

УПРАВЛЕНИЕ ПОХОДКОЙ ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

Ю. В. БОЛОТИН, И. В. НОВОЖИЛОВ

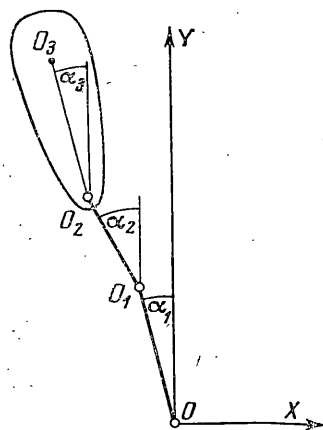
(Москва)

Задача управления двуногим шагающим аппаратом чаще всего ставится как обратная задача механики. Движение системы по всем или части переменных при этом задается явными функциями времени [1, 2]. В [3] для задачи о движении аппарата в фазе опоры на одну ногу построено управление с обратными связями по переменным. Движение корпуса аппарата в [3] не учитывалось.

В данной работе управление циклической походкой двуногого аппарата строится в ходе решения двух задач. В первой рассматривается движение аппарата в фазе опоры на одну ногу. Движение корпуса учитывается. Управление формируется по рассогласованиям текущих значений фазовых переменных от их программных значений. Во второй задаче циклическая походка аппарата получается «склеиванием» движений в фазе опоры для последовательно чередующихся ног. В каждый момент времени аппарат опирается только на одну ногу. Управление этим процессом осуществляется за счет выбора точки постановки переносимой ноги.

1. Рассмотрим плоское движение аппарата над горизонтальной опорной поверхностью в фазе опоры на одну ногу (фиг. 1). Пусть корпус аппарата — тяжелый, инерционный, ноги — двузвенные (бедро, голень), безынерционные, прикрепленные к корпусу в одной точке, не совпадающей с его центром масс. Моменты управления задаются между корпусом и бедром, бедром и голенью. В качестве желательного программного движения точки крепления ног принимаем: по горизонтальному направлению — движение с постоянной скоростью, по вертикальному — выведение по заданной экспоненте на постоянную высоту. От движения корпуса требуем ограниченности угла отклонения от вертикали. В точке опоры допускаем реакции любого знака (нога на присоске).

Динамика аппарата описывается системой из уравнений движения центра масс O_3 и уравнения моментов относительно точки O_2 крепления ноги, составленными для аппарата в целом, уравнения моментов для системы «бедро + голень» относительно точки O_2 , уравнения моментов для голени относительно точки O_1 соединения звеньев ноги и, наконец, из геометрических соотношений



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
 MX_3'' &= R_x, & MY_3'' &= R_y - Mg \\
 I\alpha_3'' &= R_x Y_2 - R_y X_2 + M(g + Y_2'') L_3 \sin \alpha_3 + M X_2'' L_3 \cos \alpha_3 \\
 Q_2 &= R_y X_2 - R_x Y_2, & Q_1 &= R_y X_1 - R_x Y_1 \\
 X_3 &= X_2 - L_3 \sin \alpha_3, & X_2 &= X_1 - L_2 \sin \alpha_2, & X_1 &= -L_1 \sin \alpha_1 \\
 Y_3 &= Y_2 + L_3 \cos \alpha_3, & Y_2 &= Y_1 + L_2 \cos \alpha_2, & Y_1 &= L_1 \cos \alpha_1
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени T , M — масса корпуса, I — момент инерции корпуса относительно точки O_2 ; L_1, L_2, L_3 — длины голени, бедра, корпуса, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы, образованные ими с вертикалью соответственно; $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ — декартовы координаты точек O_1, O_2, O_3 относительно системы отсчета с началом в точке O опоры ноги; оси OX и OY ориентированы в горизонтальном и вертикальном направлении соответственно. Через Q_1, Q_2 в (1.1) обозначены моменты управления в точках O_1 и O_2 , через R_x, R_y — составляющие реакции, действующей на систему в точке опоры O .

