

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

С. В. ЧЕЛОМЕЙ

(Москва)

Рассматриваются нелинейные колебания системы с одной степенью свободы с параметрически возбуждаемыми трением и жесткостью.

Изучаются два случая движения: резонансные колебания, вызываемые параметрическим возбуждением с удвоенной частотой собственных колебаний системы; комбинированные (резонансные) колебания с высокочастотным параметрическим возбуждением.

1. Резонансные колебания. В достаточно общем виде такого рода колебания описываются дифференциальным уравнением вида

$$x'' + \omega[\delta + \mu\Psi(x) - 2\nu \cos(2\omega t + \theta_0)]x' + \omega^2[1 + \alpha + \beta\Phi(x) - 2\gamma \cos 2\omega t]x = 0 \quad (1.1)$$

Здесь x — перемещение; t — время; ω — частота собственных колебаний; α — расстройка частоты собственных колебаний; δ — коэффициент линейного демпфирования; $\mu\Psi(x)$ — функция, выражающая эффект нелинейного демпфирования; $\beta\Phi(x)$ — нелинейная составляющая жесткости; $\nu > 0$ и $\gamma > 0$ — амплитуды параметрического возбуждения; θ_0 — фаза параметрического демпфирования.

Будем считать, что величины α , β , μ , δ , γ и ν — малые величины одного порядка малости ϵ . Уравнение (1.1) описывает нелинейные колебания, имеющие место во многих механических и электрических системах. Частный случай уравнения (1.1) применительно к теории параметрона подробно рассмотрен в [1].

Будем искать решение уравнения (1.1), как и в работе [1], в форме

$$x = a \cos(\omega t + \theta) \quad (1.2)$$

Здесь $a(t)$ и $\theta(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. Положим

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \theta) \quad (1.3)$$

Вследствие этого

$$a' \cos(\omega t + \theta) - a\theta' \sin(\omega t + \theta) = 0$$

Подставляя (1.2), (1.3) в уравнение (1.1), разлагая функции $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ в ряды Фурье и линеаризуя резонансные члены, получим

$$\begin{aligned} x'' + f_1(a, \theta)x' + \omega^2[1 + f_2(a, \theta)]x &= f_3(a, \theta, t) \\ f_1(a, \theta) &= \omega[\delta + \mu A_1(a) + \gamma \sin 2\theta + \nu \cos(2\theta - \theta_0)] \\ f_2(a, \theta) &= \alpha + \beta B_1(a) - \gamma \cos 2\theta + \nu \sin(2\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$f_3(a, \theta, t) = \mu \omega^2 a \sum_{i=2}^{\infty} A_i(a) \sin i(\omega t + \theta) - \beta \omega^2 a \sum_{i=2}^{\infty} B_i(a) \cos i(\omega t + \theta) + \\ + \gamma \omega^2 a \cos(3\omega t + \theta) - \nu \omega^2 a \sin(3\omega t + \theta + \theta_0)$$

$$A_i(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi[a \cos(\omega t + \theta)] \sin(\omega t + \theta) \sin i(\omega t + \theta) d(\omega t + \theta)$$

$$B_i(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi[a \cos(\omega t + \theta)] \cos(\omega t + \theta) \cos i(\omega t + \theta) d(\omega t + \theta) \quad (i=1, 2, \dots)$$

Коэффициенты квазилинейного дифференциального уравнения (1.4) зависят от амплитуды $a(t)$ и фазы $\theta(t)$, медленно меняющихся функций времени.

В первом приближении, пользуясь правилами теории линейных дифференциальных уравнений, с точностью до величин порядка ε , получим

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a\omega}{2} [\delta + \mu A_1(a) + \gamma \sin 2\theta + \nu \cos(2\theta - \theta_0)] \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega}{2} [\alpha + \beta B_1(a) - \gamma \cos 2\theta + \nu \sin(2\theta - \theta_0)] \quad (1.5)$$

Эти уравнения определяют как стационарные колебания, так и переходные процессы исследуемой колебательной системы.

