## ЛИТЕРАТУРА


1. *Anliker M., Raman K. R.* Korotkoff sounds at diastole-aphenomenon of dynamic instability of fluid-filled shells. Internat. J. Solids and Structures, 1966, vol. 2, No. 3. (Рус. перев.: Гидромеханика кровообращения. М., «Мир», 1971.)
2. *Мультановский М. П.* Метод Короткова. История его открытия, клинического и экспериментального толкования и современная оценка. Cor et Vasa, 1970, № 1.
3. *Регирер С. А.* Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения. Гидродинамика кровообращения. М., «Мир», 1971.
4. *Fung Yuan-Cheng B.*, Biomechanics, its Scope, history and some problems of continuum mechanics in physiology. Appl. Mech. Revs., 1968, vol. 21, No. 1. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1968, № 6.)
5. *Прессман Л. П.* Кровяное давление и сосудистый тонус в физиологии и патологии кровообращения. М., Медгиз, 1952.
6. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1974.
7. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
8. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
9. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.


---

УДК 539.3

# ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

(*Ленинград*)

**В. В. ЕЛИСЕЕВ**

Рассматривается задача теории упругости о равновесии криволинейного стержня, нагруженного по боковой поверхности и торцам. Стержень считается весьма тонким, а изменение нагрузки вдоль оси стержня — достаточно медленным. Вводится соответствующий малый параметр $\varepsilon$, и решение ищется в виде асимптотического разложения по степеням $\varepsilon$. Результат удовлетворяет уравнениям теории упругости в объеме и граничным условиям на боковой поверхности; условия на торцах удовлетворены в интегральном смысле. Для главных членов асимптотических разложений выделена полная система уравнений, которая подтверждает классическую теорию Кирхгофа — Клебша для нерастяжимых стержней.

Асимптотический метод в задаче о равновесии цилиндра использовался в [1, 2]. В [3] рассмотрена задача о плоском изгибе криволинейного стержня, ось которого лежит в плоскости изгиба. Задача Сен-Венана для естественно закрученного стержня изучалась в [4].

Здесь рассматривается тонкий стержень произвольной геометрии. В отличие от указанных выше работ используются уравнения теории упругости в напряжениях. Перемещения определяются интегрированием соотношений закона Гука после того, как найдены напряжения. На этом этапе получены кинематические формулы и соотношения упругости теории стержней.

Последующие члены асимптотических разложений не рассмотрены, хотя и указана рекуррентная процедура для их определения. Учет последующих членов необходим при построении уточненной теории стержней (но не достаточен). По-видимому, корректное построение уточненной теории невозможно без привлечения вариационного подхода и представления о кривых сложной структуры. Некоторые черты такого синтетического подхода реализованы в [5].

1. Рассмотрим стержень, образованный движением плоской фигуры (сечения стержня) вдоль пространственной кривой — оси стержня; центр тяжести сечения находится на оси, и плоскость сечения остается нормальной к оси. Введем дуговую координату $s$ на оси и декартовы координаты $x_1$, $x_2$ в сечении с началом в центре тяжести, а также орт касательной $\mathbf{t}$ и орты $\mathbf{e}_\alpha$ осей $x_\alpha$. Пусть тройка векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{t}$ — правая и оси $x_\alpha$ — главные оси инерции сечения. При движении вдоль оси стержня

$$\mathbf{t}'=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{t},\qquad \mathbf{e}_\alpha'=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\alpha\qquad [(\cdots)'=d/ds]$$

Представим вектор $\boldsymbol{\omega}$ в виде $\boldsymbol{\omega}=\omega_t\mathbf{t}+\omega_\alpha\mathbf{e}_\alpha$.

Здесь, как и всюду ниже, используется правило суммирования по повторяющемуся греческому индексу, пробегающему значения *1*, *2*.

Радиус-вектор $\mathbf{R}(s, x_\alpha)$ произвольной точки стержня равен

$$\mathbf{R}(s, x_\alpha)=\mathbf{r}(s)+x_\alpha \mathbf{e}_\alpha(s) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки на оси.