В определении знаков реакций здесь исправлена неточность, допущенная в [3].

В качестве управления, реализующего требуемое движение точки крепления ноги, как и в [3], выберем линейное управление по рассогласованиям. Запишем закон управления в матричном виде

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = KF \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Здесь K — коэффициент «жесткости» управления, F — квадратная матрица, при помощи которой задается способ перераспределения сигналов рассогласования U_x, U_y между двигателями в зависимости от «позы» аппарата.

Предположим, что положение и скорость точки O_2 могут быть измерены. Сформируем сигналы рассогласования в следующем виде:

$$U_x = X_2^* - V, \quad U_y = Y_2^* + T_0^{-1}(Y_2 - H) \quad (1.3)$$

При $U_x = U_y = 0$ продольная скорость имеет программное значение $V = \text{const}$, а по высоте осуществляется выход на программный уровень $H = \text{const}$ по экспоненте с постоянной времени T_0 .

Запишем динамические уравнения из (1.1) в новых переменных. Сначала сделаем замену от переменных X_3, Y_3 к X_2, Y_2 . Затем при помощи соотношений (1.3) перейдем от фазовых переменных $X_2, X_2^*, Y_2, Y_2^*, \alpha_3, \alpha_3^*$ к переменным $X_2, U_x, Y_2, U_y, \alpha_3, \Omega$. Получаем

$$\begin{aligned} U_x^* &= M^{-1}R_x - L_3(\Omega^2 \sin \alpha_3 - \Omega^* \cos \alpha_3) \\ U_y^* &= M^{-1}R_y - g + L_3(\Omega^2 \cos \alpha_3 + \Omega^* \sin \alpha_3) + T_0^{-1}[U_y - T_0^{-1}(Y_2 - H)] \\ X_2^* &= U_x + V, \quad Y_2^* = U_y - T_0^{-1}(Y_2 - H), \quad \alpha_3^* = \Omega \\ I\Omega^* &= R_x Y_2 - R_y X_2 + M\{g + U_y^* - T_0^{-1}[U_y - T_0^{-1}(Y_2 - H)]\} \times \\ &\quad \times L_3 \sin \alpha_3 + M U_x^* L_3 \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В качестве уравнений движения аппарата будем далее рассматривать систему, образованную уравнениями (1.2), (1.4) и конечными соотношениями системы (1.1). Приведем эту систему к безразмерному, нормализованному виду, сделав замену

$$t = T/T_*, \quad u_x = U_x/U_*, \quad x_1 = X_1/L_*, \quad l_1 = L_1/L_*, \quad \omega = \Omega/\Omega_* \quad (1.5)$$

$$r_x = R_x/R_*, \quad q_1 = Q_1/Q_*, \dots$$

Здесь T_*, U_*, L_*, \dots — характерные значения соответствующих величин. Зададим их следующим образом:

$$\begin{aligned} L_* &= H, \quad T_* = L_* V^{-1}, \quad \Omega_* = T_*^{-1}, \quad R_* = Mg \\ Q_* &= R_* L_*, \quad U_* = Q_* K^{-1}, \quad K = L_* M T^{-1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выражение для K в (1.6) записано из соображений размерности, а постоянная T_1 имеет размерность времени. Подставив (1.5), (1.6) в (1.1), (1.2), (1.4), получим