Удерживая в решении уравнения (1.4) только члены первого порядка малости, будем иметь

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \mu a \sum_{i=2}^{\infty} \frac{A_i(a)}{i^2 - 1} \sin i(\omega t + \theta) + \beta a \sum_{i=2}^{\infty} \frac{B_i(a)}{i^2 - 1} \cos i(\omega t + \theta) - \\ - \frac{1}{8} a \gamma \cos(3\omega t + \theta) + \frac{1}{8} a \nu \sin(3\omega t + \theta + \theta_0)$$

В частном случае для $\Psi(x) = \Phi(x) = x^2$ вычисления дают

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a\omega}{2} \left[\delta + \mu \frac{a^2}{4} + \gamma \sin 2\theta + \nu \cos(2\theta - \theta_0) \right] \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega}{2} \left[\alpha + 3\beta \frac{a^2}{4} - \gamma \cos 2\theta + \nu \sin(2\theta - \theta_0) \right] \quad (1.6)$$

Если $\nu=0$, то из системы (1.5) следуют уравнения, полученные в [1]. При $\Psi(x) = \Phi(x) = x^2$ решение уравнения (1.1) будет

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{\mu a^3}{32} \sin 3(\omega t + \theta) + \\ + \frac{\beta a^3}{32} \cos 3(\omega t + \theta) - \frac{a\gamma}{8} \cos(3\omega t + \theta) + \frac{a\nu}{8} \sin(3\omega t + \theta + \theta_0)$$

В [1] проводилось исследование частного случая уравнения (1.1) при $\nu=0$. Было показано, что зависимость α от квадрата амплитуды стационарных колебаний $z = a^2/4$ имеет эллиптический характер. Расположение эллиптической кривой в этих координатах определялось малыми парамет-

рами δ , μ , β и γ . Точки пересечения эллипса с осью α определялись зависимостью $\alpha_{1,2} = \pm(\gamma^2 - \delta^2)^{1/2}$.

В рассматриваемом случае, когда имеет место параметрическое возбуждение демпфирования в колебательной системе, указанные выше выводы существенно корректируются.

Если рассмотреть зависимость квадрата амплитуды стационарных колебаний $z = a^2/4$ от параметра v , то из выведенных выше уравнений (1.6) следует новый результат: при определенных условиях параметрическое демпфирование может привести систему к состоянию динамической неустойчивости.

Действительно, условие стационарности ($a' = \theta' = 0$) приводит к уравнениям

$$\delta + \mu z = -\gamma \sin 2\theta - v \cos(2\theta - \theta_0) \quad (1.7)$$

$$\alpha + 3\beta z = \gamma \cos 2\theta - v \sin(2\theta - \theta_0), \quad z = a^2/4$$

Исключая из этой системы θ , получим алгебраическое уравнение для величины a

$$(\delta + \mu z)^2 + (\alpha + 3\beta z)^2 = \gamma^2 + v^2 - 2\gamma v \sin \theta_0 \quad (1.8)$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.8) в координатах (z, α) представляет эллипс; причем его расположение в этих координатах зависит от малых параметров μ , β , γ , δ и v .

Точки пересечения эллипса с осью α определяются следующим выражением:

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma^2 + v^2 - 2\gamma v \sin \theta_0 - \delta^2} \quad (1.9)$$

При $\beta = \mu = \gamma = 0$ эллипс превращается в две параллельные вертикальные прямые [1], уходящие в бесконечность, и, следовательно, имеет место динамическая неустойчивость. Ширина области неустойчивости будет определяться зависимостью $\Delta = 2(v^2 - \delta^2)^{1/2}$.

Условием существования неустойчивости является неравенство $v > \delta$.

Из изложенного выше следует доказательство возможности достижения динамической неустойчивости путем введения в колебательную систему параметрического демпфирования.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что влияние на динамическую устойчивость амплитуды параметрического демпфирования точно такое же, как и влияние амплитуды параметрического возбуждения в уравнении Матве с линейным демпфированием.

Ширина области неустойчивости в общем случае для рассматриваемого дифференциального уравнения определяется зависимостью

$$\Delta = 2\sqrt{\gamma^2 + v^2 - 2\gamma v \sin \theta_0 - \delta^2} \quad (1.10)$$

и, следовательно, изменение ширины области неустойчивости по сравнению со случаем отсутствия параметрического демпфирования составляет величину

$$\delta\Delta = 2(\sqrt{\gamma^2 + v^2 - 2\gamma v \sin \theta_0 - \delta^2} - \sqrt{\gamma^2 - \delta^2}) \quad (1.11)$$

На фиг. 1 видно, что с увеличением v полуоси эллипса также увеличиваются, т. е. с ростом амплитуды параметрического демпфирования растут амплитуды стационарных колебаний ($\sin \theta_0 = 0$, $\beta = 0.2$, $\mu = 0.8$, $\delta = 0.1$, $\gamma = 0.4$).

