

## БЕЗМОМЕНТНЫЕ ОБОЛОЧКИ С РАВНОНАПРЯЖЕННОЙ АРМАТУРОЙ

Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

(Новосибирск)

При проектировании конструкций, состоящих из оболочек, практически всегда, явно или неявно, уделяется много внимания обеспечению безмоментного состояния. Некоторые частные условия обеспечения безмоментного состояния в классической теории оболочек сформулированы в [1-3]. Они сводятся, по существу, к требованиям плавности распределения нагрузок, плавности изменения геометрической формы поверхности оболочки и отсутствию моментов и перерезывающих сил на границах. Указанные условия не дают проектировщику четкого ответа на вопрос: будет ли в каждом конкретном случае реализовано безмоментное состояние и, если нет, то какие возможности имеются для его обеспечения. Кроме того, в классической безмоментной теории оболочек [1-3] усилия определяются вне зависимости от соотношений неразрывности деформаций срединной поверхности которые при этом оказываются в той или иной мере нарушенными. Во избежание этого приходится предполагать наличие малых изгибающих моментов и перерезывающих сил, которыми в уравнениях равновесия пренебрегают. Последнее приводит к тому, что соответствующие решения следует трактовать как приближенные решения общей моментной теории оболочек, и при этом вопрос о степени их приближения к точным решениям остается открытым.

Здесь для произвольных упругих и термоупругих армированных оболочек получены общие условия обеспечения безмоментного состояния и равнонапряженности арматуры. Эти соотношения позволяют проверить, будет ли спроектированная оболочка при заданном характере нагружения безмоментной или нет, а также определить меры (за счет изменения формы оболочки, структуры армирования, создания дополнительной пригрузки и других способов) по обеспечению безмоментного состояния. В качестве иллюстраций рассмотрены некоторые примеры построения безмоментных проектов с равнонапряженной арматурой для оболочек вращения при осесимметричном нагружении.

1. Рассмотрим оболочку, армированную нитями, уложенными в эквидистантных поверхностях к ее срединной поверхности. Предположим, что по толщине оболочки укладка арматуры по характеру одинакова и соответствует укладке в некотором элементарном характерном слое, для которого связь между напряжениями  $\sigma$ , деформациями  $\varepsilon$  и температурой  $T$  имеет вид

$$\sigma = [a_{km}] \varepsilon - a_t \cdot T \quad (k, m = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{vmatrix}, \quad a_t = \begin{vmatrix} a_{11t} \\ a_{22t} \\ a_{12t} \end{vmatrix}$$

а для компонент деформации справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява

$$\varepsilon = \varepsilon^\circ + z\kappa, \quad \varepsilon^\circ = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}^\circ \\ \varepsilon_{22}^\circ \\ \varepsilon_{12}^\circ \end{vmatrix}, \quad \kappa = \begin{vmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $\varepsilon_{ij}^\circ$ ,  $\kappa_{ij}$  — соответственно компоненты напряжений, деформаций и искривлений отсчетной поверхности оболочки;  $a_{km}$  — компоненты матрицы жесткости;  $a_{ijt}$  — коэффициенты «температурной жесткости»;  $z$  — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности оболочки.

Пользуясь выражениями (1.1) и (1.2), для вектор-столбцов усилий  $\mathbf{N}$  и моментов  $\mathbf{M}$  получим зависимости

$$\mathbf{N} = [A_0] \boldsymbol{\varepsilon}^\circ + [A_1] \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{C}_0 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{M} = [A_1] \boldsymbol{\varepsilon}^\circ + [A_2] \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{C}_1 \quad (1.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \int_{H_1}^{H_2} \boldsymbol{\sigma} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \quad (1.5)$$

$$[A_n] = \int_{H_1}^{H_2} [a_{nm}] z^n dz, \quad [C_n] = \int_{H_1}^{H_2} \mathbf{a}_i T z^n dz \quad (n=0,1,2)$$