Исходя из (1.1), обычными методами тензорного анализа получим следующее выражение для градиента:

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{t} \left( \frac{\partial}{\partial s} + \omega_t e_{\alpha\beta} x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)$$

$$e_{\alpha\beta}=(\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\cdot \mathbf{t}, \qquad \sqrt{g}=1+e_{\alpha\beta}\omega_\alpha x_\beta \tag{1.2}$$

Пусть $h$ — диаметр сечения, $l_0$ — отсчитываемое вдоль оси стержня расстояние, на котором поверхностные нагрузки меняются существенным образом. Положим $l=\min[l_0, 1/|\boldsymbol{\omega}|_{\max}]$; тогда

$$\boldsymbol{\omega}(s)=\boldsymbol{\varkappa}(\xi)/l, \qquad \xi=s/l \tag{1.3}$$

где функция $\boldsymbol{\varkappa}(\xi)$ сохраняет порядок при дифференцировании по своему аргументу ($\boldsymbol{\varkappa}(\xi)$ определяет форму оси с точностью до преобразования подобия).

Отношение $\varepsilon=h/l$ будем считать малым. Вводя безразмерные координаты $\eta_\alpha=x_\alpha/h$ и учитывая (1.3), можно градиент (1.2) представить в виде

$$\nabla = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k L_k, \qquad L_0 = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} \equiv \nabla_0 \tag{1.4}$$

$$L_1 = \mathbf{t}\left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \varkappa_t e_{\alpha\beta}\beta_\beta \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} \right), \qquad L_k = (e_{\alpha\beta}\eta_\alpha \varkappa_\beta)^{k-1} L_1 \qquad (k=2,3\ldots)$$

В дальнейшем понадобятся выражения для операторов

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{1}{h^2}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_k, \qquad \nabla\nabla = \frac{1}{h^2}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k N_k \tag{1.5}$$

Здесь, например

$$M_0 = \frac{\partial^2}{\partial \eta_\alpha \, \partial \eta_\alpha} \equiv \Delta_0, \qquad N_0 = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta_\alpha \, \partial \eta_\beta}$$

Обратимся далее к уравнению боковой поверхности. Оно имеет такой же вид, как и уравнение контура сечения: $F(\eta_\alpha)=0$. Выражение для нормали к боковой поверхности $\mathbf{n}=\nabla F/|\nabla F|$ можно привести к виду

$$\mathbf{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{n}^{(k)} = \mathbf{n}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{t} \varkappa_t e_{\alpha\beta}\eta_\beta \overset{(0)}{n_\alpha} + \ldots$$

где $\mathbf{n}^{(0)}=\nabla_0 F/|\nabla_0 F|$ — нормаль к контуру $\Gamma$ сечения в его плоскости.

2. Будем считать, что на боковой поверхности стержня задана нагрузка вида $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\xi, \eta_\alpha)$. Это означает, в частности, что изменение нагрузки вдоль оси стержня предполагается достаточно медленным.

Торцевую нагрузку примем в следующей форме:

$$s=0,\ l \ldots \ \sigma_t=\varepsilon^{-2}\sigma_{t0,l}(\eta_\alpha), \qquad \tau_\beta=\varepsilon^{-2}\tau_{\beta 0,l}(\eta_\alpha)$$

Здесь $\sigma_t$, $\tau_\beta$ — проекции вектора напряжений в сечении на направления $\mathbf{t}$, $\mathbf{e}_\beta$ (наличие множителя $\varepsilon^{-2}$ следует из условий равновесия стержня как целого).

Тензор напряжений будем искать в виде

$$\mathbf{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \{\varepsilon^{k-2}[\overset{(k)}{\sigma_t}\, \mathbf{tt} + \overset{(k)}{\tau_\alpha}\, (\mathbf{t}\mathbf{e}_\alpha+\mathbf{e}_\alpha\mathbf{t})] + \varepsilon^{k-1}\overset{(k)}{\sigma_{\alpha\beta}}\, \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta\} \tag{2.1}$$

Наличие множителя $\varepsilon^{-1}$ при $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$ вытекает, например, из анализа решения известной плоской задачи Головина [6].