На фиг. 2 показана зависимость ширины области неустойчивости от величины θ_0 в предположении $\gamma - v > \delta$:

$$\Delta_1 = (\gamma + v)^2 - \delta^2, \quad \Delta_2 = \gamma^2 + v^2 - \delta^2, \quad \Delta_3 = (\gamma - v)^2 - \delta^2$$

Если это предположение не выполняется, то для определенных значений фазы θ_0 ширина области неустойчивости может быть равна нулю либо вообще исчезнуть.

Это имеет место в случае мнимого Δ , когда

$$\gamma^2 + \nu^2 - 2\gamma\nu \sin \theta_0 - \delta^2 < 0$$

В случае $\theta_0 = 1/2\pi + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$) ширина области неустойчивости будет минимальной.

На фиг. 3, 4 показана зависимость кривой $z(\alpha)$ от различных значений θ_0 ($\nu = -0.2, \mu = 0.8, \beta = 0.2, \gamma = 0.4, \delta = 0.1$). Для сравнения пунктиром показан случай отсутствия параметрического демпфирования ($\nu = 0$).

Из уравнения (1.8) следует, что уменьшение значения $\sin \theta_0$ вызывает увеличение амплитуды стационарных колебаний. Величина максимальной амплитуды стационарных колебаний определяется формулой

$$a_{\max}^2 = \frac{4}{|\mu|} \sqrt{\gamma^2 + \nu^2 - 2\gamma\nu \sin \theta_0 - \delta \operatorname{sign} \mu} \quad (1.12)$$

Из уравнения (1.10) следует, что необходимым и достаточным условием существования области динамической неустойчивости является $\Delta^2 \geq 0$.

При $\nu > 2\gamma \sin \theta_0$ ширина области неустойчивости увеличивается по сравнению с шириной области неустойчивости без параметрического демпфирования. Интересно отметить, что в случае, когда $\nu = 2\gamma \sin \theta_0$, ширина области неустойчивости такая же, как и в случае $\nu = 0$.

Из изложенного выше следует, что параметрическое демпфирование и его фаза θ_0 позволяют управлять как шириной области неустойчивости, так и величиной амплитуды установившихся колебаний.

Следует указать на эквивалентность влияния параметрического демпфирования и параметрического возбуждения. Действительно, полагая в уравнении (1.8) $\nu = 0$, имеем

$$(\delta + \mu z)^2 + (\alpha + 3\beta z)^2 = \gamma^2$$

С другой стороны, полагая в уравнении (1.8) $\gamma = 0$, получим

$$(\delta + \mu z)^2 + (\alpha + 3\beta z)^2 = \nu^2$$

Отсюда следует, что два дифференциальных уравнения

$$x'' + \omega[\delta - 2\nu \cos(2\omega t + \theta_1)]x' + \omega^2 x = 0 \quad (1.13)$$

$$x'' + \omega\delta x' + \omega^2[1 - 2\nu \cos(2\omega t + \theta_2)]x = 0$$

будут иметь одинаковые области динамической неустойчивости при условии $\nu > \delta$. Последнее утверждение может быть доказано и другим способом.

Действительно, если имеется дифференциальное уравнение вида

$$x'' + \omega[\delta - 2\nu \cos(2\omega t + \theta_0)]x' + \omega^2 x = 0 \quad (1.14)$$

то, вводя замену переменных в форме

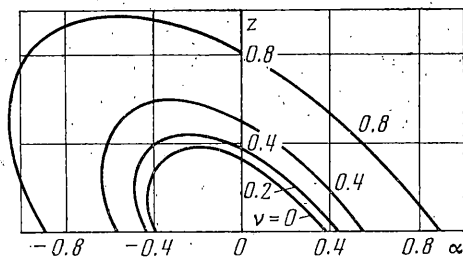
$$x = y \exp \left[\nu \omega \int \cos(2\omega t + \theta_0) dt \right]$$