где  $H_1, H_2$  определяют координаты (вдоль  $z$ ) ограничивающих поверхностей оболочки. Для векторов сил  $\mathbf{N}_i$  ( $i=1, 2$ ) моментов  $\mathbf{M}_i$  и вектора  $\mathbf{p}$  интенсивности поверхностной нагрузки имеем [4]:

$$\mathbf{N}_i = N_{i1} \mathbf{t}_1 + N_{i2} \mathbf{t}_2 + Q_i \mathbf{n} \quad (i=1, 2), \quad \mathbf{M}_i = M_{i1} \mathbf{t}_1 + M_{i2} \mathbf{t}_2 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{p} = p_1 \mathbf{t}_1 + p_2 \mathbf{t}_2 + p_3 \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{t}_i = \alpha_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}, \quad \alpha_i^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i} \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2)$  — радиус-вектор произвольной точки отсчетной поверхности оболочки,  $\mathbf{t}_i$  — единичные векторы касательных к линиям  $\xi_i = \text{const}$  ее главных кривизн,  $Q_i$  — компоненты перерезывающих сил.

Уравнения равновесия в векторной форме имеют вид [4]:

$$\frac{\partial(\alpha_2 \mathbf{N}_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\alpha_1 \mathbf{N}_2)}{\partial \xi_2} + \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{p} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial(\alpha_2 \mathbf{M}_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\alpha_1 \mathbf{M}_2)}{\partial \xi_2} + \alpha_1 \alpha_2 (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{t}_1 + \mathbf{N}_2 \times \mathbf{t}_2) = 0$$

Уравнения неразрывности деформаций для оболочек будут [1-3] иметь форму

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha_i \kappa_{ii})}{\partial \xi_j} - \kappa_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial(\alpha_j \kappa_{ij})}{\partial \xi_i} - \kappa_{ij} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} + \frac{\varepsilon_{ij}^\circ}{R_i} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} - \\ & - \frac{1}{R_j} \left[ \frac{\partial(\alpha_i \varepsilon_{ii}^\circ)}{\partial \xi_j} - \frac{\partial(\alpha_j \varepsilon_{ij}^\circ)}{\partial \xi_i} - \varepsilon_{ij}^\circ \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} \right] = 0 \quad (i, j=1, 2; i \neq j) \\ & \frac{\kappa_{11}}{R_2} + \frac{\kappa_{22}}{R_1} + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\alpha_1} \left[ \alpha_2 \frac{\partial \varepsilon_{22}^\circ}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} (\varepsilon_{22}^\circ - \varepsilon_{11}^\circ) - \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{12}^\circ}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \varepsilon_{12}^\circ \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \frac{\partial \varepsilon_{11}^\circ}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} (\varepsilon_{11}^\circ - \varepsilon_{22}^\circ) - \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial \varepsilon_{12}^\circ}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \varepsilon_{12}^\circ \right] \right\} = 0 \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_i} = - \frac{\mathbf{n}}{\alpha_i^2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_i^2}$$

где  $R_i$  ( $i=1, 2$ ) — главные радиусы кривизны. В дальнейшем будем использовать следующие формулы дифференцирования векторов  $\mathbf{t}_i, \mathbf{n}$  [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial \xi_i} = -\frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} \mathbf{t}_j - \frac{\alpha_i}{R_i} \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} \mathbf{t}_j$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_i} = \frac{\alpha_i}{R_i} \mathbf{t}_i \quad (i, j=1, 2; i \neq j)$$

2. Пусть далее всюду в оболочке изгибающие и крутящие моменты отсутствуют, т. е.  $\mathbf{M}=0$ . В соответствии с (1.5) это требование означает, что напряжения по толщине стенки (при симметричной относительно отсчетной поверхности структуре оболочки) будут распределены равномерно. Тогда на основе (1.4) для такой оболочки получим

$$\boldsymbol{\kappa} = [B_0] \boldsymbol{\varepsilon}^\circ + \mathbf{b}^\circ \quad (2.1)$$

$$\mathbf{N} = [A] \boldsymbol{\varepsilon}^\circ + \mathbf{d}^\circ \quad (2.2)$$

$$[B_0] = -[A_2]^{-1}[A_1], \quad \mathbf{b}^\circ = [A_2]^{-1}\mathbf{C}_1$$

$$[A] = [A_0] + [A_1][B_0], \quad \mathbf{d}^\circ = [A_1]\mathbf{b}^\circ$$

При  $\mathbf{M}=0$ , пользуясь выражениями (1.6), из второго уравнения в (1.8) получены  $Q_i=0$ . Таким образом, в безмоментных оболочках перерезывающие усилия  $Q_i$  отсутствуют. И, следовательно, при обеспечении безмоментного состояния в оболочках следует позаботиться, чтобы на участках сопряжения оболочек и на их контурах перерезывающие силы и моменты отсутствовали.

