

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ
ДЛЯ РАСЧЕТА ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК,
ПОДКРЕПЛЕННЫХ ШПАНГОУТАМИ

Н. А. АЛФУТОВ, Б. Г. ПОПОВ

(Москва)

При решении задач на ЭВМ для оболочек вращения бывает удобно привести исходные уравнения к системе обыкновенных линейных уравнений первого порядка. Для этого часто требуются громоздкие преобразования уравнений равновесия и соотношений упругости. Задача становится практически невыполнимой в случае трехслойных оболочек несимметричной структуры несущих слоев с «жестким» ортотропным наполнителем.

Ниже показан путь решения, который позволяет использовать ЭВМ на этапах подготовки задач для решения численными методами. При выводе дифференциальных уравнений вариационным методом применяется запись при помощи линейных операторных матриц. Приводятся преобразования этих матриц для получения канонической системы дифференциальных уравнений и условий сопряжения со шпангоутом.

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку. Связь деформаций и перемещений слоев в операторном матричном виде представим в форме

$$\varepsilon^i = L^i U \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

индексы $i=1, 2, 3$ относятся к верхнему и нижнему несущим слоям и заполнителю соответственно. В качестве компонент вектора U примем

$$U = \|u, v, \psi, \varphi, w\|^T \quad (2)$$

где u, v, w — отнесенные к радиусу R касательные и нормальное перемещения срединной поверхности заполнителя; ψ, φ — углы поворота сечений в заполнителе, индекс T означает транспонирование матрицы. Компоненты векторов деформаций ε^i и операторные матрицы L^i при линейном законе распределения касательных перемещений по высоте z (гипотеза «ломаной» нормали [1]) имеют вид

$$\varepsilon^i = \|\varepsilon_x^i, \varepsilon_y^i, \gamma_{xy}^i\|^T \quad (i=1, 2), \quad \varepsilon^3 = \|\varepsilon_x^3, \varepsilon_y^3, \gamma_{xy}^3, \gamma_{xz}^3, \gamma_{yz}^3\|^T \quad (3)$$

$$L^1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & -\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & -(\eta - \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ 0 & (1 + \eta - \alpha) \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} & 1 - (\eta - \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & (1 + \eta - \alpha) \frac{\partial}{\partial \xi} & -\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} & -\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} & -2(\eta - \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$L^3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & -\eta \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -\eta \frac{\partial}{\partial \theta} & 1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \xi} & -\eta \frac{\partial}{\partial \theta} & -\eta \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Здесь $\theta, \xi = x/R, \eta = z/R$ — угловая, осевая и нормальная координаты; $\alpha = h_s/2R, h_s$ — высота заполнителя.

Для нижнего несущего слоя операторная матрица L^2 получается по матрице L^1 заменой знака при коэффициенте α .

Избавимся в матрицах L^i ($i=1, 2, 3$) от дифференциальных операторов, содержащих $\partial/\partial\xi$. Для этого вместо вектора U (2) введем два новых вектора X и Y следующим образом:

$$X = \|u, v, \psi, \varphi, \theta_1, w\|^T, \quad Y = \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right\|^T \quad (5)$$

где $\theta_1 = \partial w / \partial \xi$ — угол поворота нормали срединной поверхности ($\eta=0$) в плоскости меридиана. Связь деформаций с векторами X и Y можно представить в матричном виде

$$\varepsilon^i = L_{cx}^i X + L_{cy}^i Y \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

где матрицы L_{cx}^i содержат только операторы дифференцирования по угловой координате θ и не содержат операторов $\partial/\partial\xi$.

Дифференциальному условию связи между векторами X и Y соответствует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} X - L_{cx} X - L_{cy} Y = 0 \quad (7)$$

Матрицы L_{cx} (6×6) и L_{cy} (6×5) элементарно заполняются путем подстановки X и Y (5) в условие связи (7).

