МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1977

УДК 531.36

К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. И. ХАНУКАЕВ

(Москва)

Получены формулы, позволяющие преобразовывать неоднородное переменное электромагнитное поле к движущейся системе координат, мгновенное положение которой относительно исходной определяется направляющими косинусами.

Выявлена структура главного момента поля пондеромоторных сил относительно форм, которыми описывается электромагнитное поле.

Показан асимптотический характер движения проводящего твердого тела сферической формы вокруг неподвижной точки к его перманентному вращению, когда мгновенная ось вращения твердого тела и электромагнитного поля совпадают с наибольшей или наименьшей главной осью тензора инерции твердого тела.

Первое исследование, посвященное определению электромагнитного поля в твердом теле и вычислению сил и моментов, действующих на твердое тело, движущееся в электромагнитном поле, было проведено Г. Герцом [1]. Дифракция света на препятствиях сферической формы рассмотрена в [2]. В приложении к геомагнетизму настоящий вопрос изучался в [3–7] и др. Среди работ, связанных с теорией асинхронного двигателя со сплошным сферическим ротором, отметим [8–11]. Индукционный нагрев проводящего шара рассмотрен в [12, 13]. Расчету сил левитации для аксиально-симметричных полей в телах сферической формы посвящены работы [14–19]. Результаты экспериментальных исследований законов движения твердого тела сферической формы в электромагнитном поле приведены в [20].

1. Будем считать, что источники электромагнитного поля находятся вне рассматриваемой области. Первичное квазистационарное поле в свободном пространстве ($\mu=\mu_0$, $\varepsilon=0$, $\sigma=0$) независимо от конкретной реализации его источников описывается суммой функций $\mathbf{L}_{pq}^{1,2}$, $\mathbf{T}_{nm}^{1,2}$, $\mathbf{S}_{nm}^{1,2}$ [22, 23]:

$$\mathbf{H}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(A_{nm}{}^1\mathbf{S}_{nm}{}^1+A_{nm}{}^2\mathbf{S}_{nm}{}^2)$$

$$\mathbf{E}=i\omega\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(A_{nm}{}^1\mathbf{T}_{nm}{}^1+A_{nm}{}^2\mathbf{T}_{nm}{}^2)+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-p}^{p}(C_{pq}{}^1\mathbf{L}_{pq}{}^1+C_{pq}{}^2\mathbf{L}_{pq}{}^2)$$

$$\mathbf{L}_{pq}^{1,2}=\operatorname{grad}\psi_{pq}^{1,2},\quad \mathbf{T}_{nm}^{1,2}=\operatorname{rot}(\mathbf{r}\,\psi_{nm}^{1,2})$$

$$\mathbf{S}_{nm}{}^1=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}\psi_{nm}{}^1)=(n+1)\operatorname{grad}\psi_{nm}{}^1,\ \mathbf{S}_{nm}{}^2=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}\psi_{nm}{}^2)=-n\operatorname{grad}\psi_{nm}{}^2$$

$$\psi_{nm}{}^1=r^nP_n{}^m(\theta)\,e^{im\varphi}e^{-i\omega t},\ \psi_{nm}{}^2=r^{-n-1}P_n{}^m(\theta)\,e^{im\varphi}e^{-i\omega t}$$

$$P_n{}^m(\theta)=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-m}{2}\right)}(-1)^s\frac{(n+m)!(\cos\theta)^n(\operatorname{tg}\theta)^{m+2s}}{2^{n+2s}s!(m+s)!(n-m-2s)!}\tag{1.1}$$

(где $A^{1,2}_{nm}$, $C^{1,2}_{nm}$ — коэффициенты). Поэтому преобразование первичного поля к новой системе координат, положение которой задается таблицей направляющих косинусов α_{ij}, сводится к представлению поверхностной сферической гармоники $P_n^m(\theta)e^{im\varphi}$ в виде ряда гармоник в новой системе координат. Коэффициенты ряда являются функциями элементов таблицы направляющих косинусов.

Для шаровой секториальной функции ($m=n$) имеем

$$\psi_{nn}^1(r', \theta', \varphi') = (2n)!(2^n n!)^{-1}(x_1'+ix_2')^n$$

Поскольку

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji}x_j$$

получим

$$\psi_{nn}^1(r', \theta', \varphi') = \frac{(2n)!}{2^n n!}C^n r^n \left[\frac{\sin\theta}{2}e^{i\varphi}\frac{A}{C} + \frac{\sin\theta}{2}e^{-i\varphi}\frac{B}{C} + \cos\theta\right]^n$$

$$A=(\alpha_{11}+i\alpha_{12})-i(\alpha_{21}+i\alpha_{22}),\ B=(\alpha_{11}+i\alpha_{12})+i(\alpha_{21}+i\alpha_{22}),\ C=\alpha_{31}+i\alpha_{32} \quad (1.2)$$

Раскроем степень в этом выражении

$$\psi_{nn}^1(r', \theta', \varphi') = \frac{(2n)!}{2^n}C^n r^n \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}\frac{(\cos\theta)^n(\operatorname{tg}\theta)^k e^{i(2q-k)\varphi}}{(n-k)!q!(k-q)!2^k}\left(\frac{A}{C}\right)^q\left(\frac{B}{C}\right)^{k-q}$$