Пусть армирование оболочки осуществляется двумя семействами арматуры, укладываемыми в направлениях, составляющих с осью  $\xi_1$  соответственно углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Тогда для безмоментных оболочек с равнодеформируемой (равнонапряженной при одномерной модели армирующей нити) арматурой будем иметь равенства

$$\varepsilon_{11}^\circ l_{11}^2 + \varepsilon_{22}^\circ l_{21}^2 + \varepsilon_{12}^\circ l_{11} l_{21} = \varepsilon_i^* \quad (i=1, 2), \quad l_{11} = \cos \psi_i, \quad l_{21} = \sin \psi_i \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon_i^*$  — допустимая деформация нити. Для одномерной нити  $\varepsilon_i^* = \sigma_i^*/E_i$  ( $\sigma_i^*$  — допустимое напряжение,  $E_i$  — модуль Юнга материала арматуры).

Положим для определенности, что  $l_{21} l_{22} (l_{21} l_{12} - l_{11} l_{22}) \neq 0$ . Тогда из (2.3) получим

$$\varepsilon_{22}^\circ = \delta_1 + \delta_2 \varepsilon_{11}^\circ, \quad \varepsilon_{12}^\circ = \delta_3 + \delta_4 \varepsilon_{11}^\circ \quad (2.4)$$

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_1^* l_{12} l_{22} - \varepsilon_2^* l_{11} l_{21}}{l_{21} l_{22} (l_{21} l_{12} - l_{11} l_{22})}, \quad \delta_2 = \frac{l_{11} l_{12}}{l_{21} l_{22}}$$

$$\delta_3 = \frac{\varepsilon_2^* l_{21}^2 - \varepsilon_1^* l_{22}^2}{l_{21} l_{22} (l_{21} l_{12} - l_{11} l_{22})}, \quad \delta_4 = \frac{l_{11}^2 l_{22}^2 - l_{12}^2 l_{21}^2}{l_{21} l_{22} (l_{21} l_{12} - l_{11} l_{22})}$$

Подставляя выражения (2.4) в (2.1) и (2.2), будем иметь

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b} + \varepsilon \varepsilon_{11}^\circ, \quad \mathbf{N} = \mathbf{d} + \varepsilon \varepsilon_{11}^\circ \quad (2.5)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{b}^\circ + [B_0] \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \delta_3 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [B_0] \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{d}^\circ + [A] \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \delta_3 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

Первое векторное уравнение равновесия в (1.8) и уравнения совместности деформаций (1.9) при использовании выражений (1.6) и (2.5) после исключения  $\varepsilon_{11}^0$  принимают вид

$$\begin{aligned} & \alpha_j e_{ii} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) + \alpha_i e_{12} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) + f_{i3} \left( \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) + f_{i4} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[ \alpha_i \left( b_{ii} + c_{ii} \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[ \alpha_j \left( b_{12} + c_{12} \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \right] - \\ & - \left( b_{12} + c_{12} \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} - \left( b_{jj} + c_{jj} \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} + \frac{1}{R_i} \left( \delta_3 + \delta_4 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} - \\ & - \frac{1}{R_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_j} \alpha_i \left[ (2-i) \frac{f_{11}}{f_{22}} + (i-1) \left( \delta_1 + \delta_2 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[ \alpha_j \left( \delta_3 + \delta_4 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \right] \right\} - \\ & - \left[ (i-1) \frac{f_{11}}{f_{22}} + (2-i) \left( \delta_1 + \delta_2 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \right] \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} \Bigg\} = 0 \quad (i, j=1, 2; i \neq j) \\ & \alpha_1 \alpha_2 \left[ \frac{1}{R_1} \left( b_{11} + c_{11} \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) + \frac{1}{R_2} \left( b_{22} + c_{22} \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\alpha_1} \left\{ \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \delta_1 + \delta_2 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) + [\delta_1 + (\delta_2 - 1)] \frac{f_{11}}{f_{22}} - \right. \\ & - \left. \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \delta_3 + \delta_4 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) - \left( \delta_3 + \delta_4 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) + \right. \\ & + \left. \left[ (1 - \delta_2) \frac{f_{11}}{f_{22}} - \delta_1 \right] \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \delta_3 + \delta_4 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) - \left( \delta_3 + \delta_4 \frac{f_{11}}{f_{22}} \right) \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \right\} = 0 \\ & f_{11} = \frac{d_{11}}{R_1} + \frac{d_{22}}{R_2} + p_3, \quad f_{22} = - \left( \frac{e_{11}}{R_1} + \frac{e_{22}}{R_2} \right) \\ & f_{i3} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\alpha_j e_{ii}) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\alpha_i e_{12}) + e_{12} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} - e_{jj} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} \\ & f_{i4} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\alpha_j d_{ii}) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\alpha_i d_{12}) + d_{12} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_j} - d_{jj} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_i} + p_i \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned}$$