Отметим, что в (2.1) $\overset{(k)}{\sigma_t}$, $\overset{(k)}{\tau_\alpha}$, $\overset{(k)}{\sigma_{\alpha\beta}}$ считаются функциями от $\xi$, $\eta_\alpha$, сохраняющими порядок при дифференцировании.

Обратимся к уравнениям теории упругости

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=0,\qquad \Delta\mathbf{T}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\sigma=0,\qquad \sigma=\sigma_t+\sigma_{\alpha\alpha} \tag{2.2}$$

где $\nu$ — коэффициент Пуассона.

Подставим (2.1) в (2.2) (с учетом выражений для операторов (1.4), (1.5)) и приравняем в полученных разложениях коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$. В итоге получим

$$\sum_{k=-2}^{q} L_{q-k}[\overset{(k+2)}{\sigma_t}\,\mathbf{tt}+\overset{(k+2)}{\tau_\alpha}\,(\mathbf{te}_\alpha+\mathbf{e}_\alpha\mathbf{t})+\overset{(k+1)}{\sigma_{\alpha\beta}}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta]=0 \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=-2}^{q}\left\{M_{q-k}[\overset{(k+2)}{\sigma_t}\,\mathbf{tt}+\overset{(k+2)}{\tau_\alpha}\,(\mathbf{te}_\alpha+\mathbf{e}_\alpha\mathbf{t})+\overset{(k+1)}{\sigma_\alpha}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta]+\frac{1}{1+\nu}N_{q-k}(\overset{(k+2)}{\sigma_t}+\overset{(k+1)}{\sigma_{\alpha\alpha}})\right\}=0$$

$$(q=-2,-1,\ldots)$$

В этих уравнениях все напряжения и операторы с отрицательными индексами следует считать равными нулю.

Применяя аналогичную процедуру к условиям на боковой поверхности $\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{p}$, приходим к следующим соотношениям:

$$\sum_{k=-2}^{q}\mathbf{n}^{(q-k)}\cdot[\overset{(k+2)}{\sigma_t}\,\mathbf{tt}+\overset{(k+2)}{\tau_\alpha}\,(\mathbf{te}_\alpha+\mathbf{e}_\alpha\mathbf{t})+\overset{(k+1)}{\sigma_{\alpha\beta}}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta]=\begin{cases}\mathbf{p}, & q=0\\ 0, & q\neq 0\end{cases} \tag{2.4}$$

Уравнения для главных членов асимптотических разложений получаются из (2.3), (2.4) при $q=-2$

$$\frac{\partial\overset{(0)}{\tau_\alpha}}{\partial\eta_\alpha}=0,\qquad \Delta_0\overset{(0)}{\sigma_t}=0,\qquad \Delta_0\overset{(0)}{\tau_\alpha}=0,\qquad \frac{\partial^2\overset{(0)}{\sigma_t}}{\partial\eta_\alpha\,\partial\eta_\beta}=0,\qquad \overset{(0)}{n_\alpha}\overset{(0)}{\tau_\alpha}|_\Gamma=0$$

Отсюда следует, что

$$\overset{(0)}{\sigma_t}=a^{(0)}(\xi)+\overset{(0)}{b_\alpha}(\xi)\eta_\alpha,\qquad \overset{(0)}{\tau_\alpha}=e_{\alpha\beta}\,\partial\Phi^{(0)}/\partial\eta_\beta \tag{2.5}$$

где функция $\Phi^{(0)}$ определяется из граничной задачи $\Delta_0\Phi^{(0)}=c^{(0)}(\xi)$, $\Phi^{(0)}|_\Gamma=0$.

