

$$u_0 \rightarrow -\frac{1}{2} E_i \left[-\frac{1-\alpha(1-q)}{4\tau} \right] \quad u_\infty \rightarrow -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{1-\alpha}{4\tau} \right)$$

По известному распределению давления (2.3), (2.13) нетрудно найти напряжения и перемещения в массиве [1] (давление на стенке скважины определяется при $r=r_0$).

3. Из сравнения уравнения (1.6) с результатами [3] можно утверждать, что развиваемая здесь теория эквивалентна теории нелокально-упругого режима фильтрации, если функция влияния задана в виде

$$\Phi = \int_0^\infty \Phi^*(\xi, r) J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad \Phi^* = qa[a - h\xi + h\xi l^{-2h\xi} (1 - 2h\xi + 2h^2\xi^2)]^{-1} J_0(\xi r)$$

Кроме того, необходимо учитывать, что в [2-4] всюду считалось $\sigma^l = \sigma_{11} - p(r, t)$, т. е. полагалось $a=1$. Это условие оправдывалось интерпретацией [6] опытов по сжатию образцов насыщенной горной породы. Как нетрудно заметить, при $a=1$ предельные решения u_0 совпадают с предельными решениями [3], соответствующими $d \rightarrow 0$ и $d \rightarrow \infty$, где d — характерный масштаб зоны влияния в нелокально-упругой теории фильтрации.

Авторы признательны Е. Ф. Афанасьеву за полезное обсуждение.

Поступила 28 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Енгов В. М., Малахова Т. А. Об изменении напряженно-деформированного состояния горных пород при изменении давления в насыщенном жидкостью пласте. Изв. АН СССР, МГТ, 1974, № 6.
2. Николаевский В. Н. К изучению нелокальных эффектов при упругом режиме фильтрации в глубинных пластах. ПМФТ, 1968, № 4.
3. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. Нелокально-упругий режим фильтрации и восстановление давления в глубинных пластах. ПМФТ, 1969, № 5.
4. Афанасьев Е. Ф. К обоснованию теории нелокально-упругого режима фильтрации при помощи уравнений теории упругости. ПМФТ, 1971, № 4.
5. Englund F., Serensen T. The effect of upper stratum rigidity on pumping from elastic artesian aquifers. Techn. Univ. Denmark, Coastal Engng laboratory. Hydroelastic Lab. Basic. Res., Progr. Rept, 1969, No. 19, p. 17-20.
6. Николаевский В. Н., Васниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
7. Снеддон И., Берри Д. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
8. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

УДК 531/534:57

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ЗВУКОВ КОРОТКОВА ПРИ ДИАСТОЛЕ

С. А. АМБАРЦУМЯН, Л. А. МОВСИСЯН

(Ереван)

В медицине при диагнозе многих заболеваний и для выяснения работы сердечно-сосудистой системы широко пользуются сведениями об артериальном давлении крови. Среди бескровных методов определения кровяного давления в плечевой артерии наибольшее распространение получил звуковой метод Короткова. Анализ литературы по этому вопросу показывает, что механизм возникновения звуков Короткова далеко еще не распознан и не сформулирована окончательная механическая модель, достаточно корректно описывающая это явление [1-4].

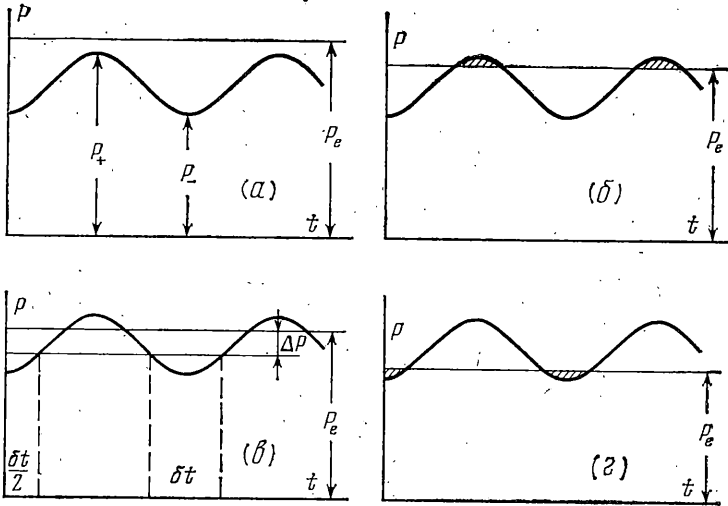
В рассматриваемой работе делается попытка объяснить этот процесс периодической потерей устойчивости плечевой артерии, сопровождающейся нелинейными колебаниями слышимой частоты.

Плечевая артерия представляется как изолированная, упругая, однородная, ортотропная бесконечно длинная цилиндрическая оболочка с постоянной толщиной h и с радиусом кривизны R . Считается, что артерия натянута продольной си-

лой Q , вследствие чего в оболочке имеется начальное тангенциальное усилие $T_0 = Q/2\pi R$. Считается также, что плечевая артерия с внутренней стороны обтекается идеальной несжимаемой жидкостью с постоянной осевой скоростью U . Далее предполагается, что в пределах ширины манжеты сфигмоманометра внутриартериальное давление описывается формулой

$$p_i = 1/2(p_+ + p_-) + 1/2(p_+ - p_-) \cos \omega t \quad (1)$$

где p_+ — максимальное (систолическое) давление, p_- — минимальное (диастолическое) давление, ω — частота сокращения сердца (пульс), t — время.



