

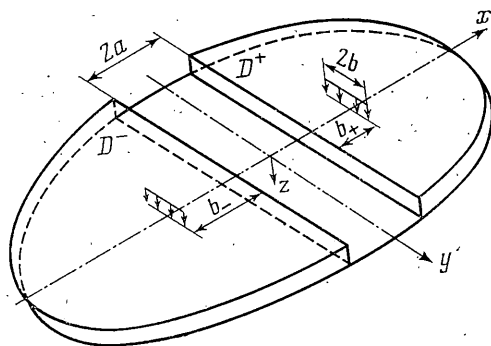
ИЗГИБ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИНОК,  
ЛЕЖАЩИХ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ  
ОБЩЕГО ТИПА

В. Л. ВОРОБЬЕВ, Г. Я. ПОПОВ, Г. Н. СЕРДЮК

(Одесса)

На основе [1] построено приближенное решение названной задачи без учета сил касательного взаимодействия в зоне контакта. Численная реализация проведена применительно к основанию в виде упругого полупространства и для случая одинаковых и равнозагруженных (у краев) пластинок.

1. Рассмотрим линейно-деформируемое основание, ядро которого, т. е. функция, описывающая перемещение поверхностных точек основания под действием единичной силы, приложенной в начале координат, имеет вид [1]:



$$k(x, y) = \frac{\theta}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} H(t, \tau) e^{-itx} e^{-i\tau y} dt d\tau \quad (1.1)$$

Здесь  $H(t, \tau)$  — плотность ядра основания, имеющая асимптотику

$$H(t, \tau) = t^{\nu-1} [1 + O(1)] \quad (0 \leq \nu \leq 1) \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Пусть на указанном основании (см. фигуру) лежат на расстоянии  $2a$  одна от другой две полубесконечные пластины (с жесткостями  $D^+$  и  $D^-$ ), нагруженные произвольными вертикальными нагрузками  $q^\pm(x, y)$ . Знаками плюс и минус здесь и в дальнейшем будем отмечать функции, определенные соответственно на интервалах  $(a, \infty)$  и  $(-\infty, -a)$ .

Для определения вертикальных перемещения пластинки  $w^\pm(x, y)$  и контактных напряжений  $p^\pm(x, y)$  имеем следующую систему уравнений [2]:

$$D^\pm \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w^\pm(x, y) = q^\pm(x, y) - p^\pm(x, y) \quad (x \geq a, x \leq -a) \quad (1.3)$$

$$w^\pm(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{-a} k(x-\xi, y-\eta) p^-(\xi, \eta) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_a^{+\infty} k(x-\xi, y-\eta) p^+(\xi, \eta) d\xi \quad (-\infty < x, y < \infty)$$

Решение дифференциальных уравнений системы (1.3) должно удовлетворять условиям затухания на бесконечности и условиям на торцах пластинок (последние будут даны позже). Применяя к системе (1.3) и крайним условиям преобразование Фурье по  $y$  с параметром  $\lambda$ , получим

$$D^{\pm} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 w_{\lambda}^{\pm}(x) = q_{\lambda}^{\pm}(x) - p_{\lambda}^{\pm}(x) \quad (x \geq a, x \leq -a)$$

$$w^{\pm}(x) = \int_{-\infty}^{-a} k_{\lambda}(x-\xi) p_{\lambda}^{-}(\xi) d\xi + \int_a^{+\infty} k_{\lambda}(x-\xi) p_{\lambda}^{+}(\xi) d\xi$$

$$k_{\lambda}(z) = \frac{\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, \lambda) e^{-izt} dt \quad (1.4)$$

$$\left[ \frac{d^2 w_{\lambda}^{\pm}}{dx^2} - \mu_{\pm} \lambda^2 w_{\lambda}^{\pm} \right]_{x=\pm a} = \frac{M_{\pm}^{\pm}}{D^{\pm}}, \quad \left[ \frac{d^3 w_{\lambda}^{\pm}}{dx^3} - (2 - \mu_{\pm}) \lambda^2 \frac{dw_{\lambda}^{\pm}}{dx} \right]_{x=\pm a} = -\frac{Q_{\pm}^{\pm}}{D^{\pm}} \quad (1.5)$$