$$\begin{aligned} \mu u_x' &= r_x - \kappa l_3 (\omega^2 \sin \alpha_3 - \omega' \cos \alpha_3) \\ \mu u_y' &= r_y - 1 + \kappa l_3 (\omega^2 \cos \alpha_3 + \omega' \sin \alpha_3) + \tau_0^{-1} [\mu u_y - \kappa \tau_0^{-1} (y_2 - 1)] \\ x_2' &= \mu \kappa^{-1} u_x + 1, \quad y_2' = \mu \kappa^{-1} u_y - \tau_0^{-1} (y_2 - 1), \quad \alpha_3' = \omega \\ \rho^2 \kappa \omega' &= r_x y_2 - r_y x_2 + \{1 + \mu u_y' - \tau_0^{-1} [\mu u_y - \kappa \tau_0^{-1} (y_2 - 1)]\} \times \\ &\quad \times l_3 \sin \alpha_3 + \mu u_x' l_3 \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \\ q_2 &= r_y x_2 - r_x y_2 \\ q_1 &= r_y x_1 - r_x y_1 \end{aligned}$$

$$x_2 = x_1 - l_2 \sin \alpha_2, \quad x_1 = -l_1 \sin \alpha_1, \quad y_2 = y_1 + l_2 \cos \alpha_2, \quad y_1 = l_1 \cos \alpha_1$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по t ; $\mu = T_1/T_*$, $\tau_0 = T_0/T_*$, $\kappa = L_*/T_*^2 g$, $\rho^2 = I/ML_*^2$.

Будем рассматривать далее случай «жесткого» управления. При этом в (1.2) следует считать коэффициент K «большим» или, что то же, множитель T_1 в (1.6) — «малым». Примем $T_1 \ll T_*$, T_0 . Тогда в (1.7) при части производных появится малый параметр $\mu \ll 1$. Для построения приближенного решения этой системы воспользуемся методом из [4, 5]. Рассматриваемые в [4, 5] системы уравнений записаны в форме Коши. Если привести (1.7) к этому виду, то малый параметр μ будут иметь множителем только производные переменных u_x , u_y . По [4, 5] эти переменные будем называть «быстрыми», все остальные — «медленными».

Движение системы по быстрым составляющим описывается так называемой «присоединенной» системой уравнений, которая получится, если в исходных уравнениях перейти к быстрому времени $\tau = t/\mu$ и положить затем $\mu = 0$. Из (1.7) видно, что присоединенная система будет линейной системой второго порядка по переменным u_x , u_y . Запишем ее в матричной форме

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Здесь A — квадратная, вообще говоря, невырожденная матрица. Ее элементы, так же как и элементы b_1 , b_2 — постоянные, зависящие от x_2 , y_2 , ω , $\alpha_3 = \text{const}$. Матрицу A можно представить в виде $A = A_1 A_2^{-1}$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 + l_3 y_2 \rho^{-2} \cos \alpha_3 & -l_3 x_2 \rho^{-2} \cos \alpha_3 \\ l_3 y_2 \rho^{-2} \sin \alpha_3 & 1 - l_3 x_2 \rho^{-2} \sin \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -y_2 & x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

Исследуем устойчивость положений равновесия системы (1.8). Очевидно, их асимптотическая устойчивость может быть обеспечена за счет надлежащего выбора матрицы управления F . Для этого достаточно, например, взять $AF = -E$, где E — единичная матрица. В [3] для частного случая $l_3 = 0$ рассматриваются несколько других вариантов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость положений равновесия системы (1.8). В [5] показано, что выполнение этого требования позволяет построить так называемую «вырожденную» систему уравнений. Ее решение всюду, кроме малой окрестности начальной точки, приближает с погрешностью порядка μ решение исходной системы по медленным со-

ставляющим движения. Начальные условия этой системы совпадают с начальными условиями исходной системы по соответствующим медленным переменным. Вырожденную систему получим из (1.7), полагая $\mu=0$:

$$\begin{aligned} 0 &= r_x - \kappa l_3 (\omega^2 \sin \alpha_3 - \omega' \cos \alpha_3) \\ 0 &= r_y - 1 + \kappa l_3 (\omega^2 \cos \alpha_3 + \omega' \sin \alpha_3) - \kappa \tau_0^{-2} (y_2 - 1) \\ x_2' &= 1, \quad y_2' = -\tau_0^{-1} (y_2 - 1), \quad \alpha_3' = \omega \\ \rho^2 \kappa \omega' &= r_x y_2 - r_y x_2 + [1 + \kappa \tau_0^{-2} (y_2 - 1)] l_3 \sin \alpha_3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отметим прежде всего, что в уравнения (1.9) не входят характеристики закона управления двигателями. Это означает, что медленное движение системы будет одним и тем же при любых управлениях, обеспечивающих асимптотическую устойчивость системы по быстрым движениям.