и подставляя ее в уравнение (1.14), получим (с точностью до величины ϵ)

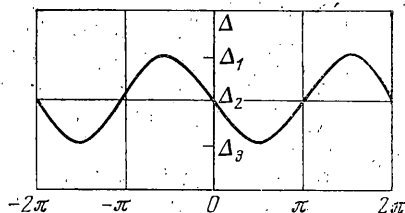
$$y'' + \omega\delta y' + \omega^2[1 - 2\nu \cos(2\omega t + \theta_0 - \pi/2)]y = 0$$

и, следовательно, эквивалентность дифференциальных уравнений (1.13) доказана.

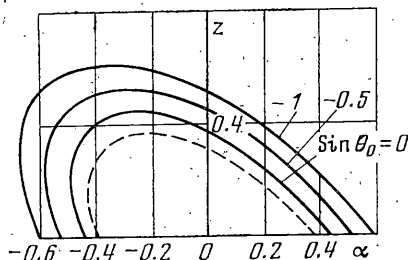
Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать не только вывод о возможности возникновения динамической неустойчивости при параметрическом демпфировании, но и установить ряд важных зависимостей, определяющих стационарные колебания системы и их динамическую устойчивость.



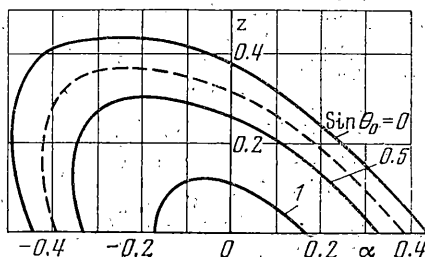
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Проверка указанных результатов проводилась на ЭВМ. Она включала в себя численное сравнение зависимости амплитуды от времени для уравнения (1.1) с зависимостью амплитуды от времени, полученной методом последовательных приближений для системы дифференциальных уравнений первого приближения (1.6).

Одновременно проверялось утверждение о наличии зоны неустойчивости, определяемой знаком выражения $v^2 + \gamma^2 - 2v\gamma \sin \theta_0 - \delta^2$.

Исследовался частный случай уравнения (1.1), а именно: $\delta=0.2$, $\alpha=\beta=\gamma=0$, $\omega=10$, $\theta_0=0$. Параметры μ и ν варьировались. Начальные условия были следующими: $x(0)=1$, $x'(0)=1$.

Для уравнения (1.1) на фиг. 5, а, б, в соответственно показаны зависимости амплитуды x от времени $\mu=0$, $\nu=0.175$; $\mu=\nu=0.1$; $\mu=0.3$, $\nu=0.1$. Аналогичные зависимости для системы уравнений (1.6) приводятся на фиг. 6, а, б, в. Совпадение оказалось достаточно хорошим для любых практических применений.

Зависимость амплитуды от времени для системы (1.6) при $\mu=0$ представлена на фиг. 7, 8.

Фиг. 5-8 подтверждают совпадение областей неустойчивости, подсчитанных теоретически и вычисленных на ЭВМ.

Видно, что при $v^2 - \delta^2 > 0$ (фиг. 7) имеет место неустойчивость. При $v^2 = \delta^2$ (фиг. 8) — стационарные гармонические колебания и при $v^2 - \delta^2 < 0$ (фиг. 5, 6) имеет место явно выраженная устойчивость.

2. Резонансные колебания с высокочастотным параметрическим возбуждением. В [2] было впервые установлено, что высокочастотные параметрические вибрации, действующие на различного рода упругие системы, могут повысить статическую устойчивость этих систем.

Было доказано также, что статическая устойчивость может быть достигнута даже тогда, когда статические нагрузки, действующие на вибрирующую систему, превосходят критические эйлеровы силы.