Функция $a^{(0)}$, $b_\alpha^{(0)}$, $c^{(0)}$ остаются пока неопределенными, так как не использованы условия на торцах. Ниже эти функции будут определены с помощью интегральных условий равновесия частей стержня.

Допустим, что в разложении (2.1) удалось найти члены при $\varepsilon^{-2},\ldots,\varepsilon^{q-1}$. Тогда уравнения для следующих членов, связанных с $\varepsilon^q$, будут иметь вид

$$\partial\overset{(q+2)}{\tau_\alpha}/\partial\eta_\alpha+\ldots=0,\qquad \partial\overset{(q+1)}{\sigma_{\alpha\beta}}/\partial\eta_\alpha+\ldots=0 \tag{2.6}$$

$$\Delta_0\overset{(q+2)}{\sigma_t}+\ldots=0,\qquad \Delta_0\overset{(q+2)}{\tau_\alpha}+\ldots=0 \tag{2.7}$$

$$\Delta_0\overset{(q+1)}{\sigma_{\alpha\beta}}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta_\alpha\,\partial\eta_\beta}(\overset{(q+2)}{\sigma_t}+\overset{(q+1)}{\sigma_{\gamma\gamma}})+\ldots=0$$

$$\overset{(0)}{n_\alpha}\overset{(q+2)}{\tau_\alpha}|_\Gamma+\ldots=0,\qquad \overset{(0)}{n_\alpha}\overset{(q+1)}{\sigma_{\alpha\beta}}|_\Gamma+\ldots=0 \tag{2.8}$$

Здесь не выписаны выражения с низшими членами разложения, которые считаются известными. Уравнения (2.6) позволяют ввести функции напряжений

$$\overset{(q+2)}{\tau_\alpha}=e_{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi^{(q+2)}}{\partial\eta_\beta}+\ldots,\qquad \overset{(q+1)}{\sigma_{\alpha\beta}}=e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}\frac{\partial^2\Psi^{(q+1)}}{\partial\eta_\gamma\,\partial\eta_\delta}+\ldots \tag{2.9}$$

Тогда, согласно (2.7)

$$\Delta_0\Phi^{(q+2)}=c^{(q+2)}(\xi)+\cdots,\qquad \Delta_0\Delta_0\Psi^{(q+1)}+\cdots=0 \tag{2.10}$$

где функция $c^{(q+2)}$ пока считается неизвестной.

Граничные условия для уравнений (2.10) найдем путем подстановки (2.9) в (2.8). В итоге для $\Phi^{(q+2)}$ получаем задачу Дирихле, а для $\Psi^{(q+1)}$ — задачу плоской теории упругости. Если функция $\Psi^{(q+1)}$ определена, то из (2.7) будем иметь

$$\overset{(q+2)}{\sigma_t}=a^{(q+2)}(\xi)+\overset{(q+2)}{b_\alpha}(\xi)\eta_\alpha+\ldots$$

Здесь не выписаны выражения, содержащие $\Psi^{(q+1)}$, а также низшие члены разложения.

Рассмотренный рекуррентный процесс позволяет найти каждый член асимптотического разложения (2.1) с точностью до функций $a^{(q+2)}$, $b_\alpha{}^{(q+2)}$, $c^{(q+2)}$ ($q=2, -1, \ldots$).

Рассмотрим равновесие части стержня, заключенной между торцом $\xi=0$ и сечением, соответствующим некоторому текущему значению $\xi$. Интегрируя по поверхности, главный вектор действующих на данную часть внешних сил можно представить в виде

$$\mathbf{V}^{(e)}(\xi)=hl\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathbf{P}_k(\xi)$$

Главный момент сил относительно центра тяжести сечения

$$\mathbf{M}^{(e)}(\xi)=hl^2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathbf{M}_{(k)}(\xi)$$

Эти силовые факторы уравновешиваются действующими в сечении напряжениями, главный вектор и главный момент которых можно представить в форме

$$\mathbf{V}^{(i)}=h^2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k-2}\int(\overset{(k)}{\sigma_t}\mathbf{t}+\overset{(k)}{\tau_\alpha}\mathbf{e}_\alpha)\,d0,\qquad \mathbf{M}^{(i)}=h^3\mathbf{e}_\beta\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k-2}\int\eta_\beta(\overset{(k)}{\sigma_t}\mathbf{t}+\overset{(k)}{\tau_\alpha}\mathbf{e}_\alpha)\,d0$$

где интегрирование ведется по сечению стержня.