где  $M_{\pm}^{\pm}$ ,  $Q_{\pm}^{\pm}$  — преобразования Фурье заданных момента и поперечной силы, действующих по торцу;  $\mu_{\pm}$  — коэффициенты Пуассона материала пластинок; индексом  $\lambda$  отмечены трансформанты Фурье соответствующих величин.

Считая  $\lambda > 0$ , общие исчезающие на бесконечности решения системы (1.4) будем искать в виде

$$\theta^{-1} w_{\lambda}^{\pm}(x) = [d_0^{\pm} \pm d_1^{\pm} \lambda (x \mp a)] e^{\mp \lambda (x \mp a)} \pm c_{\pm} \int_{\pm a}^{\pm \infty} G_2(x-\xi) [q_{\lambda}^{\pm}(\xi) - p_{\lambda}^{\pm}(\xi)] d\xi$$

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iuz}}{(u^2 + \lambda^2)^n} du, \quad c_{\pm}^{-1} = \theta D^{\pm} \quad (1.6)$$

Произведя в (1.4), (1.6) замену

$$\lambda(x-a) = t, \quad \lambda(\xi-a) = s, \quad \lambda a = \alpha, \quad \lambda^{-1}[p_{\lambda}(t/\tau), q_{\lambda}(t/\tau)] = [p(t), q(t)]$$

и подставляя (1.6) в последнее уравнение системы (1.4), получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} v^{\pm}(t-s) p^{\pm}(\pm s \pm \alpha) ds + \int_0^{\infty} k_{\lambda}(t+s+2\alpha) p^{\mp}(\mp s \mp \alpha) ds = f^{\pm}(t) \quad (1.7)$$

$$v^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \lambda H(\lambda t, \lambda) + \frac{c_{\pm} \lambda^{-3}}{(t^2 + 1)^2} \right] e^{-izt} dt \quad (1.8)$$

$$f^{\pm}(t) = [d_0^{\pm} + d_1^{\pm} t] e^{-t} + c_{\pm} \int_0^{\infty} G_2(t-s) q^{\pm}(\pm s \pm \alpha) ds$$

Учитывая поведение на бесконечности функции (1.2), выделим сингулярную часть из ядра (1.8)

$$V(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-izt}}{(t^2+1)^{1/2(1-\nu)}} dt = \frac{2^{1/2\nu} K_{1/2\nu}(|z|)}{\sqrt{\pi} \Gamma[1/2(1-\nu)] |z|^{1/2\nu}} \quad (1.9)$$

где  $K_n(z)$  — функция Макдональда. В этом случае ядро интегрального уравнения (1.7) можно представить в виде

$$v^\pm(z) = V(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_\pm(z) e^{-izt} dt \quad (1.10)$$

$$D_\pm(z) = c_\pm \lambda^{-3} (t^2+1)^{-2} + H(t, \lambda) - (1+t^2)^{1/2(\nu-1)}$$

Функция  $D_\pm(t)$  является регулярной [3]. Учитывая спектральное соотношение [4]:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^{-1/2}}{\Gamma[1/2(1-\nu)]} \int_0^{+\infty} \frac{K_{1/2\nu}(|t-\tau|)}{|t-\tau|^{1/2\nu}} e^{-\tau} (2\tau)^{1/2(\nu-1)} L_n^{1/2(\nu-1)}(2\tau) d\tau = \\ = \Gamma[1/2(1-\nu) + n] (n!)^{-1} e^{-t} L_n^{1/2(\nu-1)}(2t) \end{aligned}$$

а также формулы (1.9) и (1.10), решение системы интегральных уравнений (1.7) будем искать в виде [1]:

$$p^\pm(\pm s \pm \alpha) = e^{-s} (2s)^{1/2(\nu-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m^\pm}{\sigma_m} L_m^{1/2(\nu-1)}(2s), \quad \sigma_m = \frac{\Gamma[1/2(1+\nu) + m]}{m!} 2^{1/2(1-\nu)} \quad (1.11)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера,  $L_n^\alpha(z)$  — полиномы Чебышева — Лагерра.