Для упругой системы, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных вида

$$L_1(w) + p(t)L_2(w) + \frac{\partial}{\partial t}L_3(w) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}L_4(w) = 0$$

$$p(t) = p_0 + \sum_{m \neq 0} a_m \cos(m\omega t + \theta_m)$$

где L_1, L_2, L_3 и L_4 — соответствующие линейные операторы, w — перемещение; в ряде случаев приближенное решение можно искать в виде $w = v(x, y, z)\varphi(t)$, где $v(x, y, z)$ — соответствующая нормальная функция, а $\varphi(t)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\varphi'' + 2n\varphi' + \Omega^2 \left[\alpha - \frac{p(t) - p_0}{p_*} \right] \varphi = 0 \quad (2.1)$$

Если считать, что имеет место высокочастотное параметрическое возбуждение, т. е. $(\Omega/\omega)^2 = \varepsilon \ll 1$, то дифференциальное уравнение (2.1) может быть сведено к дифференциальному уравнению, не содержащему явно время и выражающему средние медленно меняющиеся колебания системы

$$\varphi_0'' + 2n\varphi_0' + \Omega^2 \left[\alpha + \frac{\varepsilon}{2p_*^2} \sum_{m \neq 0} \frac{a_m^2}{m^2 + 4n^2/\omega^2} \right] \varphi_0 = 0$$

Ясно, что условием обеспечения динамической устойчивости даже для критической статической силы $p_0 > p_*$ является неравенство

$$\frac{1}{2p_*^2} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \sum_{m \neq 0} \frac{a_m^2}{m^2 + 4n^2/\omega^2} > \frac{p_0}{p_*} - 1$$

Рассмотрим далее нелинейную колебательную систему (1.1) для случая $v=0$ с дополнительным высокочастотным параметрическим возбуждением

$$x'' + \omega[\delta + \mu\Psi(x)]x' + \omega^2[1 + \alpha + \beta\Phi(x) - 2\gamma \cos 2\omega t - 2\gamma_1 \cos(pt + \theta_1)]x = 0 \quad (2.2)$$

В этом случае $p \gg \omega$ и член, содержащий γ_1 , выражает дополнительный параметр возбуждения. Уравнение (2.2) можно исследовать, воспользовавшись методом, изложенным в [2]. Тогда получим

$$\varphi_0'' + \omega[\delta + \mu\Psi(\varphi_0)]\varphi_0' + \omega^2 \left[1 + \alpha + \beta\Phi(\varphi_0) - 2\gamma \cos 2\omega t + 2\gamma_1^2 \frac{\omega^2}{p^2} \right] \varphi_0 = 0 \quad (2.3)$$

Вводя новое обозначение $\alpha_1 = \alpha + 2\gamma_1^2 \omega^2 / p^2$, уравнение (2.3) приводим к виду (1.1).

Следовательно, высокочастотные вибрации сдвигают кривую стационарных колебаний в координатах (α, z) всегда влево на величину $x_0 = 2\gamma_1^2 \Omega^2 / \omega^2$, являющуюся положительной. Сдвиг характеристик показан на фиг. 9.

Из уравнения (1.12) следует, что высокочастотные колебания не изменяют максимальных амплитуд стационарных колебаний.

Положим $\gamma=0$ и рассмотрим случай только высокочастотного параметрического возбуждения. Из уравнения (2.3), очевидно, следует

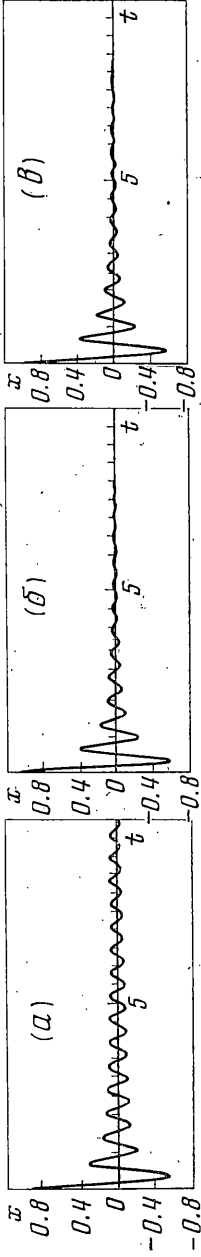
$$\varphi_0'' + \omega[\delta + \mu\Psi(\varphi_0)]\varphi_0' + \omega^2[1 + \alpha_1 + \beta\Phi(\varphi_0)]\varphi_0 = 0 \quad (2.4)$$

Квазистатические решения этого уравнения $\varphi_0 = \varphi_0^\circ = \text{const}$ будут определяться уравнением