Деформация  $\varepsilon_{11}^0$  определяется выражением

$$\varepsilon_{11}^0 = f_{11}/f_{22} \quad (2.7)$$

Система соотношений (2.6) определяет такую взаимосвязь между геометрическими, физико-механическими, структурными параметрами оболочки, силовыми и тепловыми нагрузками, при которой в произвольной оболочке, армированной двумя семействами нитей, будет существовать безмоментное состояние с равнонапряженной арматурой. Эти соотношения можно трактовать как уравнения, определяющие необходимую для обеспечения рассматриваемого состояния структуру армирования (углы, интенсивности), геометрическую форму поверхности, нагрузку (дополнительную пригрузку) или их комбинацию.

3. Для оболочек вращения  $\alpha_1 = R_1$ ,  $\alpha_2 = r = R_2 \sin \varphi$ , где  $\xi_1 = \varphi$  — угол между нормалью к поверхности и осью вращения, связанный с  $R_1$ ,  $R_2$  соотношением Гаусса — Кодацци  $d(R_2 \sin \varphi)/d\varphi = R_1 \cos \varphi$ .

При осевой симметрии нагрузок, закрепления и структуры оболочки в соотношениях (2.6) необходимо принять  $\partial/\partial \xi_2 = 0$ .

Рассмотрим более простой случай, когда структура оболочки по толщине однородна, нагрев равномерен по толщине и углы армирования оболочки двумя одинаковыми семействами нитей таковы, что  $\psi_1 = -\psi_2 = \psi$ . Тогда, полагая  $H_2 = -H_1 = H$ , будем иметь

$$[A_1] = C_1 = \kappa = d^0 = 0, \quad \varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = \varepsilon^*, \quad \delta_3 = \delta_4 = \varepsilon_{12}^0 = 0 \\ \delta_1 = \varepsilon^* (\sin \psi)^{-2}, \quad \delta_2 = -\operatorname{ctg}^2 \psi, \quad [A] = 2H[a_{km}], \quad C_0 = 2HTa_t \quad (3.1)$$

Так как при таком способе армирования материал оболочки очевидно, будет ортотропным, то  $A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} = 0$ ,  $A_{12} = A_{21}$ . Тогда из (2.2) получим  $N_{12} = 0$ , а из первого уравнения равновесия (1.8) получим  $p_2 = 0$ , т. е. в этом случае нагрузка не должна иметь составляющей, направленной вдоль касательных к параллелям оболочки.

В рассматриваемом случае система (2.6) существенно упрощается и сводится к следующим двум уравнениям:

$$\frac{d}{dr} \{ Hr [a_{12}\delta_1 + (a_{11} + a_{12}\delta_2) f_{11} f_{22}^{-1}] - H\delta_1 a_{22} - \\ - H(a_{21} + a_{22}\delta_2) f_{11} f_{22}^{-1} + pr/2 \cos \varphi = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dr} [r(\delta_1 + \delta_2 f_{11} f_{22}^{-1}) - f_{11} f_{22}^{-1}] = 0$$

$$f_{11} = 2H\delta_1 \left( \frac{a_{11}}{R_1} + \frac{a_{22}}{R_2} \right) + p_3, \quad f_{22} = -2H \left[ \frac{a_{11}}{R_1} + \frac{a_{21}}{R_2} + \delta_2 \left( \frac{a_{12}}{R_1} + \frac{a_{22}}{R_2} \right) \right] \\ \varepsilon_{11}^0 = f_{11} f_{22}^{-1} \quad (3.3)$$