Уравнения, описывающие движение точки крепления ног, образуют в (1.9) независимую подсистему. Запишем ее решение, опуская несущественные в дальнейшем индексы ($x_2 = x$, $y_2 = y$). Обозначим через $x(0)$, $y(0)$ начальные условия по соответствующим переменным. Тогда

$$x(t) = x(0) + t, \quad y(t) = 1 - [1 - y(0)] \exp(-t\tau_0^{-1}) \quad (1.10)$$

Решение (1.10) совпадает с требуемым программным движением.

Получим из (1.9) уравнение, описывающее угловое движение корпуса. Опуская опять индексы ($\alpha_3 = \alpha$, $l_3 = l$), имеем

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega, \quad \kappa [\rho^2 + l(y \cos \alpha - x \sin \alpha)] \omega' = \\ &= [1 + \kappa \tau_0^{-2} (y - 1)] (l \sin \alpha - x) + \kappa l (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \omega^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Циклическую походку будем далее строить, «склеивая» решения системы (1.10), (1.11) для попеременно чередующихся опорных ног.

Оговорим условия в точках склеивания. Поскольку переменные x , y в (1.10), (1.11) определены относительно системы отсчета с началом в точке контакта опорной ноги с поверхностью, то при смене ног переменные x , y скачком изменяются на величины, определяемые взаимным расположением двух последовательных точек опоры. Для рассматриваемой горизонтальной опорной поверхности переменная x скачком уменьшается на длину шага, переменная y остается непрерывной функцией времени. График $x(t)$ представлен на фиг. 2, через t_i обозначен момент смены ног от i -го к $i+1$ -му шагу аппарата. Движение по переменной α описывается теперь уравнением второго порядка с разрывной правой частью; поэтому в момент смены ног величины α и α' не имеют разрыва.

Упростим уравнение (1.11) для случая малых колебаний корпуса и малых рассогласований координаты y от программного значения, пренебрегая рассогласованиями $y-1$ и квадратичными по α , ω членами. Пренебрежение этими слагаемыми приведет к малым погрешностям, по крайней мере на конечных временах порядка нескольких шагов. Их влияние на бесконечном интервале времени здесь не оценивается.

Упрощенное уравнение (1.11) примет вид

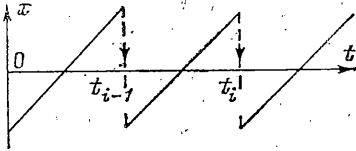
$$\theta^2 \alpha'' = l\alpha - x \quad (\theta^2 = \kappa(\rho^2 + l)) \quad (2.1)$$

Переходя в (2.1) к переменной $\varphi = \alpha - x l^{-1}$, получим $\varphi'' = \lambda \varphi$, где $\lambda = l\theta^{-2}$. Поскольку функция $x(t)$ разрывна, переменная φ терпит разрыв в момент смены ног. Вычислим величину скачка φ в момент времени t_i .