Далее введем новые индексы суммирования $m=2q-k$ и $s=k-q$, т. е. $q=m+s$, $k=m+2s$, и учитывая зависимость $AB=-C^2$, получим

$$\psi_{nn}^1(r', \theta', \varphi') = \frac{(2n)!}{2^n}C^n r^n \sum_{m=0}^{n}\left[e^{-im\varphi}\left(\frac{B}{C}\right)^m + e^{im\varphi}\left(\frac{A}{C}\right)^m\right]\times$$

$$\times\frac{1}{1+\delta_{0m}}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-m}{2}\right)}(-1)^s\frac{(\cos\theta)^n(\operatorname{tg}\theta)^{m+2s}}{2^{m+2s}s!(m+s)!(n-m-2s)!}$$

где δ_{0m} — символ Кронекера. Сравнивая это выражение с (1.1), найдем искомое преобразование

$$\psi_{nn}^{1,2}(r'\ \theta', \varphi') = F_{n0}^{n}(\alpha_{ij})\psi_{n0}^{1,2}(r, \theta, \varphi) +$$

$$+\sum_{m=1}\left[F_{n(-m)}^{n}(\alpha_{ij})\psi_{n(-m)}^{1,2}(r, \theta, \varphi) + F_{nm}^{n}(\alpha_{ij})\psi_{nm}^{1,2}(r, \theta, \varphi)\right] \quad (1.3)$$

$$F_{n(-m)}^{n}(\alpha_{ij}) = \frac{(2n)!}{2^n(n+m)!}C^n\left(\frac{B}{C}\right)^m, \quad F_{nm}^{n}(\alpha_{ij}) = \frac{(2n)!}{2^n(n+m)!}C^n\left(\frac{A}{C}\right)^m$$

Для шаровой тессеральной функции будем иметь аналогичную формулу преобразования

$$\psi_{n\nu}^{1,2}(r', \theta', \varphi') = F_{n0}^{\nu}(\alpha_{ij})\psi_{n0}^{1,2}(r, \theta, \varphi) +$$

$$+\sum_{m=1}\left[F_{n(-m)}^{\nu}(\alpha_{ij})\psi_{n(-m)}^{1,2}(r, \theta, \varphi) + F_{nm}^{\nu}(\alpha_{ij})\psi_{nm}^{1,2}(r, \theta, \varphi)\right]$$

$$F^{\nu}_{n(-m)}(\alpha_{ij})=(-1)^{n-\nu}\frac{(n+\nu)!}{2^n(n-\nu)!}\frac{C^{\nu}}{(n+m)!}\left(\frac{B}{C}\right)^m\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{n-\nu}\frac{(n-\nu)!}{s!(n-\nu-s)!}D^s\frac{(n+m)!}{(n+m-s)!}E^{n-\nu-s}\frac{(n-m)!}{(\nu-m+s)!}$$

$$F^{\nu}_{nm}(\alpha_{ij})=(-1)^{n-\nu}\frac{(n+\nu)!}{2^n(n-\nu)!}\frac{C^{\nu}}{(n+m)!}\left(\frac{A}{C}\right)^m\times \tag{1.4}$$

$$\times\sum_{s=0}^{n-\nu}\frac{(n-\nu)!}{s!(n-\nu-s)!}D^s\frac{(n-m)!}{(n-m-s)!}E^{n-\nu-s}\frac{(n+m)!}{(\nu+m+s)!}\quad(\nu\geqslant 0)$$

$$D=\frac{A}{C}(\alpha_{13}+i\alpha_{23})=-(1+\alpha_{33}),\quad E=\frac{B}{C}(\alpha_{13}-i\alpha_{23})=1-\alpha_{33} \tag{1.5}$$

Справедливость формулы (1.4) доказывается методом математической индукции по индексу n.

В качестве примера воспользуемся формулой (1.4) для преобразования зональной функции $\psi_{n0}^{1}(r', \theta', \varphi')$, определив положение исходной системы координат $Ox'y'z'$ относительно новой системы $Oxyz$ эйлеровыми углами α, β:

	x'	y'	z'
x	$\cos\alpha\ \cos\beta$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha\ \sin\beta$
y	$\sin\alpha\ \cos\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\ \sin\beta$
z	$-\sin\beta$	0	$\cos\beta$

Согласно (1.2), (1.4) и (1.5)

$$\frac{A}{C}=-e^{-i\alpha}\left(\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}\right)^{1/2},\quad \frac{B}{C}=e^{i\alpha}\left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^{1/2}$$

$$D=-(1+\cos\beta),\quad E=1-\cos\beta$$

$$\overset{\circ}{F}_{n(-m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{2^n}\frac{e^{im\alpha}}{(n+m)!}\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\beta}\right)^{m/2}\times$$

$$\times\sum_{s=m}^{n}\frac{n!}{s!(n-s)!}(\cos\beta+1)^s\frac{(n+m)!}{(n+m-s)!}(\cos\beta-1)^{n-s}\frac{(s-m)!}{(s-m)!}$$

$$\overset{\circ}{F}_{nm}(\alpha,\beta)=(-1)^m\frac{1}{2^n}\frac{e^{-im\alpha}}{(n+m)!}\left(\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}\right)^{m/2}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{n-m}\frac{n!}{s!(n-s)!}(\cos\beta+1)^s\frac{(n-m)!}{(n-m-s)!}(\cos\beta-1)^{n-s}\frac{(n+m)!}{(s+m)!}$$

