УДК 539.3

ВНЕЗАПНОЕ ДВИЖЕНИЕ КЛИНА В УПРУГОЙ СРЕДЕ

О. А. ЕГОРЫЧЕВ, В. В. ТРЕТЬЯКОВ

(Москва)

Пусть жесткий клин с углом раствора $2\alpha<\pi$ вставлен в упругую среду таким образом, что ребро его совпадает с осью z, а ось x направлена вдоль биссектрисы угла клина. Трение между упругой средой и жестким клином отсутствует. В момент времени $t=0$ клин начинает двигаться с постоянной скоростью $D\ll a$, где a – скорость распространения продольных волн, в направлении, обратном оси x. Для удобства целесообразно решать обратную задачу: клин неподвижен, при $t=0$ внезапно начинает двигаться среда с постоянной скоростью в направлении оси x.

Таким образом задача решается при условии, что на гранях клина отсутствуют касательные напряжения и нормальные к границе составляющие вектора упругого смещения. Рассмотрение граничных условий позволяет сделать заключение, что поперечный потенциал $\Psi=0$[1].

Потенциал продольных волн описывается в этом случае волновым уравнением на плоскости. Поскольку задача автомодельна, то потенциал выражается однородной функцией относительно t и $r=(x^2+y^2)^{1/2}$. Граничные условия для потенциала φ_2 имеют вид (см. фигуру)

$$\partial\varphi_2/\partial\theta=0 \text{ на } O\bar{A} \text{ и } OA_1,\ \theta=\operatorname{arctg}(y/x)$$

$$\varphi_2=Dat^2\{\cos\alpha\cos(\theta-\alpha)-$$

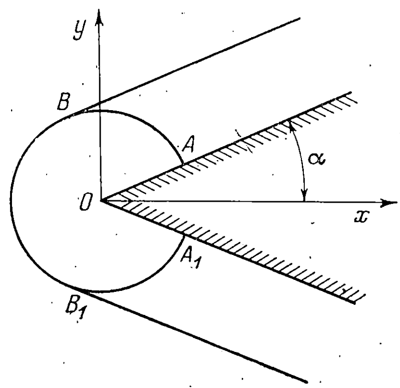
$$-{}^1/_2\sin\alpha[1+\sin^2(\varphi-\alpha)]\} \quad \text{при} \quad r=at \qquad (1)$$

$$\alpha\leqslant\theta\leqslant\pi/2+\alpha$$

$$\varphi_2=Dat^2\cos\theta \text{ при } r=at,\ \pi/2+\alpha\leqslant\theta\leqslant3\pi/2-\alpha$$

$$\varphi_2=Dat^2\{\cos\alpha\cos(\theta+\alpha)-$$

$$-{}^1/_2\sin\alpha[1+\sin^2(\theta+\alpha)]\}$$



Известно [3], что если $\left.\dfrac{\varphi_2}{a^2t^2}\right|_{r=at}=\varphi_0|_{r=at}$

где φ_2 и φ_0 – однородные относительно t и r решения волнового уравнения размерности два и нуль соответственно, то φ_2 и φ_0 связаны между собой следующим соотношением:

$$\varphi_2=\frac{1}{3a^2}(a^2t^2-r^2)^{5/2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\varphi_0}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\right) \qquad (2)$$

Известно также [4], что однородное относительно t и r решение волнового уравнения нулевой размерности удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_0}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\theta^2}=0,\qquad R=\frac{at}{r}-\left(\frac{a^2t^2}{r^2}-1\right)^{1/2} \qquad (3)$$

Таким образом для решения поставленной задачи достаточно решить уравнение Лапласа (3) с граничными условиями (1), где опускается множитель a^2t^2, и при помощи соотношения (2) определить потенциал продольных волн φ_2.

Учитывая первое условие в (1), решение уравнения Лапласа (3) можно получить, используя конформное преобразование $R_1=R^q$, $\theta_1=q(\theta-\alpha)$ и применяя интеграл Пуассона по окружности $R_1=1$ $(q=\pi/(\pi-\alpha))$.