В силу линейности рассматриваемых соотношений возможные деформации слоев $\delta \varepsilon^i$ согласно (6) можно записать

$$\delta \varepsilon^i = L_{cx}^i \delta X - L_{cy}^i \delta Y \quad (i=1, 2, 3) \quad (8)$$

Дополним функционал полной потенциальной энергии условиями связи (7). Тогда в положении равновесия

$$\delta J = \int_0^{\Delta} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} \langle \sigma^i, (L_{cx}^i \delta X + L_{cy}^i \delta Y) \rangle R d\eta - \langle P, \delta X \rangle R - \left\langle \lambda, \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \delta X - L_{cx} \delta X - L_{cy} \delta Y \right) \right\rangle \right\} R^2 d\xi d\theta = 0 \quad (9)$$

$$\sigma^i = \|\sigma_x^i, \sigma_y^i, \tau_{xy}^i\|^T \quad (i=1, 2), \quad \sigma^3 = \|\sigma_x^3, \sigma_y^3, \tau_{xy}^3, \tau_{xz}^3, \tau_{yz}^3\|^T$$

где $t_i = h_i/R$ — относительные толщины слоев, P — вектор внешних поверхностных нагрузок, λ — вектор множителей Лагранжа, \langle, \rangle — скалярное произведение векторов, $\Delta = l/R, l$ — длина оболочки.

Запишем результат интегрирования (9) по частям в матричном виде. Получим уравнения Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \lambda + L_{cx}^T \lambda + R \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} M_{cx}^i \sigma^i d\eta - RP = 0 \quad (10)$$

$$R \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} L_{cy}^{iT} \sigma^i d\eta + L_{cy}^T \lambda = 0 \quad (11)$$

Путем простой подстановки при интегрировании по частям можно показать, что операторные матрицы M_{cx}^i получаются из операторных матриц

L_x^i путем транспонирования и заменой знака у нечетных степеней операторов $\partial^i / \partial \theta^i$.

Граничные условия имеют вид

$$-\int_0^{2\pi} [\langle \lambda, \delta X \rangle]_{i=0}^{i=\Delta} R^2 d\theta = 0 \quad (12)$$

Как видно из (12), вектор множителей Лагранжа представляет вектор обобщенных (в смысле Кирхгофа) силовых факторов.

Подставим в уравнения (10), (11) закон Гука в форме

$$\sigma^i = G^i (L_x^i X + L_y^i Y) \quad (i=1, 2, 3) \quad (13)$$

где G^i — матрица коэффициентов упругости для i -го слоя.

В силу периодичности решений по угловой координате θ можно произвести разделение переменных. Для n -й гармоники решение будет определяться независимо от других гармоник. Тогда в операторных матрицах L_x^i следует заменить дифференциальные операторы $\partial^i / \partial \theta^i$ на $\pm n^i$. Знаки определяются в зависимости от вида тригонометрических функций (\sin , \cos) разложения компонент вектора X .

Уравнения связи (7), уравнения Эйлера (10), (11) с учетом (13) для n -й гармоники разложения по угловой координате θ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} X_n - L_{cx} X_n - L_{cy} Y_n = 0 \\ \frac{d}{d\xi} \lambda_n + L_{cx}^T \lambda_n + \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} L_{xn}^{iT} G^i (L_{xn}^i X_n + L_y^i Y_n) R d\eta - R P_n = 0 \quad (14) \\ \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} L_y^{iT} G^i (L_{xn}^i X_n + L_y^i Y_n) R d\eta + L_{cy}^T \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

Исключив из системы (14) Y_n , получим систему двенадцати линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую запишем в матричном виде, удобном для численного интегрирования с помощью ЭВМ

$$\frac{d}{d\xi} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ R P_n \end{Bmatrix} \quad (15)$$

где квадратные матричные блоки A_{ij} (6×6) вычисляются по исходным матрицам следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{11} = L_{cx} - L_{cy} S_y^{-1} S_{yx}, \quad A_{12} = -L_{cy} S_y^{-1} L_{cy}^T \\ A_{21} = -S_x + S_{xy} S_y^{-1} S_{yx}, \quad A_{22} = -L_{cx}^T + S_{xy} S_y^{-1} L_{cy}^T \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S_x = \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} L_{xn}^{iT} G^i L_{xn}^i R d\eta, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} L_{xn}^{iT} G^i L_y^i R d\eta, \\ S_y = \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} L_y^{iT} G^i L_y^i R d\eta, \quad S_{yx} = \sum_{i=1}^3 \int_{t_i} L_y^{iT} G^i L_{xn}^i R d\eta \end{aligned}$$