Из условий равновесия части стержня следует

$$\mathbf{P}_k+\int(\overset{(k+1)}{\sigma_t}\mathbf{t}+\overset{(k+1)}{\tau_\alpha}\mathbf{e}_\alpha)\,d0=0 \tag{2.11}$$

$$\mathbf{M}_{(k)}+\int\eta_\beta(e_{\alpha\beta}\overset{(k)}{\sigma_t}\mathbf{e}_\alpha+e_{\beta\alpha}\overset{(k)}{\tau_\alpha}\mathbf{t})\,d0=0 \tag{2.12}$$

Из этих соотношений нетрудно найти функции $a$, $b_\alpha$, $c$. Например, полагая в (2.11) $k=-1$, в (2.12) — $k=0$ и учитывая (2.5), получим

$$a^{(0)}=0,\qquad \mathbf{M}_{(0)}+\mathbf{e}_1\overset{(0)}{b_2}I_1-\mathbf{e}_2\overset{(0)}{b_1}I_2+2\mathbf{t}\int\Phi^{(0)}\,d0=0 \tag{2.13}$$

где $I_\alpha$ — деленный на $h^4$ момент инерции сечения вокруг оси $x_\alpha$. Вытекающие из (2.13) выражения для $b_\alpha{}^{(0)}$ согласуются с известными формулами сопротивления материалов.

3. Обратимся к перемещениям и деформациям, соответствующим найденным напряжениям. Будем искать перемещения в виде

$$\mathbf{u}=h\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k-4}\mathbf{u}^{(k)}(\xi,\eta_\alpha)$$

Для тензора деформаций имеем следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\nabla\mathbf{u})^s\equiv\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^T)=\frac{1}{2G}\left(\mathbf{T}-\frac{\nu}{1+\nu}\sigma\mathbf{E}\right) \tag{3.1}$$

где $G$ — модуль сдвига, $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Подставляя в (3.1) выписанные выше разложения для градиента, вектора перемещений и тензора напряжений и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\left(\sum_{k=-4}^{q} L_{q-k}\mathbf{u}^{(k+4)}\right)^{s} = \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{2G}\left[\overset{(q+2)}{\sigma_t}\,\mathbf{tt} + 2\overset{(q+2)}{\tau_\alpha}(\mathbf{t}\mathbf{e}_\alpha)^s + \overset{(q+1)}{\sigma_{\alpha\beta}}\,\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\overset{(q+2)}{\sigma_t} + \overset{(q+1)}{\sigma_{\alpha\alpha}}\right)\mathbf{E}\right] \quad (q=-4,-3,\ldots)$$

Здесь следует считать нулевыми все выражения с отрицательными индексами. При $q=-4$ из (3.2) найдем

$$\frac{\partial \overset{(0)}{u_t}}{\partial \eta_\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \overset{(0)}{u_\alpha}}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial \overset{(0)}{u_\beta}}{\partial \eta_\alpha} = 0$$

$$\overset{(0)}{u_t} = \overset{(0)}{u_t}(\xi), \qquad \overset{(0)}{u_\alpha} = \overset{(0)}{U_\alpha}(\xi) + e_{\beta\alpha}\eta_\beta\overset{(0)}{\theta_t}(\xi)$$

В правых частях этих соотношений введены пока неопределенные функции, имеющие смысл перемещений и поворотов.