При этом интегрирование может быть произведено в конечном виде для рациональных значений q, изложенное выше иллюстрируется примером для $\alpha=\pi/4$. В этом случае выражение для потенциала φ_2 имеет вид

[1] Тождественное равенство поперечного потенциала нулю в симметричных задачах о дифракции продольной волны на клине показано и ранее (см., например, [1, 2]).

$$\varphi_2=a\frac{D\sqrt{2}\,t^2}{4\pi}\sum_{i=0}^{2}\left\{\frac{4R}{1+R^2}\left[\sin\frac{3}{2}\nu_i\operatorname{arctg}\frac{2R^{1/3}\cos{}^1/_2\nu_i}{1-R^{2/3}}+\right.\right.$$

$$\left.+\cos\frac{3}{2}\nu_i\operatorname{arctg}\frac{2R^{1/3}\sin{}^1/_2\nu_i}{1-R^{2/3}}\right]-\left[1+\frac{2R^2}{(1+R^2)^2}\right]\operatorname{arctg}\frac{1+R^{4/3}}{1-R^{4/3}}\operatorname{tg}\nu_i-$$

$$\left.-(R^{2/3}-R^{-2/3})\frac{2R^{1/3}\sin 2\nu_i}{(1+R^2)^2}-\frac{2R^2}{(1+R^2)^2}\cos 3\nu_i\operatorname{arctg}\frac{2R^{2/3}\sin\nu_i}{1-R^{4/3}}\right\}$$

$$\nu_1={}^1/_2\pi-{}^2/_3\theta,\qquad \nu_2={}^1/_6\pi+{}^2/_3\theta$$

Тогда деформации относительно осей x и y будут определяться зависимостями

$$\varepsilon_x=\frac{D\sqrt{2}}{4a\pi}\sum_{i=1}^{2}\left\{(R^{-2/3}-R^{2/3})\sin 2[\nu_i-(-1)^i\theta]-\operatorname{arctg}\frac{1+R^{4/3}}{1-R^{4/3}}\operatorname{tg}\nu_i\right\}$$

$$\varepsilon_y=\frac{D\sqrt{2}}{4a\pi}\sum_{i=1}^{2}\left\{(R^{2/3}-R^{-2/3})\sin 2[\nu_i-(-1)^i\theta]-\operatorname{arctg}\frac{1+R^{4/3}}{1-R^{4/3}}\operatorname{tg}\nu_i\right\}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{D\sqrt{2}}{2a\pi}\sum_{i=1}^{2}\left\{(-1)^i(R^{-2/3}-R^{2/3})\cos 2[\nu_i-(-1)^i\theta]+(-1)^i\operatorname{arctg}\frac{2R^{2/3}\sin\nu_i}{1-R^{4/3}}\right\}$$

Далее нетрудно получить выражения для напряжений

$$\sigma_x=\frac{D\sqrt{2}}{2a\pi}\sum_{i=1}^{2}\left\{\mu(R^{-2/3}-R^{2/3})\sin 2[\nu_i-(-1)^i\theta]-(\lambda+\mu)\operatorname{arctg}\frac{1+R^{4/3}}{1-R^{4/3}}\operatorname{tg}\nu_i\right\}$$

$$\sigma_y=-\frac{D\sqrt{2}}{2a\pi}\sum_{i=1}^{2}\left\{\mu(R^{-2/3}-R^{2/3})\sin 2[\nu_i-(-1)^i\theta]+(\lambda+\mu)\operatorname{arctg}\frac{1+R^{4/3}}{1-R^{4/3}}\operatorname{tg}\nu_i\right\}$$

$$\tau_{xy}=\mu\frac{D\sqrt{2}}{2a\pi}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\left\{(R^{-2/3}-R^{2/3})\cos 2[\nu_i-(-1)^i\theta]+\operatorname{arctg}\frac{2R^{2/3}\sin\nu_i}{1-R^{4/3}}\right\}$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе.

Из решения видно, что на ребре клина напряжения и деформации обращаются в бесконечность порядка $R^{-2/3}$, но объемная деформация $\varepsilon_x+\varepsilon_y$ конечна и ее можно определить для любого угла α полураствора клина

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y=-\frac{D}{2a\pi}\sin\alpha\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{1+R^q}{1-R^q}\operatorname{tg}q\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\left[\frac{1+R^q}{1-R^q}\operatorname{tg}q\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

Поступила 1 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свекло А. В., Сюкияйнен В. А.* Дифракция плоской упругой волны относительно угла. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 6.
2. *Костров Б. В.* Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. *Третьяков В. В.* Новые аналитические решения волнового уравнения и задача дифракции. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
4. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.– Л., ОНТИ, 1937.