Таким образом подготовка к решению задачи прочности для трехслойной цилиндрической оболочки сводится к заполнению таблиц

$$\begin{aligned}
 L_{cx} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad L_{cy} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 G^i &= \begin{vmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i & 0 \\ B_{21}^i & B_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^i \end{vmatrix} \quad (i=1, 2), \quad G^3 = \begin{vmatrix} B_{11}^3 & B_{12}^3 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21}^3 & B_{22}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^3 \end{vmatrix} \\
 L_y^1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 & -\eta & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \eta - \alpha & 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 L_{xn}^1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \eta - \alpha)n & 0 & \alpha n & 0 & 1 + (\eta - \alpha)n^2 \\ -n & 0 & -\alpha n & 0 & 2(\eta - \alpha)n & 0 \end{vmatrix} \\
 L_y^3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad L_{xn}^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & -\eta n & 0 & 1 \\ -n & 0 & \eta n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Матрицы L_y^2, L_{xn}^2 получаются по матрицам L_y^1, L_{xn}^1 заменой знака у коэффициентов α . Матрицы L_{xn}^i приводятся для случая симметричного разложения решений по угловой координате θ относительно вертикальной плоскости ($\theta=0$). Для кососимметричных нагрузок в этих матрицах следует заменить знаки у n .

Матричные преобразования (16) можно поручить выполнять ЭВМ. Дальнейшее интегрирование системы дифференциальных уравнений, дополненных граничными условиями, возможно при помощи известных методов прогонки.

Рассмотрим составную трехслойную цилиндрическую оболочку, усиленную в сечении $\xi = \xi_k$ кольцевым шпангоутом. Будем считать, что подкрепляющий кольцевой элемент обладает жесткостями на изгиб, кручение и растяжение. Особенностью при составлении граничных условий является то, что в сечении присоединения несущих слоев к шпангоуту отсутствуют поперечные сдвиги в заполнителе. В дальнейшем будем считать, что в сечении стыка углы поворота заполнителя и несущих слоев одинаковы и равны соответствующим углам поворота кольцевого элемента. Запишем вариацию полной потенциальной энергии системы. В положении равновесия

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_0^{\xi_k} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_{h_i} \langle \sigma^i, \delta \varepsilon^i \rangle dz - R \langle P, \delta U \rangle \right\} R^2 d\xi d\theta + \\
 &+ \int_{\xi_k}^{\Delta} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_{h_i} \langle \sigma^i, \delta \varepsilon^i \rangle dz - R \langle P, \delta U \rangle \right\} R^2 d\xi d\theta + \\
 &+ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{F_k} \langle \sigma^k, \delta \varepsilon^k \rangle dF - R \langle P^k, \delta U^k \rangle \right\} R d\theta = 0 \quad (17)
 \end{aligned}$$

Верхние индексы (1), (2) относятся к левой и правой частям оболочки соответственно. Верхний индекс k будем относить к кольцевому подкреплению. Проведем преобразования, аналогичные (1)–(12). После интегрирования по частям получим уравнения равновесия и граничные условия. Рассмотрим более подробно условия сопряжения при $\xi = \xi_k$:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_{F_k} \langle \sigma^k, \delta \varepsilon^k \rangle dF + R [\langle \lambda^{(2)}, \delta X^{(2)} \rangle - \langle \lambda^{(1)}, \delta X^{(1)} \rangle + \langle P^k, \delta U^k \rangle] \right\}_{\xi = \xi_k} R d\theta = 0 \quad (18)$$

где U^k , $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ — векторы безразмерных перемещений и углов поворота кольца и оболочек при $\xi = \xi_k$:

$$U^k = \|u^k, v^k, \vartheta^k, w^k\|^T, X^{(1), (2)} = \|u, v, \psi, \varphi, \vartheta_1, w\|^{(1), (2)T} \quad (19)$$

Векторы напряжений σ^k , деформаций ε^k и внешних нагрузок P^k для кольца имеют компоненты

$$\sigma^k = \|\sigma_y^k, \tau^k\|^T, \varepsilon^k = \|\varepsilon_y^k, \gamma^k\|^T, P^k = \|p_x^k, p_y^k, m^k/R, p_z\|^T$$

Связь деформаций и перемещений кольца в операторном матричном виде можно представить

$$\varepsilon^k = L^k U^k \quad (20)$$

где операторная матрица L^k записывается в форме

$$L^k = \left\| \begin{array}{cccc} -\xi \frac{d^2}{d\theta^2} & (1-\eta) \frac{d}{d\theta} & \xi & 1 - \eta \frac{d^2}{d\theta^2} \\ -\rho^* \frac{d}{d\theta} & 0 & -\rho^* \frac{d}{d\theta} & 0 \end{array} \right\| \quad (21)$$

$$\rho^* = \rho \rho_1(\xi, \eta), \rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

где ρ — приведенный полярный радиус, ρ_1 — функция кручения, которая характеризует распределение деформаций сдвига по сечению профиля шпангоута [2], оси ξ, η в общем случае для сечения кольца не являются главными центральными осями.

