, что минимум максимального значения F на Г достигается при выполнении условия (2.11).

Отметим, что формы контуров, удовлетворяющих (2.11), найдены в случае двух отверстий, а также для некоторых периодических систем отверстий в [2, 7]. Далее заметим, что доказательство неравенства (3.6) не зависело от связности области. Поэтому и при наличии отверстий, удовлетворяющих (2.11), максимум F (в области $G+\Gamma$) достигается на Г. Следовательно, в рассматриваемом случае равенство (2.11) является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Проведенные исследования обобщаются на тот случай, когда к границам отверстий приложены постоянные распределенные моменты $M_n=-M_0$ ($M_0>0$ — заданная константа). Для данных граничных условий функция S в точках контура Г представляется в виде

$$S=a(M_t^2+M_0M_t+M_0^2), \qquad (x, y)\in\Gamma \tag{5.1}$$

Используя представление (5.1) для $(S)_\Gamma$ и свойство гармонических функций (2.10), можно показать, что минимум максимального значения S на контуре Г достигается тогда и только тогда, когда

$$M_t=M_x^\infty+M_y^\infty+M_0 \tag{5.2}$$

При выполнении условия (5.2) во всей области $G+\Gamma$ имеют место равенства $N_x=N_y=0$, $T=0$. Проводя далее оценки, подобные тем, которые делались в п. 3, можно показать, что для отверстий, удовлетворяющих (5.2), функция S, рассматриваемая в области $G+\Gamma$, достигает максимума на Г. Следовательно, равенство (5.2) является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Из проведенных исследований свойств функции F вытекает также, что в процессе нагружения пластинки с оптимальными отверстиями пластические деформации не могут сначала возникнуть во внутренних точках области $G+\Gamma$. Пластическое состояние материала впервые достигается на Γ, причем одновременно по всему контуру ($\Gamma=\Sigma\,\Gamma_k$).

6. К аналогичным задачам приходим при отыскании форм отверстий в бесконечных пластинках, подверженных растяжению. Предположим, что пластинка растягивается на бесконечности $(\sigma_x)_\infty=\sigma_x^\infty$, $(\sigma_y)_\infty=\sigma_y^\infty$, $(\tau_{xy})_\infty=0$ (σ_x^∞, σ_y^∞ — заданные константы), а контур отверстия Γ свободен от прикладываемых нагрузок $(\sigma_n)_\Gamma=(\tau_n)_\Gamma=0$. В качестве характеристики напряженного состояния материала пластинки примем величину второго инварианта девиатора тензора напряжений

$$F=\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2 \tag{6.1}$$

Задача оптимизации заключается в отыскании формы контура Γ, для которого достигается минимум максимального значения F по области $G+\Gamma$, т. е. $F_*=\min_\Gamma \max_{xy} F$.

Исследование данной задачи проведем аналогично п. 2, 3. Введем вспомогательную функцию $\omega=\sigma_x+\sigma_y$, удовлетворяющую, как нетрудно проверить, соотношениям (2.5) – (2.7), в которых величины M_t, M_x^∞, M_y^∞ заменены соответственно на σ_t, σ_x^∞, σ_y^∞. Применяя к функции ω свойство (2.10), получим условие минимальности максимального значения F на контуре отверстия

$$(\sigma_t)_\Gamma=\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty \tag{6.2}$$

В [1] (см. также [2]) показано, что контуры Γ, удовлетворяющие условию (6.2), образуют однопараметрическое семейство эллипсов $x^2(\sigma_x^\infty)^{-2}+y^2(\sigma_y^\infty)^{-2}=\lambda^2$, где λ^2 — параметр.

Используя комплексные представления компонент тензора напряжений через потенциалы Колосова — Мусхелишвили, можно показать, что в случае контура, удовлетворяющего (6.2), для всех точек $(x, y)\in G+\Gamma$ справедливо неравенство $\Delta F\geqslant 0$. Учитывая данное неравенство и сопоставляя значения $(F)_\Gamma=(\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty)^2$, $(F)_\infty=(\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty)^2-3\sigma_x^\infty\sigma_y^\infty$, приходим к выводу, что максимум F достигается на Γ. Из того, что минимум максимального значения F на контуре Γ реализуется для равнонапряженных контуров, и того, что в случае равнонапряженного контура максимальное значение F в области $G+\Gamma$ достигается на Γ, вытекает, что равнонапряженные контуры являются оптимальными. Отметим, что условие (6.2) является как необходимым, так и достаточным условием глобального оптимума.

Проведенные рассмотрения можно обобщить на случай n отверстий, ограниченных контурами Γ_k ($\Gamma=\Sigma\Gamma_k$, $k=1, 2, \ldots, n$), и показать, что равнонапряженные отверстия являются оптимальными. Заметим, что деформация пластинок с равнонапряженными отверстиями происходит таким образом, что дилатация одинакова для всех точек области $G+\Gamma$. Действительно, из выполнения в области $G+\Gamma$ условия $\sigma_x+\sigma_y=\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty$ и известных соотношений между деформациями и напряжениями следует равенство

$$\operatorname{div} U=E^{-1}(1-\nu)(\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty), \quad (x, y)\in G+\Gamma$$

где U — вектор перемещений.

В заключение заметим, что равнонапряженные отверстия оказываются оптимальными и в том случае, если в качестве F вместо (6.1), принята величина $F=(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2$. По принимаемым функцией F значениям судят о появлении пластичности, выбрав критерий Треска.

Поступила 19 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
2. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
3. *Космодамианский А. С.* Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Изд-во Донецк. ун-та, 1972.
4. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966.
5. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.– Л., Гостехиздат, 1951.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1976.
7. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С.* Обратные задачи изгиба для тонких изотропных пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.