При известной структуре армирования (известных величинах  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $\psi$ ), геометрии и нагрузках система (3.2) позволяет проверить, будет ли реализован рациональный проект (проект безмоментной оболочки с равнонапряженной арматурой). В то же время зависимости (3.2) служат уравнениями, позволяющими определить структуру армирования, геометрию оболочки или характер дополнительной пригрузки, которые обеспечили бы реализацию безмоментного проекта с равнонапряженной арматурой. В этих случаях вопрос об осуществимости такого проекта тесно связан с физической непротиворечивостью получаемых решений и технологическими возможностями. Так, например, если отыскивался закон распределения толщины или интенсивности (обильности) армирования, то соответствующая функция должна быть неотрицательной. Технологические ограничения менее существенны, так как уравнения (3.2) содержат в себе широкий спектр функций, которые в совокупности позволяют обеспечить искомый проект.

Для решений задач, связанных с поиском структуры армирования, необходимо в дополнение к соотношениям (3.2), (3.3) воспользоваться соотношениями, определяющими компоненты матрицы  $[a_{km}]$  через структурные и механические параметры композиционного материала. Конкретный вид таких соотношений не имеет принципиального значения для последующего решения задачи. С точки же зрения отыскания решения и последующей его реализации такие соотношения должны удовлетворять следующим требованиям: они должны быть достаточно простыми и логически непротиворечивыми, содержать параметры связующего материала и арматуры и удовлетворительно подтверждаться экспериментами.

Для определенности будем пользоваться в дальнейшем соотношениями, полученными в [3]:

$$a_{11} = E \left[ \frac{a}{(1-\nu^2)} + \Omega \cos^4 \psi \right], \quad a_{22} = E \left[ \frac{a}{(1-\nu^2)} + \Omega \sin^4 \psi \right] \quad (3.4)$$

$$a_{12} = a_{21} = E \left[ \frac{a\nu}{(1-\nu^2)} + \Omega \sin^2 \psi \cos^2 \psi \right], \quad a_{33} = E \left[ \frac{a}{2(1+\nu)} + \Omega \sin^2 \psi \cos^2 \psi \right]$$

$$a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0, \quad \Omega = \omega E/E_1$$

где  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего,  $E_1$  — модуль Юнга арматуры,  $\omega$  — ее удельное объемное содержание,  $\psi$  — угол

армирования,  $a$  — интенсивность прослоек связующего между арматурными слоями. Принимая  $a=v=0$ , будем иметь соотношения, соответствующие нитяной модели, не учитывающей сопротивления связующего [6-8].

При отыскании геометрии меридиана, образующегося в результате вращения кривой  $y=f(r)$  вокруг оси  $y$ , необходимо иметь в виду также следующие зависимости [1-3, 8]:

$$R_1 = -[1 + (y')^2]^{1/2}/y'', \quad R_2 = -r[1 + (y')^2]^{1/2}/y'$$

штрих означает производную по  $r$ .

Если геометрия оболочки и нагрузки заданы, то система уравнений (3.2) эквивалентна следующей:

$$d(r\epsilon_{22}^\circ)/R_1 d\varphi - \epsilon_{11}^\circ \cos \varphi = 0, \quad \epsilon_{11}^\circ \cos^2 \psi + \epsilon_{22}^\circ \sin^2 \psi = \epsilon^* \quad (3.5)$$

$$\epsilon_{11}^\circ = \frac{a_{22}N_{11} - a_{12}N_{22}}{2H(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \quad \epsilon_{22}^\circ = \frac{a_{11}N_{22} - a_{12}N_{11}}{2H(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}$$

$$N_{11} = I(r \sin \varphi)^{-1}, \quad N_{22} = R_2 p_3 - I(R_1 \sin^2 \varphi)^{-1} \quad (3.6)$$

$$I = \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (p_3 \cos \varphi - p_1 \sin \varphi) d\varphi + C_1$$

где  $C_1$  — константа интегрирования, определяемая из граничных условий для усилия  $N_{11}$  на контуре оболочки  $\varphi = \varphi_0$ .