Запишем условия сопряжения перемещений трехслойных цилиндрических оболочек и кольцевого шпангоута. Будем считать, что при переходе через шпангоут перемещения и углы поворота не терпят разрывов. Эти геометрические условия можно записать при $\xi = \xi_k$:

$$X^{(1)} = X^{(2)} = X \quad (22)$$

Разобьем вектор перемещений оболочки X на два вектора, которые обозначим X^h и Y^h :

$$X^h = K_1 X, Y^h = K_2 X \quad (23)$$

$$K_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad K_2 = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

Компоненты вектора X^h соответствуют компонентам вектора перемещений кольца U^k , по ним и происходит стыковка перемещений $X^h = U^k$ или в развернутом виде $u = u^k, v = v^k, \varphi = \vartheta^k, w = w^k$.

Относительно компонент вектора $Y^h = \|\varphi, \vartheta_1\|^T$ можно сказать, что они не являются независимыми. В виду того, что в сечении стыковки со шпан-

группом углы поперечного сдвига γ_{yz} , γ_{xz} равны нулю, углы поворота сечений заполнителя φ и ψ соответственно равны углам поворота нормали срединной поверхности ϑ_2 и ϑ_1 , т. е. при $\xi = \xi_k$:

$$\varphi - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) = 0, \quad \vartheta_1 - \psi = 0$$

или в матричной форме

$$Y^h - L_c X^h = 0$$

$$L_c = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \partial/\partial\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

Рассмотрим функционал полной потенциальной энергии упругого кольца, на которое действуют внешние нагрузки P^h и реакции оболочек $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ (18). Запишем вариацию этого функционала, дополненного условиями связи (24)

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_{F_k} \langle \sigma^h, L^h \delta X^h \rangle dF + R [\langle (\lambda_x^{(2)} + \lambda_x^{(1)}), \delta X^h \rangle + \langle (\lambda_y^{(2)} - \lambda_y^{(1)}), \delta Y^h \rangle - \langle P^h, \delta X^h \rangle] - \langle \lambda_c, (\delta Y^h - L_c \delta X^h) \rangle \right\} R d\theta = 0 \quad (25)$$

где λ_c — вектор множителей Лагранжа для условий связи (24); λ_x , λ_y — векторы силовых факторов, на которые разбивается вектор силовых факторов оболочки λ : $\lambda_x = K_1 \lambda$, $\lambda_y = K_2 \lambda$.

После интегрирования (25) по частям при вариациях δX^h , δY^h получим уравнения Эйлера в форме

$$\int_{F_k} M^h \sigma^h dF + R (\lambda_x^{(2)} - \lambda_x^{(1)} - P^h) + M_c \lambda_c = 0, \quad R (\lambda_y^{(2)} - \lambda_y^{(1)}) - \lambda_c = 0 \quad (26)$$

При записи (26) применяется матричная форма. Операторные матрицы M^h , M_c получаются по исходным матрицам L^h , L_c путем транспонирования и заменой знаков у операторов $\partial/\partial\theta$. После исключения множителей Лагранжа λ_c из (26) получим силовые условия сопряжения кольца с трехслойной цилиндрической оболочкой

$$\int_{F_k} M^h \sigma^h dF + R [(\lambda_x^{(2)} - \lambda_x^{(1)}) + M_c (\lambda_y^{(2)} - \lambda_y^{(1)}) - P^h] = 0$$

Воспользовавшись записью закона Гука для кольца $\sigma^h = G^h \varepsilon^h$ с учетом (20), силовые условия стыковки можно записать через перемещения кольца X^h

$$S^h X^h + [(\lambda_x^{(2)} - \lambda_x^{(1)}) + M_c (\lambda_y^{(2)} - \lambda_y^{(1)}) - P^h] = 0, \quad S^h = \frac{1}{R} \int_{F_k} M^h G^h L^h dF \quad (27)$$

Таким образом, полная система условий сопряжения состоит из 12 уравнений. К ним относятся шесть геометрических условий непрерывности перемещений и углов поворота (22); два условия связи (25), которые появляются в результате запрещения поперечных сдвигов заполнителя в месте соединения; четыре силовые граничные условия (27), которые представляют уравнения равновесия кольца при действии внешних нагрузок и реакций трехслойной оболочки.