Подставим (1.11) в (1.7) и умножим обе части уравнения на сомножитель  $\sigma_n^{-1} e^{-\tau} \tau^{1/2(\nu-1)} 2^{1/2\nu} L_n^{1/2(\nu-1)}(2\tau)$ .

После интегрирования уравнения (1.7) на интервале  $(0, \infty)$  получим бесконечную систему для определения коэффициентов  $\varphi_m^\pm$

$$\begin{aligned} \varphi_n^\pm + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m^\pm}{\sigma_m \sigma_n} a_{n-m}^\pm + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m^\mp}{\sigma_m \sigma_n} b_{n+m}^\mp = f_n^\pm \quad (n=0,1,2,\dots) \\ a_k^\pm = \frac{(-1)^k}{\pi} \int_0^{\pi} D_\pm\left(\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}\right) \cos^{\nu-1} \frac{\psi}{2} \cos k\psi d\psi \quad (1.12) \end{aligned}$$

$$b_k^\mp = \frac{(-1)^{k+1} W_{-1/2\nu-k-1/2, 1/2}(4\alpha)}{\Gamma[1/2(1-\nu)-k]} + 2(-1)^{k+1} \alpha^{1/2\nu} \sum_{j=-N}^N d_j^\pm \frac{W_{j-k, -1/2-1/2\nu}(4\alpha)}{\Gamma(j+1/2-k)}$$

$$f_n^\pm = \frac{2^{1/2\nu}}{\sigma_n} \int_0^\infty f^\pm(\xi + \alpha) e^{-\xi} \xi^{1/2(\nu-1)} L_n^{1/2(\nu-1)}(2\xi) d\xi$$

где  $W_{\lambda, \mu}$  — функция Уиттекера. При выводе зависимостей (1.12) использовались формулы 7.414(5) и 3.384(6) из [5]. Коэффициенты  $d_j^\pm$  получены в результате разложения функции  $D_\pm(t)$  в ряд [6]:

$$D_\pm(t) = 2 \sum_{j=-N}^N d_j^\pm \left( \frac{1+it}{1-it} \right)^j \frac{(-1)^j}{1-it}$$

Формулы для коэффициентов аппроксимации  $d_j^\pm$  приведены в [6]. В общем случае основания коэффициенты системы можно вычислить методом тригонометрической интерполяции [7]. В частном случае основания в виде упругого однородного изотропного полупространства ( $\nu=0$ ,  $\lambda H(\lambda t, \lambda) = (1+t^2)^{-1/2}$ ) их можно при помощи формул 8.339(4) из [5] записать таким образом:

$$a_k^\pm = 12c_\pm [\pi \lambda^3 (1-4k^2) (9-4k^2)]^{-1}$$

$$b_k^\pm = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp[-2\lambda a(t+1)] t^{k-1/2} (2+t)^{-k-1/2} dt$$

Запишем правые части  $f_n^\pm$  для нагрузок, действующих вдоль линий, параллельных краям пластинок, т. е. когда  $f_n^\pm = \delta(t - \beta_\pm)$  ( $\beta_\pm = \lambda b_\pm$ ,  $b_\pm$  — расстояния от краев соответствующих пластинок до линии действия нагрузок). Они имеют вид ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера)

$$f_n^\pm = d_0^\pm \delta_{0n} + d_1^\pm \left( \frac{\delta_{0n}}{4} - \frac{\delta_{1n}}{2} \right) + c_\pm F_n^{2,0}(\beta_\pm) \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (1.13)$$