Для конических оболочек необходимо принять  $R_1 d\varphi = ds$ ,  $r = r_0 + s \cos \varphi_0$  ( $s$  — длина дуги вдоль меридиана,  $r_0 = \text{const}$ ) и  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ . Для цилиндрических оболочек дополнительно следует принять  $\varphi_0 = \pi/2$ .

При отыскании решения о проекте безмоментной оболочки с равнонапряженной арматурой система уравнений (3.2) может рассматриваться как система относительно пар функций:  $H, \psi; p_1, p_3; H, \Omega; y, \psi; y, \Omega; \psi, \Omega$  и других, а система уравнений (3.5) — относительно пар функций  $H, \psi; H, \Omega; \psi, \Omega$ .

4. Рассмотрим некоторые примеры определения безмоментных равнопрочных проектов. Нетрудно убедиться, что частным классом решений, содержащихся в системах (3.2) и (3.5), является класс, удовлетворяющий условию  $\epsilon_{11}^\circ = \epsilon_{22}^\circ = \epsilon^*$ .

Тогда при известных нагрузках и геометрии оболочки, учитывая зависимости (3.4), (3.6), будем иметь три типа соотношений

$$\sin^2 \psi = [\alpha(N_{22} - N_{11}) + \omega E_1 N_{22}] [\omega E_1 (N_{11} + N_{22})]^{-1}$$

$$2H\epsilon^* = (N_{11} + N_{22}) (\omega E_1 + 2\alpha)^{-1}, \quad \alpha = aE(1-v)^{-1} \quad (4.1)$$

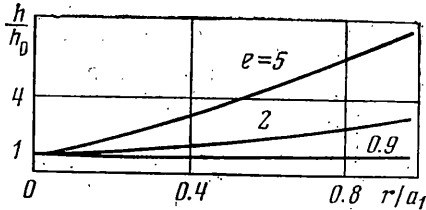
$$\sin^2 \psi = (N_{22} - 2H\alpha\epsilon^*) (N_{11} + N_{22} - 4H\alpha\epsilon^*)^{-1}$$

$$\omega E_1 = (N_{11} + N_{22} - 4H\alpha\epsilon^*) (2H\epsilon^*)^{-1} \quad (4.2)$$

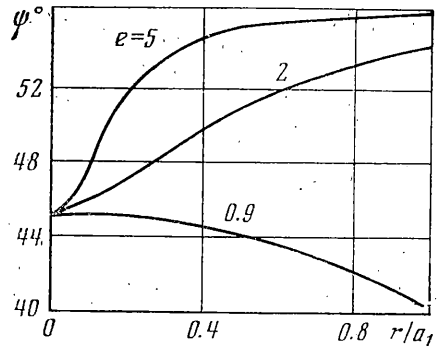
$$\omega E_1 = \alpha(N_{22} - N_{11}) (N_{11} \sin^2 \psi - N_{22} \cos^2 \psi)^{-1}$$

$$2H\epsilon^* = (N_{11} \sin^2 \psi - N_{22} \cos^2 \psi) [\alpha(\sin^2 \psi - \cos^2 \psi)]^{-1} \quad (4.3)$$

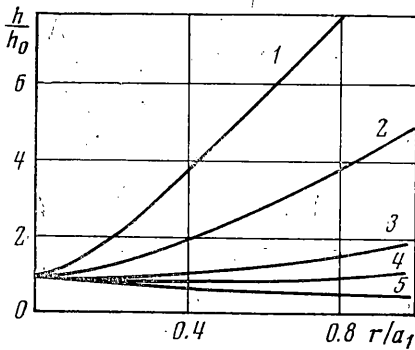
Отметим, что для решений (4.1) — (4.3) нагрузки и геометрия оболочки имеют произвольный характер. Кроме того, в (4.1) функция обильности армирования  $\omega$  произвольна, в (4.2) распределение толщины оболочки вдоль меридиана произвольно и в (4.3) изменение угла армирования  $\psi$  вдоль меридиана произвольно.