Для n -й гармоники разложения решений по угловой координате θ в операторных матрицах L^k , M^k , M_c можно заменить операторы $\partial^i/\partial\theta^i$ на $\pm n^i$, где n — номер гармоники. Матрица жесткости кольца для n -й гармоники получается в результате интегрирования произведения трех матриц

$$S_n^k = \frac{1}{R} \int_{F_k} L_n^{kT} G^k L_n^k dF \quad (28)$$

$$G^k = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{vmatrix}, \quad L_n^k = \begin{vmatrix} \xi n^2 & (1+\eta)n & \xi & 1+\eta n^2 \\ \rho^* n & 0 & \rho^* n & 0 \end{vmatrix}$$

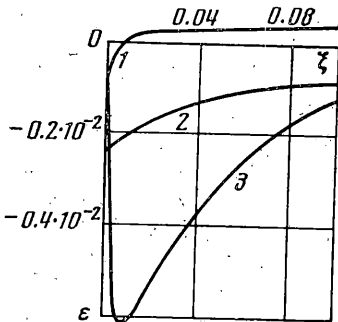
Матрица L_n^k записана для симметричного разложения решений относительно плоскости $\theta=0$. Результат процедуры (28) записывается через статические моменты и моменты инерции кольца относительно осей ξ , η .

Окончательно для n -й гармоники разложения условия сопряжения трехслойной цилиндрической оболочки со шпангоутом можно записать через векторы X_n и λ_n (15). Согласно (22), (24), (27) с учетом (23) получим

$$X_n^{(2)} - X_n^{(1)} = 0, \quad (K_2 - L_{cn} K_1) X_n^{(1)} = 0$$

$$S_n^k K_1 X_n^{(1)} + (K_1 + L_{cn}^T K_2) (\lambda_n^{(2)} - \lambda_n^{(1)}) + P_n^k = 0$$

Для численного решения системы (15) применялся метод, предложенный в [3]. Оболочка по длине разбивалась на 75 участков. Учитывалось 40 гармоник разложения решений по угловой координате θ . На фигуре показаны результаты расчета консольно-закрепленной трехслойной цилиндрической оболочки, подкрепленной в сечении $\xi=0$ шпангоутом. Кривая 1 соответствует ϵ_x^1 , 2 — ϵ_y^1 , 3 — γ_{xz}^2 .



Геометрические характеристики оболочки и шпангоута принимались равными: $l/R=1$, $h_1/R=10^{-3}$, $h_2/R=10^{-2}$, $h_3/R=10^{-2}$, $R=1$ м; для шпангоута $J_x/J_0=27$, $J_z/J_0=3$, $J_y/J_0=30$, $S_x=S_z=J_{xz}=0$, $F_h/F_0=3$, где $J_0=h_3^4/12$, $F_0=h_3^2$. Рассматривался случай нагружения шпангоута сосредоточенной нормальной силой ($P_z=10^4$ н). Материалы несущих слоев и шпангоута Д16, жесткостные характеристики заполнителя $B_{11}^3=3.5 \cdot 10^3$ н/мм², $B_{22}^3=1.8 \cdot 10^3$ н/мм², $G_{13}^3=1.5 \cdot 10^2$ н/мм², $G_{23}^3=0.8 \cdot 10^2$ н/мм², $B_{12}^3=B_{21}^3=G_{12}^3=0$.

Деформации ϵ_x^1 , ϵ_y^1 приведены для наружной поверхности внешнего несущего слоя на длине 0.11 при $\theta=0$. Имеют место сильно выраженные краевые эффекты. Наибольшие сдвиговые деформации заполнителя наблюдаются вблизи приложения силы.

Предлагаемый способ позволяет использовать ЭВМ для выполнения формальных процедур по выводу разрешающей системы дифференциальных уравнений (15). Переход к другим моделям деформирования влечет за собой изменения только в исходных матричных соотношениях (1), (4).

Поступила 26 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Григоров Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., «Машиностроение», 1973.
2. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мясников В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
3. Виноградов Ю. И., Кляев Ю. И. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки при сосредоточенном нагружении. Изв. вузов. Машиностроение, 1973, № 11.