В выражение для функции $\overset{\circ}{F}_{n(-m)}(\alpha,\beta)$ введем новый индекс $k=s-m$. Тогда получим, что оно с точностью до знака экспоненты совпадает с выражением для функции $\overset{\circ}{F}_{nm}(\alpha, \beta)$. Эту функцию можно представить в форме

$$\overset{\circ}{F}_{nm}(\alpha, \beta) = [(n-m)!/(n+m)!]e^{-im\alpha}P_n{}^m(\beta)$$

$$P_n{}^m(\beta) = \frac{n!}{2^n(n-m)!}\left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^{m/2} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{n-m} \frac{n!}{s!(n-s)!}(\cos\beta+1)^{m+s}\frac{(n-m)!}{(n-m-s)!}(\cos\beta-1)^{n-m-s}\frac{(n+m)!}{(m+s)!}$$

Тогда по формуле (1.4) будем иметь теорему сложения для зональной функции в ее обычном виде

$$P_n(\theta') = P_n(\theta)P_n(\beta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\theta)P_n{}^m(\beta)\cos m(\varphi-\alpha)$$

2. Если новая система координат вращается, то нужно учесть дополнительное электромагнитное поле, которое имеет место в движущейся системе отсчета. В рассматриваемом приближении ($V \ll c$, $\varepsilon=0$) это будет только электрическое поле $\mathbf{V}\times\mathbf{B}$.

Запишем скорость любой точки вращающейся системы отсчета в сферической системе координат

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} = \Omega_\rho{}^*(\mathbf{e}_\theta i - \mathbf{e}_\varphi\cos\theta)re^{i\varphi} + \Omega_z\mathbf{e}_\varphi r\sin\theta + \Omega_\rho(-\mathbf{e}_\theta i - \mathbf{e}_\varphi\cos\theta)re^{-i\varphi} \quad (2.1)$$
$$\Omega_\rho{}^* = {}^1/_2(\Omega_x - i\Omega_y), \quad \Omega_\rho = {}^1/_2(\Omega_x + i\Omega_y)$$

Так как магнитное поле описывается формами $\mathbf{S}_{nm}^{1,2}$, то дополнительное электрическое поле будет равно $\mathbf{V}\times\mathbf{S}_{nm}^{1,2}$. При помощи рекуррентных соотношений оно может быть представлено в виде суммы соленоидальных и потенциальных форм

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\times\mathbf{S}_{nm}{}^1 &= i\Omega_\rho(n+m)(n-m+1)\overset{1}{\mathbf{T}}_{n\,m-1} + i\Omega_z m\mathbf{T}_{nm}{}^1 + i\Omega_\rho{}^*\overset{1}{\mathbf{T}}_{n\,m+1} + \\
&+ [n/(2n+1)][\Omega_\rho(n-m+1)(n-m+2)\overset{1}{\mathbf{L}}_{n+1\,m-1} - \\
&- \Omega_z(n-m+1)\overset{1}{\mathbf{L}}_{n+1\,m} - \Omega_\rho{}^*\overset{1}{\mathbf{L}}_{n+1\,m+1}] + \\
&+ [(n+1)/(2n+1)][\Omega_\rho(n+m-1)(n+m)\,\mathrm{grad}\,r^2\overset{1}{\psi}_{n-1\,m-1} + \\
&+ \Omega_z(n+m)\,\mathrm{grad}\,r^2\overset{1}{\psi}_{n-1\,m} - \Omega_\rho{}^*\,\mathrm{grad}\,r^2\overset{1}{\psi}_{n-1\,m+1}]
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Выражение для электрического поля $\mathbf{V}\times\overset{2}{\mathbf{S}}_{nm}$ имеет аналогичный вид. Его можно получить из (2.2), поменяв местами функции $\overset{1}{\mathbf{L}}_{n+1\nu}$ и $\mathrm{grad}\,r^2\overset{1}{\psi}_{n-1\nu}$ и заменив верхний индекс 1 на 2.

Появление поля $\mathrm{grad}\,r^2\psi_{n\pm1\nu}^{1,2}$ ($\nu = m-1$, m, $m+1$), дивергенция которого отлична от нуля, означает, что во вращающейся системе отсчета имеет место объемная плотность заряда, обусловленная поляризацией пространства $\rho = -\mathrm{div}\,\mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E}$. Так как $\mathbf{D}=0$, то $\rho = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}$, т. е.

$$\rho^1 \sim \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,r^2\overset{1}{\psi}_{n-1\,\nu} = \frac{1}{c^2}2(2n+1)\overset{1}{\psi}_{n-1\,\nu}$$

$$\rho^2 \sim \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,r^2\overset{1}{\psi}_{n+1\,\nu} = \frac{1}{c^2}2(2n-3)\overset{2}{\psi}_{n+1\,\nu}$$

Формулы (1.4) и (2.2) позволяют преобразовать любое квазистационарное поле, заданное сферическими формами к системе координат, вращающейся по произвольному закону.

Отметим, что полное соленоидальное электрическое поле в движущейся системе координат может быть получено из магнитного заменой гармоник $\mathbf{S}_{nm}^{1,2}$ формами $-\mu\mathbf{T}_{nm}^{1,2}$ с последующим дифференцированием по времени.