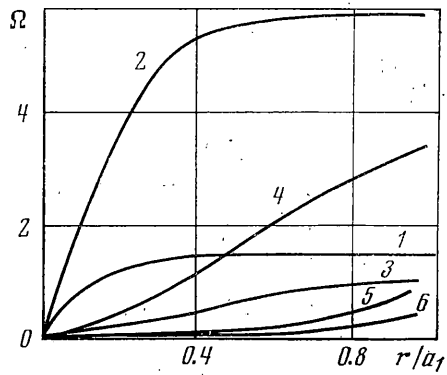
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Следует подчеркнуть, однако, что все эти решения имеют смысл, если правые части выражений (4.1) – (4.3) всюду в рассматриваемой области неотрицательны и соблюдаются требования  $\sin^2 \psi \leq 1$ ,  $\omega \leq 1$ ,  $0 \leq H < \infty$ . Эти требования могут налагать ограничения на размеры оболочки, амплитуды действующих нагрузок, механические характеристики материалов связующего и арматуры.

В случае нагрузок  $p_1 = 0$ ,  $p_3 = p = \text{const}$  из (3.6) при учете соотношения Гаусса – Кодацци и  $r = R_2 \sin \varphi$  для замкнутых оболочек будем иметь

$$N_{11} = 1/2 p R_2, \quad N_{22} = (1 - R_2 / 2R_1) p R_2 \quad (4.4)$$

При помощи формул (4.1), (4.3) и (4.4), были подсчитаны зависимости толщины и угла армирования, толщины и функции интенсивности армирования, обеспечивающие безмоментное состояние с равнонапряженной арматурой в замкнутой эллипсоидальной оболочке, нагруженной внутренним давлением  $p$ . При этом

$$R_1 = M^{2/3} a_1^{-1} a_2^{-1}, \quad R_2 = M^{1/2} a_2^{1/2}, \quad M = a_1^4 - r^2 (a_1^2 - a_2^2) \quad (4.5)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  – полуоси эллипса.

Расчеты, представленные на фиг. 1, 2, выполнены при  $\Omega = \omega E_1 / aE = 20$  (материал  $E$  – стекло + эпоксидная смола) для трех значений  $e = a_2 / a_1$ , указанных на фигурах. Расчеты, приведенные на фиг. 3, 4, выполнены для следующих значений параметров  $e$  и  $\psi$ : кривые 1 –  $e=10$ ,  $\psi=90^\circ$ ; 2 –  $10,60^\circ$ ; 3 –  $2,90^\circ$ ; 4 –  $2,60^\circ$ ; 5 –  $0,9,30^\circ$ ; 6 –  $0,9,0^\circ$ .

Как видно из этих графиков, существуют достаточно широкие возможности по созданию безмоментных сосудов давления с равнонапряженной арматурой. При этом вопрос выбора того или иного из этих сосудов определяется технологическими соображениями и требованием обеспечения максимальной прочности.

Первые выражения в (4.1) и (4.2), очевидно, эквивалентны следующим:

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \{N_{22}[\omega E_1 N_{11} + \alpha(N_{22} - N_{11})]\} [\omega E_1 N_{11}^2 + \alpha N_{22}(N_{11} - N_{22})]^{-1}$$

$$\operatorname{tg}^2 \psi = (N_{22} - 2H\alpha\varepsilon^*) (N_{11} - 2H\alpha\varepsilon^*)^{-1}$$

В частном случае «нитяной модели» ( $\alpha=0$ ) в обоих случаях будем иметь  $\operatorname{tg}^2 \psi = N_{22}N_{11}^{-1}$ . Отсюда видно, что при армировании вдоль меридиана в этом случае  $N_{22}=0$ .

Из вторых соотношений в (4.1) и (4.2) следует, что безмоментное состояние с равнонапряженной арматурой будет реализовано в рамках нитяной модели, если функция обильности армирования подчиняется зависимости

$$\omega E_1 = N_{11}(2H\varepsilon^*)^{-1} \quad (4.6)$$

при этом нагрузки, действующие на оболочку, и ее форма не могут быть произвольными, а должны подчиняться следующему соотношению:  $p_3 R_2 - IR_2 (rR_1 \sin \varphi)^{-1} = 0$ .

В частном случае нагружения, когда  $p_1=0$ ,  $p_3=p=\text{const}$ , это уравнение сводится к следующему:  $2=R_2 R_1^{-1}$  и определяет оболочку, меридиан которой является эллипсом Эйлера [9]. Такая оболочка была рекомендована в качестве равнопрочного днища в [10] и затем последовательно в [6-8].