$$F_n^{j,0}(z) = \frac{\cos \pi(j+1/2\nu)}{\pi 2^{2j-1} e^z} \Gamma[1/2(1-\nu) - j - n] \Psi[-n - j + 1/2(1-\nu), 2j + 1/2(3-\nu); 2z]$$

$$F_n^{j,1}(z) = \frac{d}{dz} F_n^{j,0}(z)$$

Здесь  $\Psi(a-n, c; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода [5, 8], которую можно записать в зависимости от  $n$  либо через неполную гамма-функцию, либо через полиномы Чебышева — Лагерра. Формулы (1.13) получены с использованием [9]. Заметим, что в случае действия нагрузок на торцах пластинок ( $b_\pm=0$ ) в формулах (1.13) следует положить  $F_n^{2,0}(\beta_\pm) = 0$ .

Если найдены коэффициенты  $\varphi_n^\pm$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), то подставляя (1.11) в (1.6), получим трансформанты Фурье прогибов пластинок. Расчетные усилия легко получить по известным формулам. Например, для трансформанты Фурье изгибающего момента  $M_y$  будем иметь следующую формулу:

$$M_y^\pm(x) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda^2}{c_\pm} [(1-\mu_\pm) d_0^\pm + 2\mu_\pm d_1^\pm + (1-\mu_\pm) d_1^\pm \lambda(x \mp a)] e^{\mp \lambda(x \mp a)} - \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_m^\pm [\mu F_m^{4,0}(\lambda x) + (1-\mu) F_m^{2,0}(\lambda x)] \right\} - M_y^*(x, b_\pm) \quad (1.14)$$

$$M_y^*(x, b_\pm) = (1-\mu) \lambda^2 [G_2(\lambda |x \mp a \mp b_\pm|) - G_1(\lambda |x \mp a \mp b_\pm|)]$$

где постоянные  $d_0^\pm$ ,  $d_1^\pm$  определяются из решения системы, полученной из (1.5) при подстановке в нее формул (1.6) и (1.14). Она имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^3 c_{\pm}^{-1} [2d_1^{\pm} - (1 - \mu_{\pm}) d_0^{\pm}] - m_1 \varphi_0^{\pm} - m_2 \varphi_1^{\pm} &= M_x^{\pm} + M_x^*(0, b_{\pm}) \\ \lambda^3 c_{\pm}^{-1} [(1 + \mu_{\pm}) d_1^{\pm} - (1 - \mu_{\pm}) d_0^{\pm}] + m_3 \varphi_0^{\pm} - m_2 \varphi_1^{\pm} &= Q_x^{\pm} + Q_x^*(0, b_{\pm}) \\ 16m_1 &= 3 + 5\mu_{\pm} - \nu(1 - \mu_{\pm}), \quad 8m_2 = 1 - \mu_{\pm}, \quad 16m_3 = 9 - \mu_{\pm} + \nu(1 - \mu_{\pm}) \end{aligned}$$

Для величин  $M_x^*(0, b_{\pm})$ ,  $Q_x^*(0, b_{\pm})$  справедливы формулы, аналогичные  $M_y^*(x, b_{\pm})$  из (1.14) при  $x=0$ . Если нагрузка приложена в торцах пластинок, то все они равны нулю.

2. Бесконечные системы уравнений (1.12) можно решать методом редукции. Для применения этого метода нужно доказать регулярность этих систем [10], т. е. чтобы имело место неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n-m}| + \sum_{m=0}^{\infty} |b_{n+m}| < 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

В общем случае основания регулярность системы доказать затруднительно. Поэтому рассмотрим частный случай основания в виде упругого однородного изотропного полупространства. В [9] дана оценка

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n-m}| \leq \frac{16\pi\theta}{15\lambda^3 D}, \quad D = \min(D_+, D_-)$$