3. Рассмотрим электромагнитное поле в проводящем шаре, вращающемся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Oz системы координат с началом в центре шара. Электромагнитные свойства материала шара ($\mu=\mu$, $\varepsilon=0$, $\sigma=\sigma$) определяют соотношения между компонентами электромагнитного поля при вращении среды

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\quad \mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}),\quad \mathbf{V}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$$

Исключим из уравнений Максвелла вектор $\mathbf{E}$. В результате получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\mu\sigma\mathbf{H}^{\cdot}+\mu\sigma\operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})$$

Поскольку

$$\mathbf{V}=\mathbf{e}_\varphi\Omega r\sin\theta,\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})=-\Omega\frac{\partial H}{\partial\varphi}+\mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{H}$$

и так как $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, то будем иметь

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}-k_m^2\mathbf{H}=0,\quad k_m^2=i\mu\sigma(\omega-m\Omega),\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}(r,\theta)e^{im\varphi}e^{-i\omega t}\tag{3.1}$$

Частными решениями уравнения (3.1) являются функции

$$\mathbf{T}_{nm}=\operatorname{rot}\mathbf{r}\psi_{nm},\quad \mathbf{S}_{nm}=(1/k_m)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{r}\psi_{nm}$$
$$\psi_{nm}=(k_mr)^{-1/2}J_{n+1/2}(k_mr)P_n^m(\theta)e^{im\varphi}e^{-i\omega t}\tag{3.2}$$

Эти функции регулярны в начале координат и удовлетворяют условиям: $\operatorname{rot}\mathbf{T}_{nm}=k_m\mathbf{S}_{nm}$, $\operatorname{div}\mathbf{T}_{nm}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{S}_{nm}=k_m\mathbf{T}_{nm}$, $\operatorname{div}\mathbf{S}_{nm}=0$.

Магнитное поле в свободном пространстве вне шара описывается формами $\mathbf{S}_{nm}^{1,2}$, поэтому общее решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным условиям, будет

$$\mathbf{H}^i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}{}^i\mathbf{S}_{nm}\tag{3.3}$$

и плотность тока

$$\mathbf{J}^i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}{}^ik_m\mathbf{T}_{nm}\tag{3.4}$$

Аналогично, исключая из уравнений Максвелла вектор $\mathbf{H}$, в силу условия $\mathbf{V}^{\cdot}=0$ получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\sigma\mathbf{E}^{\cdot}+\mu\sigma\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}$$

а так как

$$\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\Omega\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\varphi}+\operatorname{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E})$$

то будем иметь

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}-k_m^2\mathbf{E}=\mu\sigma\operatorname{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}),\quad k_m^2=i\mu\sigma(\omega-m\Omega)$$
$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(r,\theta)e^{im\varphi}e^{-i\omega t}\tag{3.5}$$

Частными решениями этого уравнения, регулярными в начале координат, будут функции

$$\mathbf{T}_{nm}+\operatorname{grad}\tau_{nm},\quad \mathbf{S}_{nm}+\operatorname{grad}\sigma_{nm} \tag{3.6}$$

где $\mathbf{T}_{nm}$, $\mathbf{S}_{nm}$ определяются выражениями (3.2), а скалярные функции τ_{nm}, σ_{nm} имеют вид

$$\tau_{nm}=-\frac{i\Omega}{\omega}r\sin\theta\frac{\partial\psi_{nm}}{\partial\theta}=\frac{i\Omega}{\omega}r(k_mr)^{-1/2}J_{n+1/2}(k_mr)\times$$
$$\times(2n+1)^{-1}[(n+1)(n+m)P_{n-1}^{m}(\theta)-n(n-m+1)P_{n+1}^{m}(\theta)]e^{im\varphi}e^{-i\omega t} \tag{3.7}$$
$$\sigma_{nm}=-\frac{m\Omega}{\omega k_m}\frac{\partial(r\psi_{nm})}{\partial r}$$

Магнитное поле в шаре описывается формами $\mathbf{S}_{nm}$, поэтому общее решение для электрического поля будет

$$\mathbf{E}^i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}{}^{i}\frac{i\mu\omega}{k_m}(\mathbf{T}_{nm}+\operatorname{grad}\tau_{nm}) \tag{3.8}$$

Потенциальное электрическое поле в шаре обусловлено его вращением и никак не зависит от первичного потенциального поля, которое, наводя поверхностную плотность заряда, вообще не проникает в проводящий шар. Электрическому полю (3.8) соответствует поляризация $\mathbf{P}^i=-\varepsilon_0\mathbf{E}^i$ и объемная плотность заряда

$$\rho^i=-\operatorname{div}\mathbf{P}^i=\frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}{}^{i}\frac{i\mu\omega}{\mu_0k_m}\operatorname{div}\operatorname{grad}\tau_{nm} \tag{3.9}$$

Если первичное поле имеет вид

$$\mathbf{H}^\circ=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}{}^{\circ}\mathbf{S}_{nm}{}^{1},\quad \mathbf{E}^\circ=i\omega\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}{}^{\circ}\mathbf{T}_{nm}{}^{1}+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-p}^{p}C_{pq}{}^{\circ}\mathbf{L}_{pq}{}^{1}$$

то вторичное будет определяться выражениями

$$\mathbf{H}^e=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}{}^{e}\mathbf{S}_{nm}{}^{2}$$

$$\mathbf{E}^e=i\omega\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(A_{nm}^{e}\mathbf{T}_{nm}^{2}+B_{n-1\,m}^{e}\mathbf{L}_{n-1\,m}^{2}+B_{n+1\,m}^{e}\mathbf{L}_{n+1\,m}^{2})+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=-p}^{p}C_{pq}{}^{e}\mathbf{L}_{pq}{}^{2}$$