Как видим, для обеспечения безмоментного состояния в такой оболочке и условия равнонапряженности арматуры ее функция обильности должна подчиняться закону (4.6), который при использовании для меридиональной кривой выражения (5б) из [10] и учета соотношений (4.8) принимает вид  $4H\omega E_1 \varepsilon^* = pa^2 r^{-1}$  ( $a$  — радиус цилиндра, сопрягаемого с днищем).

Из соотношений для  $\varepsilon_{11}^\circ$  и  $\varepsilon_{22}^\circ$  в (3.6) (в рамках подкласса  $\varepsilon_{11}^\circ = \varepsilon_{22}^\circ = \varepsilon^*$ ) получим следующие уравнения для меридианов и толщины безмоментной оболочки с равнонапряженной арматурой:

$$\frac{y''}{y'(1+y'^2)} = 2r - \frac{(a_{22} + a_{12})}{(a_{11} + a_{12})r}, \quad 2H\varepsilon^* = -\frac{pr(1+y'^2)^{1/2}}{2(a_{11} + a_{12})y'} \quad (4.7)$$

При этом содержащиеся в (4.7) функции угла армирования  $\psi$  и интенсивности армирования  $\omega$ , вообще говоря, произвольны. Поэтому (4.7) определяет достаточно широкий класс меридиональных кривых, определяемых формулой

$$y = C_2 \pm C_1^{1/2} \int \frac{r^2 dr}{[f^2 - C_1(r^2 - r_0^2)]^{1/2}}, \quad f = \exp \int \frac{(a_{22} + a_{12}) dr}{(a_{11} + a_{22})r}$$

где  $C_1, C_2$  — константы интегрирования.

Существует, однако, подкласс решений, для которых  $\varepsilon_{11}^\circ \neq \varepsilon_{22}^\circ$ . При произвольном нагружении оболочек этот подкласс можно определить из системы (3.5), (3.6). В частном случае, когда  $p_1=0$ ,  $p_3=p=\text{const}$ , из (3.5),



(3.6) с учетом соотношения (4.4) для меридиональной кривой получим следующее уравнение:

$$ry''[y'(1+y'^2)]^{-1} = 2 - F_0(r) \quad (4.8)$$

$$F_0 = [ra_{12}\theta_2 + z_1(a_{22} - ra_{12}\theta_1)] [ra_{11}\theta_2 + (a_{12} - ra_{11}\theta_1)z_1]^{-1}$$

$$z_1 = r\varepsilon_{22}^0 = \exp(-F_1) \left[ C_3 + \int \theta_2 \exp F_1 dr \right]$$

$$F_1 = \int \theta_1 dr, \quad \theta_1 = r^{-1} \operatorname{tg}^2 \psi, \quad \theta_2 = \varepsilon^* (\cos \psi)^{-2}$$

где  $C_3$  — константа интегрирования.

При этом толщина соответствующей безмоментной оболочки с равнонапряженной арматурой определяется из равенства

$$2H = [-pr^2(1+y'^2)^{1/2}] \{y' [a_{11}\theta_2 r + (a_{12} - ra_{11}\theta_1)z_1]\}^{-1}$$

Решение уравнения (4.8) принимает вид

$$y = C_5 \pm C_4^{1/2} \int \frac{r^2 dr}{[e^{2F_2} - C_4 r^4]^{1/2}}, \quad F_2 = \int F_0 r^{-1} dr$$

где  $C_4$  и  $C_5$  — константы интегрирования.

Поступила 4 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1963.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
3. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек, ч. 2. Изд-во ЛГУ, 1964.
4. Рейснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек. В сб.: Упругие оболочки. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя. ПМТФ, 1969 № 6.
6. Pipkin A. C., Rivlin R. S. Minimum-weight design for pressure vessels reinforced with inextensible fibres. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1963, т. 30, № 1.)
7. Schuerch H. U., Burggraf O. R. Analytical design for optimum filamentary pressure vessels. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 5. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 5.)
8. Елпагьевский А. Н., Васильев В. В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М., «Машиностроение», 1972.
9. Геккелер И. В. Статика упругого тела. Л.—М., Гостехиздат, 1934.
10. Zickel J. Isotenoid pressure vessels. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 6. (Рус. перев.: Ракетная техника. Ж. Америк. ракетн. о-ва, 1962, № 6.)