Просуммируем второе слагаемое в (2.1). Учитывая (1.12), запишем его в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |b_{n+m}| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \leq \frac{2l^{-\lambda\alpha}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1/2}}{(2+t)^{k+3/2}} dt = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\pi} e^{-2\lambda\alpha} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

где  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  — гипергеометрическая функция. При установлении последнего равенства были использованы формулы 3.194(3) из [5]. Суммирование гипергеометрической функции при помощи формулы 9.121(9) из [5] вместо (2.1) приводит к следующей оценке:

$$\frac{16\pi\theta}{15\lambda^3 D} + 8\pi^{-1} \ln(\sqrt{2}+1) e^{-2\lambda\alpha} < 1$$

В случае, если коэффициенты системы будут ограничены, то путем замены  $\Psi_n^{\pm} = \gamma_n \varphi_n^{\pm}$  ее можно привести к регулярной [10].

3. Для удобства вычислений будем предполагать, что действующие на пластинки нагрузки изменяются периодически с периодом  $2l$  относительно оси  $y$

$$q^{\pm}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\pm}(x) e^{i\lambda_k y}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \quad (3.1)$$

Тогда искомые функции будут иметь вид [11]:

$$[p^{\pm}(x, y), w^{\pm}(x, y)] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [p^{\pm}(x), w^{\pm}(x)] e^{i\lambda_k y} \quad (3.2)$$

При таком предположении останутся справедливыми все ранее полученные формулы, но при решении системы алгебраических уравнений (1.12) будет зафиксирован параметр  $\lambda = \lambda_k = k\pi/l$ .

Например, для изгибающего момента  $M_y^+(0, y)$  будем иметь формулу

$$M_y^+(0, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \frac{\lambda_k^2}{c_+} [(1-\mu_+)d_0^+ + 2\mu_+d_1^+] - \frac{5+3\mu_+}{16} \varphi_0^+ + \frac{1-\mu_+}{8} \varphi_1^+ \right\} \cos \lambda_k y \quad (3.3)$$

вытекающую из (3.2) и (1.14) при  $x=0$ . Для проведения вычислений в качестве основания было принято упругое однородное изотропное полупространство [12]:

$$\nu=0, \quad H(t, \lambda_k) = (t^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \theta = E_0/[2(1-\mu_0^2)]$$

где  $E_0$  — модуль упругости,  $\mu_0$  — коэффициент Пуассона полупространства. По торцам пластинок действуют равномерно распределенные на участках длиной  $2b$  периодические (с периодом  $2l$ ) нагрузки. Параметры задачи  $D_+ = D_- = D$ ,  $q_+ = q_- = 1$ ,  $c_+ = c_- = c = E_0 h^3 [12D(1-\mu_0^2)]^{-1}$ ,  $c = 0.1$ ,  $c = 0.01$ ,  $\mu_+ = 1/4$ ,  $\mu_0 = 1/3$ ,  $l/b = 4, 5, 6$ ,  $\pi h/a = 1$ ,  $a/b = 0, 1/2, 1, 2, 4, 6, 7$  ( $h$  — толщина пластинки).

В результате вычислений было обнаружено, что при  $l/b \geq 4$  нагрузки, приложенные к соседним участкам, не влияют одна на другую и поэтому можно считать, что к пластинкам приложена только одна нагрузка на участке длиной  $2b$ , как это показано на фигуре. Значения изгибающего момента  $M_y^+(0, y)/h$  в зависимости от  $y = b/l$  приводятся в таблице для  $c = 0.01$  и  $c = 0.1$  соответственно.