Граничные условия на поверхности шара ($r=a$) определяют коэффициенты и поверхностную плотность заряда. Например

$$A_{nm}{}^{i}=\frac{A_{nm}{}^{\circ}(2n+1)a^{n-1}(k_ma)^{1/2}}{J_{n+1/2}(k_ma)[1-n(1-\mu/\mu_0)l_n(k_ma)]} \tag{3.10}$$
$$l_n(k_ma)=J_{n+1/2}(k_ma)/(k_maJ_{n-1/2}(k_ma))$$

4. Объемная и поверхностная плотность заряда, обусловленная движением твердого тела, весьма незначительна (пропорциональна $1/c^2$),

поэтому главный момент пондеромоторных сил, действующих на шар, будем вычислять по формуле

$$\mathbf{M}=\int \mathbf{r}\times[\mathbf{J}\times\mathbf{B}]dV \tag{4.1}$$

Согласно (3.3) и (3.4) вычислению подлежит вектор-интеграл

$$\int \mathbf{r}\times[\mathbf{T}_{pq}\times\mathbf{S}_{nm}]dV \tag{4.2}$$

проекции которого на ось Oz—$\{\ \}_z$ и плоскость Oxy—$\{\ \}_\rho=\{\ \}_x+i\{\ \}_y$ соответственно равны

$$\left\{\int \mathbf{r}\times[\mathbf{T}_{pq}\times\mathbf{S}_{nm}]dV\right\}_z=-\int [\mathbf{T}_{pq}]_\theta[\mathbf{S}_{nm}]_r r\sin\theta\, dV$$

$$\left\{\int \mathbf{r}\times[\mathbf{T}_{pq}\times\mathbf{S}_{nm}]dV\right\}_\rho=\int ([\mathbf{T}_{pq}]_\theta\cos\theta+i[\mathbf{T}_{pq}]_\varphi)[\mathbf{S}_{nm}]_r e^{im\varphi}r\, dV$$

В результате будем иметь

$$\left\{\int \mathbf{r}\times[\mathbf{T}_{nm}{}^*\times\mathbf{S}_{nm}]dV\right\}_z=4\pi\frac{n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}mi\frac{I_{nn}(k_m{}^*,k_m)}{(k_m{}^*k_m{}^3)^{1/2}} \tag{4.3}$$

$$\left\{\int \mathbf{r}\times[\overset{*}{\mathbf{T}}_{n\,m+1}\times\mathbf{S}_{nm}]dV\right\}_\rho=-4\pi\frac{n(n+1)(n+m+1)!}{(2n+1)(n-m-1)!}i\frac{I_{nn}(\overset{*}{k}_{m+1},k_m)}{(\overset{*}{k}_{m+1}k_m{}^3)^{1/2}} \tag{4.4}$$

$$\left\{\int \mathbf{r}\times[\mathbf{T}_{n\,m-1}\times\overset{*}{\mathbf{S}}_{nm}]dV\right\}_\rho=4\pi\frac{n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}i\frac{I_{nn}(k_{m-1},k_m{}^*)}{(k_{m-1}k_m{}^{*3})^{1/2}} \tag{4.5}$$

$$I_{nn}(k,\ k^*)=kaJ_{n-1/2}(ka)k^*aJ_{n-1/2}(k^*a)[l_n(ka)-l_n(k^*a)]/(k^2-k^{*2}) \tag{4.6}$$

Отличный от нуля результат получается в том случае, когда магнитная индукция и плотность тока описываются формами одинаковой степени n. Момент вокруг оси Oz дают сопряженные формы одинакового порядка m. Момент относительно оси в экваториальной плоскости Oxy обусловлен сопряженными формами, порядки которых отличаются на единицу. Для любых других соотношений индексов n, p и m, q в (4.2) эти интегралы равны нулю.

5. Рассмотрим движение твердого тела сферической формы в быстро вращающемся электромагнитном поле. Будем считать, что все моменты инерции твердого тела различны ($I_x=I_1>I_y=I_2>I_z=I_3$). Мгновенное положение твердого тела определим углами Эйлера ψ, θ, φ. Пусть нормальная компонента магнитной индукции первичного поля имеет вид

$$[\mathbf{B}^\circ]_r=\mu_0H_0P_n{}^m(\theta')\cos(m\varphi'-\omega t)$$

т. е. первичное поле в исходной системе координат с осью Oz вдоль вектора кинетического момента описывается двумя сопряженными формами

$$\mathbf{H}^\circ=H_{nm}{}^\circ\mathbf{S}_{nm}{}^1+A_{nm}{}^{\circ*}\mathbf{S}_{nm}{}^{1*},\quad \mathbf{E}^\circ=i\mu_0\omega(A_{nm}{}^\circ\mathbf{T}_{nm}{}^1-A_{nm}{}^{\circ*}\mathbf{T}_{nm}{}^{1*})$$
$$A_{nm}{}^\circ=A_{nm}{}^{\circ*}=H_0a^{-n+1}n^{-1}(n+1)^{-1} \tag{5.1}$$

Формы (5.1) представляют собой одну пару членов разложения вращающегося поля порядка m.

При отсутствии возмущающего поля твердое тело движется по инерции. Различают три случая: эпициклоидальное, перициклоидальное и промежуточное движение. При наличии электромагнитного поля возникающие моменты пондеромоторных сил нарушают условие, при котором имеет место промежуточный тип движения. Эпициклоидальное и перициклоидальное движения с точностью до переобозначения осей одинаковы, поэтому достаточно рассмотреть один тип движения, например эпициклоидальный.