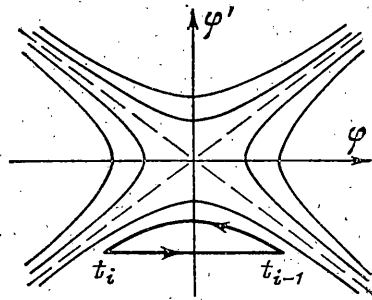
В конце i -го шага имеем $\varphi(t_i-0) = \alpha(t_i-0) - x(t_i-0)l^{-1}$. В начале следующего $i+1$ -го шага $\varphi(t_i+0) = \alpha(t_i+0) - x(t_i+0)l^{-1}$. Переменная α непрерывна в момент смены ног, поэтому $\alpha(t_i+0) = \alpha(t_i-0)$. Тогда

$$\varphi(t_i+0) - \varphi(t_i-0) = \frac{x(t_i-0) - x(t_i+0)}{l} = \frac{\Delta x_i}{l} \quad (2.2)$$

Здесь Δx_i — длина i -го шага. Значения $\varphi'(t_i-0)$ и $\varphi'(t_i+0)$ совпадают. Таким образом, циклический процесс по переменной φ можно построить из отрезков фазовых траекторий уравнения $\varphi'' = \lambda\varphi$, дополненных условиями скачка (2.2). На фиг. 3 жирными линиями выделен циклический процесс, соответствующий однократной смене ног за период и положительному значению величины Δx_i в (2.2).



Фиг. 2



Фиг. 3

Вычислим параметры цикла. Для этого получим соотношения, связывающие значения фазовых переменных φ , φ' в начале и конце i -го шага, т. е. в моменты времени t_{i-1} и $t_i = t_{i-1} + \delta_i$:

$$\varphi(t_i-0) = \varphi(t_{i-1}+0) \operatorname{ch} \lambda \delta_i + \lambda^{-1} \varphi'(t_{i-1}) \operatorname{sh} \lambda \delta_i \quad (2.3)$$

Обозначим через δ_0 период цикла, через φ_0 , φ_0' значения модулей соответствующих переменных на цикле в момент смены ног. Для цикла, представленного на фиг. 3

$$\varphi(t_{i-1}+0) = -\varphi(t_i-0) = \varphi_0, \quad \varphi'(t_{i-1}) = \varphi'(t_i) = -\varphi_0'$$

Подставив эти соотношения в (2.3), найдем

$$-\varphi_0 = \varphi_0 \operatorname{ch} \lambda \delta_0 - \lambda^{-1} \varphi_0' \operatorname{sh} \lambda \delta_0 \quad (2.4)$$

На цикле (2.2) принимает вид $2\varphi_0 = \delta_0 l^{-1}$. Последнее соотношение и уравнение (2.4) связывают три параметра цикла: δ_0 , φ_0 , φ_0' . Примем в качестве независимого параметра δ_0 ; тогда

$$\varphi_0' = \frac{\lambda \delta_0 (\operatorname{ch} \lambda \delta_0 + 1)}{\operatorname{sh} \lambda \delta_0}, \quad \varphi_0 = \frac{\delta_0}{2l}$$

Последним, независимым параметром цикла является величина x_0 координаты x в начале шага.

Легко указать закон управления длиной шага, обеспечивающий приведение аппарата на выбранный периодический режим. Предположим, что на i -м шаге система движется по близкой к циклу траектории. При неизменном периоде шагания зададим длину следующего шага формулой

$$\Delta x_{i+1} = \delta_0 + k_1 [\varphi(t_i+0) - \varphi_0] + k_2 [\varphi'(t_i) + \varphi_0'] + k_3 [x(t_i+0) - x_0] \quad (2.5)$$

Константы k_1 , k_2 , k_3 выбираются здесь из условия устойчивости точечного преобразования, определяемого указанным законом управления переносимой ногой.

Можно показать, что при достаточно малых μ построенному алгоритму управления (1.2), (2.5) соответствует устойчивая периодическая походка шагающего аппарата.

Поступила 8 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, 4.
2. Ларин В. Б. Передвижение двуногих систем маятникового типа. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
3. Новожилков И. В. Управление ногой шагающего аппарата в фазе опоры. В сб.: Биомеханика, вып. 13. Тр. Рижск. н.-и. ин-та травматологии и ортопедии, 1975, вып. 3.
4. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб. Новая сер., 1952, т. 31, № 3.
5. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 3.