$c$	$y=0.0$	$y=0.5$	$y=1.0$	$y=1.5$	$y=2.0$	$y=3.0$	$y=4.0$
Приближенное решение при $a/b > 4$							
0.01	1.53	1.38	0.68	0.05	-0.28	-0.39	-0.43
0.1	0.63	0.58	0.14	-0.28	-0.31	-0.14	-0.10
Приближенное решение при $a=0$							
0.01	1.67	1.52	0.79	-0.02	-0.25	-0.41	-0.40
0.1	0.75	0.69	0.20	-0.27	-0.34	-0.20	-0.16
Точное решение для неограниченной пластинки							
0.01	1.82	1.68	1.07	0.42	0.17	0.03	-0.07
0.1	0.86	0.79	0.34	0.10	-0.16	-0.12	-0.09

Вычисления показали, что при  $a/b > 4$  значения изгибающего момента совпадают с аналогичными значениями, полученными в [12] для одной пластинки. Следовательно, при  $a/b > 4$  расчетные усилия в пластинках можно определять, решая более простую задачу об изгибе одной пластинки на упругом основании.

При уменьшении  $a/b$  максимальный изгибающий момент  $M_y$  растет и когда расстояние между пластинками равно нулю ( $a=0$ ), его значения приведены выше.

Очевидно, случай  $a=0$  соответствует схеме изгиба неограниченной пластинки, ослабленной разрезом вдоль линии приложения равномерно распределенной на участке длиной  $2l$  нагрузки интенсивностью  $q=2$ . Представляет интерес сопоставление полученных значений изгибающего момента для разрезанной пластики при загрузении ее по берегам разреза с соответствующими результатами при отсутствии разреза, но при прежнем значении нагрузки. Для неослабленной разрезом неограниченной пластинки соответствующие значения изгибающего момента, приведенные выше, получены по точному решению работы [13]. Из сопоставления видим, что ослабление конструкции (разрез пластинки) указанным выше способом привело не к росту (как обычно) расчетного усилия  $M_y$ , а к его уменьшению.

О том, что полученный результат не связан с приближенностью полученного здесь решения, свидетельствует следующее обстоятельство. Напряженное состояние

неограниченной пластинки симметрично относительно оси  $y$ , идущей вдоль линии загрузки, и поэтому поперечная сила  $Q_x(0, y) = 0$ .

Следовательно, ослабление пластинки разрезом вдоль оси  $y$  (фигура,  $a=0$ ) эквивалентно шарнирному ослаблению ее вдоль той же оси. Задача же об изгибе неограниченной пластинки, шарнирно ослабленной вдоль всей оси  $y$ , допускает точное решение [14]. Поэтому представилась возможность сопоставить числовые данные, полученные на основе этого точного решения, с соответствующими значениями, полученными на основе предложенного здесь приближенного решения. Оказалось, что числовые данные по обоим решениям полностью совпали.

Неожиданный факт уменьшения расчетного усилия в результате ослабления конструкции в разбираемом случае можно объяснить, по-видимому, тем что ликвидация этого ослабления (разрез вдоль оси  $y$ ) эквивалентна приложению к обоим берегам разреза дополнительной моментной нагрузки равной  $M_x(0, y)$  в неразрезанной пластинке. Как подтвердили соответствующие вычисления дополнительная нагрузка увеличила осадки поверхностных точек основания, что и привело к росту значения  $\max M_y$ .

При счете суммирование бесконечного ряда проводилось на основе [12]. Необходимо отметить, что с ростом  $c$  и с уменьшением  $a$  сходимость ряда ухудшается.

Поступила 19 V 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. О сведениях интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
2. Попов Г. Я. Пластинки на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1972, т. 8, вып. 3.
3. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских задач теории упругости. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1961, т. 14, № 3.
4. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактному задачам. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Градштейн Н. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1968.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
9. Зюкин Ю. П., Паскаленко А. А., Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной пластины на линейно-деформируемом основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1952.
11. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1964, т. 25, вып. 2.
12. Воробьев В. Л., Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной пластины, сцепленной с линейно-деформируемым основанием общего типа. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
13. Попов Г. Я. Про згин нескінченно довгих послаблених шарнірами балок, що лежать на пружній основі. Прикл. механ., 1959, т. 5, вип. 4.
14. Серебряный Р. В. Расчет тонких шарнирно соединенных плит на упругом основании. М., Гостройиздат, 1962.