Таким образом будем иметь

$$\omega_1=(I_2I_3)^{1/2}(I_1-I_2)^{-1/2}(I_1-I_3)^{-1/2}\nu k\,\mathrm{cn}\,\tau,\qquad \omega_2=(I_3I_1)^{1/2}(I_2-I_3)^{-1/2}(I_1-I_2)^{-1/2}\nu k\,\mathrm{sn}\,\tau$$

$$\omega_3=(I_2I_2)^{1/2}(I_1-I_3)^{-1/2}(I_2-I_3)^{-1/2}\nu\,\mathrm{dn}\,\tau \tag{5.2}$$

$$\nu=[(2TI_1-H^2)(I_2-I_3)]^{1/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2}$$

$$k=[(H^2-2TI_3)(I_1-I_2)]^{1/2}[(2TI_1-H^2)(I_2-I_3)]^{-1/2},\qquad \tau=-\nu(t-t_0) \tag{5.3}$$

где $\mathrm{cn}\,\tau$, $\mathrm{sn}\,\tau$, $\mathrm{dn}\,\tau$ — эллиптические функции Якоби, T — кинетическая энергия, H — кинетический момент.

Угол нутации θ и скорости $\dot\psi$, $\dot\varphi$ меняются по периодическому закону около постоянных средних значений. В дальнейшем будем рассматривать только среднее движение, которое полностью определяется значениями кинетической энергии и кинетического момента. В качестве новых переменных примем параметры ν, k и фазу τ. Из уравнений Эйлера следует

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{(I_2-I_3)(I_1-I_2)}{I_1I_2I_3}\frac{\omega_2M_2}{\nu}+\frac{(I_2-I_3)(I_1-I_3)}{I_1I_2I_3}\frac{\omega_3M_3}{\nu}$$

$$\frac{dk}{dt}=\frac{(I_1-I_2)(I_1-I_3)}{I_1I_2I_3}\frac{\omega_1M_1}{\nu^2k}+\frac{(I_1-I_2)(I_2-I_3)}{I_1I_2I_3}(1-k^2)\frac{\omega_2M_2}{\nu^2k}-$$

$$-\frac{(I_2-I_3)(I_1-I_2)}{I_1I_2I_3}k^2\frac{\omega_3M_3}{\nu^2k} \tag{5.4}$$

M_1, M_2, M_3 — компоненты момента пондеромоторных сил.

Проинтегрировать эти уравнения в общем случае не представляется возможным, поэтому рассмотрим два предельных случая.

На начальной стадии движения твердого тела, когда его угловая скорость много меньше частоты поля, можно считать, что $k_m{}^2\approx i\mu\sigma\omega$, т. е. твердое тело неподвижно относительно электромагнитных процессов, протекающих в нем. Тогда в системе координат, в которой задано первичное поле (5.1), для магнитной индукции и плотности тока в шаре будем иметь

$$\mathbf{B}^i=A_{nm}{}^i\mu\mathbf{S}_{nm}+A_{nm}{}^{i*}\mu^*\mathbf{S}_{nm}{}^*,\qquad \mathbf{J}^i=A_{nm}{}^ik_0\mathbf{T}_{nm}+A_{nm}{}^{i*}k_0{}^*\mathbf{T}_{nm}{}^*$$

Пондеромоторные силы согласно (4.3) дают момент только вдоль оси Oz'. Обозначим через γ_1, γ_2, γ_3 направляющие косинусы углов между осью Oz' и главными осями тензора инерции твердого тела.

Тогда

$$M_i=M_{z'}\gamma_i=M_{z'}I_i\omega_i/H\qquad (i=1,2,3) \tag{5.5}$$

и уравнения (5.4) принимают вид

$$H\frac{d\nu}{dt}=M_{z'}\nu,\qquad \frac{dk}{dt}=0 \tag{5.6}$$

Из соотношений (5.3) для кинетического момента получаем выражение

$$H=\nu\left[\frac{I_1I_2I_3^2}{(I_1-I_3)(I_2-I_3)}+k^2\frac{I_1^2I_2I_3}{(I_1-I_2)(I_1-I_3)}\right]^{1/2} \tag{5.7}$$

Из изложенного выше заключаем, что параметр ν во времени изменяется по линейному закону. Твердое тело движется по начальной траектории, кинетическая энергия и кинетический момент растут во времени по линейному закону. Уравнение для фазы τ в рассматриваемом приближении имеет вид

$$d\tau/dt=-\nu \tag{5.8}$$

т. е. аргумент эллиптических функций меняется во времени по квадратичному закону.