Положим далее в (3.2) $q=-3$. В результате получим

$$\overset{\cdot(0)}{u_t} + \overset{(0)}{u_\alpha}\varkappa_\beta e_{\beta\alpha} + \varkappa_t\eta_\beta e_{\alpha\beta}\frac{\partial \overset{(0)}{u_t}}{\partial\eta_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \overset{(1)}{u_t}}{\partial \eta_\alpha} + \overset{(0)}{u_t}\varkappa_\beta e_{\alpha\beta} + \frac{\partial \overset{(0)}{u_\alpha}}{\partial \xi} + \overset{(0)}{u_\beta}\varkappa_t e_{\beta\alpha} + \varkappa_t\eta_\beta e_{\gamma\beta}\frac{\partial \overset{(0)}{u_\alpha}}{\partial \eta_\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \overset{(1)}{u_\alpha}}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial \overset{(1)}{u_\beta}}{\partial \eta_\alpha} = 0 \qquad \left[(\ldots)^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{d}{d\xi}\right]$$

Отсюда следует, что $\theta_t^{(0)}=0$ и

$$\overset{\cdot(0)}{u_t} + \overset{(0)}{u_\alpha}\varkappa_\beta e_{\beta\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{U}^{(1)}(\xi) + \boldsymbol{\theta}^{(1)}(\xi)\times\mathbf{e}_\alpha\eta_\alpha \tag{3.4}$$

$$e_{\beta\alpha}\overset{(1)}{\theta_\beta} + \overset{(0)}{u_t}\varkappa_\beta e_{\alpha\beta} + \overset{\cdot(0)}{u_\alpha} + \overset{(0)}{u_\beta}\varkappa_t e_{\beta\alpha} = 0 \tag{3.5}$$

Соотношения (3.3), (3.5) соответствуют первой формуле Клебша для нерастяжимых стержней [7] $\mathbf{u}^{\cdot(0)}=\boldsymbol{\theta}^{(1)}\times\mathbf{t}$.

Полагая, наконец, в (3.2) $q=-2$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\overset{\cdot(1)}{U_t} + \overset{(1)}{U_\alpha}\varkappa_\beta e_{\beta\alpha} = 0 \tag{3.6}$$

$$e_{\beta\alpha}\overset{\cdot(1)}{\theta_\beta} + \varkappa_\alpha\overset{(1)}{\theta_t} - \varkappa_t\overset{\cdot(1)}{\theta_\alpha} = \overset{(0)}{b_\alpha}/E \tag{3.7}$$

$$\partial\overset{(2)}{u_t}/\partial\eta_\alpha + \left(\overset{(1)}{U_t} + e_{\beta\gamma}\eta_\gamma\overset{(1)}{\theta_\beta}\right)\varkappa_\delta e_{\alpha\delta} + \overset{\cdot(1)}{U_\alpha} + e_{\beta\alpha}\eta_\beta\overset{\cdot(1)}{\theta_t} + \left(\overset{(1)}{U_\beta} + e_{\gamma\beta}\eta_\gamma\overset{(1)}{\theta_t}\right)\varkappa_t e_{\beta\alpha} +$$

$$+ \varkappa_t e_{\lambda\beta}\eta_\beta\overset{(1)}{\theta_t}e_{\lambda\alpha} + e_{\gamma\delta}\eta_\delta\varkappa_\gamma e_{\beta\alpha}\overset{(1)}{\theta_\beta} = \overset{(0)}{\tau_\alpha}/G \tag{3.8}$$

где $E$ – модуль Юнга. Из (3.7) и (2.13) следует, что

$$-\mathbf{M}_{(0)}\cdot\mathbf{e}_1 = EI_1\boldsymbol{\theta}^{\cdot(1)}\cdot\mathbf{e}_1, \qquad -\mathbf{M}_{(0)}\cdot\mathbf{e}_2 = EI_2\boldsymbol{\theta}^{\cdot(1)}\cdot\mathbf{e}_2$$