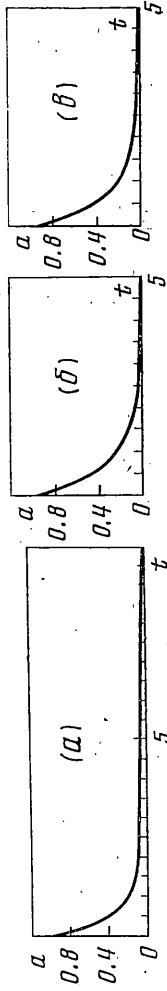
$$[1 + \alpha_1 + \beta\Phi(\varphi_0^\circ)]\varphi_0^\circ = 0 \quad (2.5)$$

Отсюда получим $\varphi_{01}^\circ = 0$, $\varphi_{0k}^\circ = \varphi_{0k}^{*0}$ ($k=2, 3, 4, \dots$), где решения φ_{0k}^{*0} определяются нелинейным уравнением (2.5).

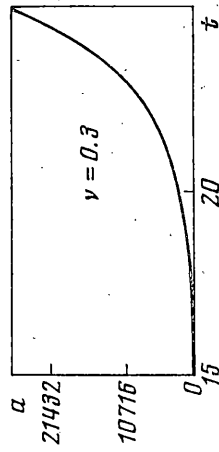
Следовательно, решения φ_{0k}^{*0} являются функциями α , т. е. — изменения частоты собственных колебаний.



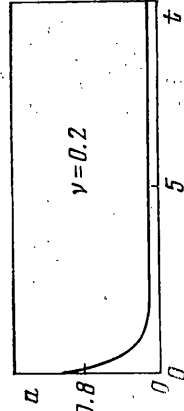
Фиг. 5



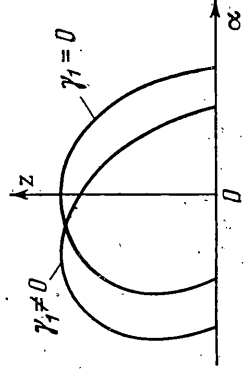
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Если, как и выше, принять $\Phi(\varphi_{0k}^{o*}) = (\varphi_{0k}^{o*})^2$, то корни уравнения (2.5) будут

$$\varphi_{02}^o = + \left(-\frac{1 + \alpha + 2\gamma_1^2 \omega^2 / p^2}{\beta} \right)^{1/2}, \quad \varphi_{03}^o = -\varphi_{02}^o$$

При исследовании динамической неустойчивости величина $\alpha = -p_0/p_*$. Таким образом, квазистатические решения φ_{0k}^{o*} будут функциями p_0 .

Для исследования устойчивости квазистатических решений φ_{0k}^{o*} составим дифференциальное уравнение в вариациях $\varphi_{0k}^{o*} = \varphi_{0k}^{o*} + \delta\varphi_{0k}^{o*}$. Тогда из уравнения (2.4) следует

$$\delta\varphi_{0k}^{o*} + \omega[\delta + \mu\Psi(\varphi_{0k}^*)]\delta\varphi_{0k}^{o*} + \omega^2\varphi_{0k}^{o*} \left[\frac{d\Phi(\varphi_0^{o*})}{d\varphi_0^{o*}} \right] \Big|_{\varphi_0^{o*}=\varphi_{0k}^{o*}} \delta\varphi_{0k}^{o*} = 0$$

Если трение отсутствует, μ и δ равны нулю, то условием устойчивости будет неравенство

$$\varphi_{0k}^{o*} \left[\frac{d\Phi(\varphi_0^{o*})}{d\varphi_0^{o*}} \right] \Big|_{\varphi_0^{o*}=\varphi_{0k}^{o*}} > 0$$

В частном случае $\Phi(\varphi_0^o) = \varphi_0^2$ это условие выполняется автоматически, и, следовательно, любые корни, устойчивые для стационарных амплитуд уравнения (1.1), будут автоматически устойчивы и для квазистационарных амплитуд уравнения (2.2). Очевидно, что при наличии μ и δ и квадратичной зависимости для $\Psi(\varphi_0^o)$ выводы будут аналогичны.

Поступила 17 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Челомей С. В. К теории параметрона. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
2. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3.