Другое приближенное решение получим, проводя линеаризацию по параметру k, считая $k\ll1$. В этом случае угол нутации θ мал. Преобразуем поле (5.1) к системе координат, связанной с твердым телом. Согласно формулам (1.2)—(1.5) все функции $F^m_{n(-q)}$, F^m_{nq}, кроме

$$F^m_{n\,m-1}(\psi,\theta,\varphi)\approx-{}^1/{}_2i\theta\exp\{i[m(\psi+\varphi)-\varphi]\}(n+m)(n-m+1)$$

$$F_{nm}{}^m(\psi,\theta,\varphi)\approx\exp\{i[m(\psi+\varphi)]\},\ F^m_{n\,m+1}(\psi,\theta,\varphi)\approx-{}^1/{}_2i\theta\exp\{i[m(\psi+\varphi)+\varphi]\}$$

являются малыми величинами более высокого порядка. Поэтому первичное поле будет иметь вид

$$\mathbf{H}^\circ=A_{nm}{}^\circ\sum_{q=m-1}^{m+1}F_{nq}{}^m\mathbf{S}_{nq}{}^1+A_{nm}{}^{\circ*}\sum_{q=m-1}^{m+1}F_{nq}{}^{m*}\mathbf{S}_{nq}{}^{1*}$$

$$\mathbf{E}^\circ=-\mu_0\frac{d}{dt}\left[A_{nm}{}^\circ\sum_{q=m-1}^{m+1}F_{nq}{}^m\mathbf{T}_{nq}{}^1+A_{nm}{}^{\circ*}\sum_{q=m-1}^{m+1}F_{nq}{}^{m*}\mathbf{T}_{nq}{}^{1*}\right] \tag{5.9}$$

Поле внутри шара будет описываться аналогичными формами. В рассматриваемом приближении осевой момент пондеромоторных сил определяется формами порядка m, т. е. момент вокруг оси Oz такой же, как и при перманентном движении. Происходит разгон или торможение твердого тела точно так же, как и при совпадении оси Oz тела с осью вращения электромагнитного поля Oz'. Экваториальная составляющая момента обусловлена наличием форм, порядки которых отличаются на единицу, и пропорциональна $i\theta\exp(-i\varphi)=\gamma_1+\gamma_2$. Чтобы оценить эти моменты, положим, что углы φ и ψ изменяются по линейному закону; угол нутации θ, пропорциональный параметру k, в силу линейного приближения изменяется по экспоненте $k=K_0\exp(\lambda t)$.

Тогда поле внутри шара будет

$$\mathbf{B}^i=\sum_{q=m-1}^{m+1}(F_{nq}{}^mA_{nq}{}^i\mu\mathbf{S}_{nq}+F_{nq}{}^{m*}A_{nq}{}^{i*}\mu^*\mathbf{S}_{nq}{}^*)$$

$$\mathbf{J}^i=\sum_{q=m-1}^{m+1}(F_{nq}{}^mA_{nq}{}^ik_q\mathbf{T}_{nq}+F_{nq}{}^{m*}A_{nq}{}^{i*}k_q{}^*\mathbf{T}_{nq}{}^*)$$

$$k_{m-1}^2 = i\mu\sigma[i\lambda+\omega-m(\psi^{\cdot}+\varphi^{\cdot})+\varphi^{\cdot}], \qquad k_m^2 = i\mu\sigma[\omega-m(\psi^{\cdot}+\varphi^{\cdot})]$$

$$k_{m+1}^2 = i\mu\sigma[i\lambda+\omega-m(\psi^{\cdot}+\varphi^{\cdot})-\varphi^{\cdot}]$$

Вычисляя осевую и экваториальную составляющие момента по формулам (3.10), (4.3)—(4.6) и (5.1), получим

$$M_z = 4\pi\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}mH_0^2a^3\frac{i\mu k_m{}^{*2}-i\mu^* k_m{}^2}{k_m{}^2-k_m{}^{*2}}[l_n(k_m a)-l_n(k_m{}^* a)]\times$$

$$\times\left[1-n\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)l_n(k_m a)\right]^{-1}\left[1-n\left(1-\frac{\mu^*}{\mu_0}\right)l_n(k_m{}^* a)\right]^{-1}$$

$$M_\rho = \frac{i\theta}{2}e^{-i\varphi}4\pi\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}H_0^2a^3\times$$

$$\times\sum_{q=m}^{m+1}(-1)^{m-q}(n-q+1)(n+q)\frac{i\mu k_q{}^{*2}-i\mu^* k_{q-1}^2}{k_{q-1}^2-k_q{}^{*2}}[l_n(k_{q-1}a)-l_n(k_q{}^* a)]\times$$

$$\times\left[1-n\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)l_n(k_{q-1}a)\right]^{-1}\left[1-n\left(1-\frac{\mu^*}{\mu_0}\right)l_n(k_q{}^* a)\right]^{-1}$$

Для больших и малых значений аргумента функций Бесселя имеют место оценки

$$l_n(z) = \frac{J_{n+1/2}(z)}{zJ_{n-1/2}(z)} = \begin{cases} \dfrac{i}{z}, & |z|\gg 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2n+3}+\dfrac{2z^2}{(2n+3)^2(2n+5)}, & |z|\ll 1 \end{cases}$$

Воспользуемся этими оценками, считая $\mu/\mu_0\approx\mu^*/\mu_0\gg 1$, $k_m a\ll 1$, $k_{m-1}a\gg$ $\gg 2n+3$, $k^*_{m+1}a\gg 2n+3$, что соответствует стальному шару, вращающемуся со скоростью, близкой к синхронной $m(\psi^{\cdot}+\varphi^{\cdot})\approx\omega$. В результате получим

$$M_z = 4\pi\frac{(2n+1)(n+m)!}{n(n+1)(n-m)!}mH_0^2a^3\mu_0\frac{4}{2n+5}\mu_0\sigma[\omega-m(\psi^{\cdot}+\varphi^{\cdot})]a^2 \tag{5.10}$$