Это – известные соотношения классической теории стержней [7]. Уравнение (3.8) можно представить в виде

$$e_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\theta_\beta} + \eta_\beta e_{\beta\alpha}A + \partial \overset{(2)}{u_t}/\partial\eta_\alpha = \overset{(0)}{\tau_\alpha}/G, \qquad e_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\theta_\beta} = \overset{\cdot(1)}{U_t}e_{\alpha\beta}\varkappa_\beta + \overset{\cdot(1)}{U_\alpha} + \overset{(1)}{U_\gamma}\varkappa_t e_{\gamma\alpha}$$

$$A = \overset{\cdot(1)}{\theta}\cdot \mathbf{t} = \overset{\cdot(1)}{\theta_t} + \overset{(1)}{\theta_\alpha}\varkappa_\beta e_{\beta\alpha} \tag{3.9}$$

Из (3.9) получаем

$$\overset{(2)}{u_t} = \overset{(2)}{U_t}(\xi) + e_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\theta_\alpha}\eta_\beta + \overset{(2)}{u_{t0}}$$

В этом соотношении последнее слагаемое характеризует депланацию сечения и определяется уравнением

$$\eta_\beta e_{\beta\alpha}A + \partial\overset{(2)}{u_{t0}}/\partial\eta_\alpha = \overset{(0)}{\tau_\alpha}/G \tag{3.10}$$

Учитывая далее, что $\partial\overset{(0)}{\tau_\alpha}/\partial\eta_\alpha=0$, $\overset{(0)}{n_\alpha}\overset{(0)}{\tau_\alpha}|_\Gamma=0$, приходим к следующему представлению депланации:

$$\overset{(2)}{u_{t0}}=A\varphi, \qquad \Delta_0\varphi=0, \qquad \overset{(0)}{n_\alpha}\partial\varphi/\partial\eta_\alpha+\overset{(0)}{n_\alpha}\eta_\beta e_{\beta\alpha}=0 \tag{3.11}$$

Нетрудно убедиться, что условие разрешимости задачи Неймана (3.11) выполнено.

Соотношениями Коши – Римана $\partial\varphi/\partial\eta_\alpha=e_{\alpha\beta}\partial\varphi^\circ/\partial\eta_\beta$ введем сопряженную с $\varphi$ гармоническую функцию $\varphi^\circ$. Положим далее $\varphi^*=\varphi^\circ-\eta_\alpha\eta_\alpha/2$. Тогда, согласно (3.11) и (3.10)

$$\Delta_0\varphi^*=-2, \qquad \varphi^*|_\Gamma=0, \qquad \overset{(0)}{\tau_\alpha}=GAe_{\alpha\beta}\,\partial\varphi^*/\partial\eta_\beta$$

Теперь выражение для крутящего момента

$$-\mathbf{M}_{(0)}\cdot\mathbf{t} = \int e_{\alpha\beta}\eta_\alpha\overset{(0)}{\tau_\beta}\,d0$$

можно привести к форме

$$-\mathbf{M}_{(0)}\cdot\mathbf{t} = GA2\int\varphi^*\,d0$$

Таким образом, для жесткости на кручение получается известное интегральное представление.

Итак, найденные главные члены асимптотических разложений подтверждают основные соотношения теории Кирхгофа – Клебша для нерастяжимых стержней.

Автор признателен А. И. Лурье за внимание к работе.

Поступила 13 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понятовский В. В.* Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.
2. *Rigolot A.* Théorie asymptotique des milieux curvilignes et équilibre élastique d'un cylindre infiniment élancé. C. r. Acad. sci., 1971, t. 272, № 11.
3. *Понятовский В. В.* Асимптотическая теория изгиба кривого бруса. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, № 9. Изд-во ЛГУ, 1973.
4. *Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И.* Задача Сен-Венана для естественно-скрученных стержней. Докл. АН СССР, 1939, т. 24, № 1.
5. *Бердичевский В. Л., Квашнина С. С.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
7. *Ляв А.* Математическая теория упругости, М.– Л., Гостехиздат, 1935.