$$M_\rho = (\gamma_2-i\gamma_1)4\pi\frac{(2n+1)(n+m)!}{n(n+1)(n-m)!}mH_0^2a^3\mu_0\frac{\mu_0}{n^2}a\left[\frac{\sigma(\lambda-i\varphi^{\cdot})}{\mu}\right]^{1/2}$$

$$M_1 = M_0(-\gamma_1\beta+\gamma_2\alpha), \quad M_2 = M_0(-\gamma_2\beta-\gamma_1\alpha), \quad M_3\approx 0 \tag{5.11}$$

$$M_0 = 4\pi\frac{(2n+1)(n+m)!m}{n(n+1)(n-m)!n^2}H_0^2a^3\mu_0$$

$$\alpha = \mathrm{Re}(\mu_0 a[\sigma[\lambda-i\varphi^{\cdot})/\mu]^{1/2})>0, \quad \beta = -\mathrm{Im}(\mu_0 a[\sigma(\lambda-i\varphi^{\cdot})/\mu]^{1/2})>0$$

Подставим выражения (5.11) в уравнения (5.4). С точностью до первой степени параметра k будем иметь

$$d\nu/dt=0,\quad dk/dt=-(M_0N_1\beta-M_0N_2\alpha\sin 2\tau)k/\nu$$

$$N_1=[(I_1-I_3)(I_2-I_3)/(I_1I_2)]^{1/2}/I_3,\quad N_2=(I_1-I_2)/(2I_1I_2)$$

Так как $N_1>N_2$, то параметр k экспоненциально стремится к нулю ($\lambda<0$). Таким образом, устанавливается перманентное вращение.

Поскольку на плоскости (k,ν) для правых частей уравнений (5.4) других особых точек, кроме ($k=0$, $\nu=N_1I_3\omega$), нет, заключаем, что перманентное вращение, когда наибольшая или наименьшая ось тензора инерции твердого тела совпадает с осью вращения магнитного поля, асимптотически устойчиво.

Для симметричного твердого тела ($I_1=I_2\neq I_3$) этот факт имеет экспериментальное подтверждение [20].

Поступила 23 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hertz H.* Über die Induktion in rotierenden Kugeln. Berlin, 1880.
2. *Mie G.* Beiträge zur Optik trüber Mediem. Ann. Physik, 1908, Bd 25, Nr 4, S. 377—445.
3. *Chapman S., Bartels J.* Geomagnetism vol. 1—2. Oxford Clarendon Press, 1940.
4. *Elsasser W. M.* Induction theory in terrestrial magnetism, pt I. Theory Phys. Rev., 1946, vol. 69, No. 3—4, p. 106—116; pt II. The secular variation. Phys. Rev., 1946, vol. 70, No. 3—4, p. 202—212; pt III. Electric modes. Phys. Rev., 1947, vol. 72, No. 9, p. 821—833.
5. *Bullard E. C.* Electromagnetic induction in a rotating sphere. Proc. Roy. Soc. A, 1949, vol. 199, No. 1059, p. 413—443.
6. *Bullard E. C., Gellman H.* Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. Philos. Trans. Roy. Soc. A, 1954, vol. 247, No. 928, p. 213—278.
7. *Parker R. L.* Reconnexion of lines of force in rotating spheres and cylinders. Proc. Roy. Soc. A, 1966, vol. 291, No. 1424, p. 60—72.
8. *Брук И. С.* Теория асинхронного двигателя с массивным ротором. Вестн. эксперим. и теор. электротехники, 1928, № 2.
9. *Лебедев А. А.* Асинхронный двигатель со сферическим массивным ротором. Изв. вузов. Электромеханика, 1960, № 1.
10. *Rädler K. H.* Elektromagnetische Induktion in rotierenden Medien. Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss, Berlin, 1964, Bd 6, Nr 1, S. 5—10.
11. *Розовский Ю. А.* Стационарные электромагнитные процессы асинхронного двигателя со сплошным сферическим ротором. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1967, № 3; Электромагнитный момент асинхронного двигателя со сплошным сферическим ротором. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1967, № 6.
12. *Дивильковский М. А.* Задача о шаре, помещенном в однородное переменное магнитное или электрическое поле. Ж. техн. физ., 1939, т. 9, вып. 5.
13. *Poritsky H.* Conducting sphere in alternating magnetic fields. Trans. AIEE. Commun. and Electronics, 1960, vol. 78, pt 1, No. 46, p. 937—942.
14. *Brisley W., Thornton B. S.* Electromagnetic levitation calculations for axially symmetric systems. Brit. J. Appl. Phys., 1963, vol. 14, No. 10, p. 682—686.
15. *Фомин А. А.* Шар в поле витка с током. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, вып. 9.
16. *Кунин П. Е., Таксар Н. М., Микельсон Ю. А., Валдаманис Я. Я.* Распределение индукционных токов и электродинамических сил в проводящей сфере, находящейся в магнитном поле витка или катушки с током. Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ.-техн. наук, 1965, № 1.
17. *Smith W. E.* Electromagnetic levitation forces and effective inductance in axially symmetric systems. Brit. J. Appl. Phys., 1965, vol. 16, No. 3, p. 377—383.
18. *Сермонс Г. Я.* Динамика твердых тел в электромагнитном поле. Рига, «Зинатне», 1974.
19. *Линьков Р. В., Урман Ю. М.* Пондеромоторное взаимодействие вращающегося проводящего шара с переменным неоднородным магнитным полем. Ж. техн. физ., 1974, т. 44, вып. 11.
20. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
21. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
22. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. И., Изд-во иностр. лит., 1952.