Фиг. 1

Накладывая манжету сфигмоманометра на плечевую артерию, в рассматриваемую систему (артерия, движущаяся кровь со скоростью U и внутренним давлением p_i) вносится некоторое возмущение в виде внешнего давления p_e (давление в манжете), которое систему из динамически устойчивого состояния приводит к состоянию динамической неустойчивости. Состояния динамической неустойчивости будут наблюдаться периодически в определенном диапазоне изменения давления p_e .

Давление в манжете, при котором впервые (в процессе уменьшения p_e) появляются звуки, интерпретируется как приближенное значение систолического давления, а давление в манжете, при котором звуки исчезают, — как диастолическое давление. Здесь может представлять интерес именно диастолическое давление, при котором, как показывают многочисленные экспериментальные исследования, плечевая артерия может быть рассмотрена как круговая цилиндрическая оболочка [1-5].

Обычная процедура аускультаторного метода определения давления крови заключается в том, что вначале давление в манжете доводится до величины выше того уровня, при котором пульс полностью заглушен в течение всего цикла работы сердца, затем его плавно снижают до появления характерных хлопающих звуков (звуков Короткова) и далее до их исчезновения.

Анализируя этот процесс, приходим к заключению, что звуки Короткова появляются с каждым ударом сердца вследствие периодической потери устойчивости оболочки плечевой артерии.

В начале описанного процесса внешнее давление настолько велико, что под действием разности давлений $p_e - p_i$ плечевая артерия зажата и пульс не слышен (фиг. 1, а). Эта ситуация продолжается, если даже p_e станет несколько меньше p_+ . Очевидно, в этом случае имеются некоторые промежуточные времена, в которых внутриартериальное давление будет больше внешнего давления p_e (фиг. 1, б). Однако это еще не значит, что под действием разности давлений p_e и p_i оболочка артерии примет свою первоначальную круглую форму. Для этого необходима такая разница давлений $(p_i - p_e)$, которая может преодолеть жесткость самой артерии (напомним, что здесь речь идет только об изолированной артерии).

Дальнейшее снижение давления в манжете создает новую ситуацию, при которой периодически появляются такие промежуточные времена, когда разность $(p_i - p_e)$ настолько велика, что артерия периодически восстанавливает свою первоначальную форму (фиг. 1, в).

Однако артерия долго не может сохранять первоначальной формы, ибо внутриартериальное давление после достижения систолического давления начинает падать и вблизи от уровня диастолического давления появляются промежутки времени, в которых разница между внешним p_e и внутренним p_i давлениями становится критической, и оболочка теряет устойчивость, вызывая характерный звук Короткова. После потери устойчивости внутриартериальное давление продолжает падать, доходя до уровня диастолического давления. Далее внутриартериальное давление начинает увеличиваться, становится больше p_e и опять начинается процесс восстановления начальной круговой формы артерии.

Дальнейшее снижение внешнего давления, начиная с некоторого уровня p_e , создает новую, третью ситуацию.

Пусть разность $(p_i - p_e)$ такова, что в течение всего цикла работы сердца отсутствуют интервалы времени, в которых внешнее давление по сравнению с внутренним давлением настолько велико, что оболочка артерии потеряла устойчивость (фиг. 1, ε). Ясно, что, начиная с этого момента и при последующем снижении давления p_e и тем более, когда p_e становится меньше p_i , звуки Короткова не могут появляться.

Таким образом, по предлагаемому здесь механизму возникновения звуков Короткова следует, что существует некоторый определенный интервал изменения p_e , в котором оболочка плечевой артерии вследствие действия динамически приложенной нагрузки периодически теряет устойчивость.

Очевидно, этот интервал начинается в окрестностях систолического давления и кончается в окрестностях диастолического давления.

Как было указано выше, в данной работе ограничимся рассмотрением лишь диастолической фазы, хотя предложенный механизм возникновения звуков Короткова охватывает весь цикл сердечной деятельности.

Нет сомнения, что описанный процесс может быть корректно представлен лишь при помощи нелинейных уравнений, учитывающих большие перемещения оболочки артерии. Однако, несмотря на это, рассматривая задачу в линейной постановке, можно получить некоторые корректные результаты, имеющие как самостоятельное значение для исследования процессов макроциркуляции крови, так и необходимые для обоснованного упрощения задачи в нелинейной постановке.

Не вдаваясь в широко известные подробности решения линейных задач динамики модельной оболочки [6, 7] с описанными выше особенностями (ортотропность, осевое натяжение, обтекание, периодическое давление и др.), приведем некоторые окончательные положения.

Явления флаттера [4] и параметрические колебания, при реальных значениях геометрических и физико-механических характеристик плечевой артерии и крови, не могут появляться при аускультаторном методе определения давления крови, тем самым по этим причинам не могут возникать звуки Короткова.

Значение критического давления p_e из условия статической устойчивости артерии незначительно изменяется при учете скорости обтекания и пульсации давления крови. Минимальные значения критического давления соответствуют формам оболочки, не зависящим от меридиональной координаты.

Учет ортотропности оболочки сосуда может внести определенные количественные коррективы в критическое значение давления по сравнению с расчетом для изотропного случая [4].

На основании этих выводов последующее исследование поведения рассматриваемой системы в нелинейной постановке будем проводить для плоской задачи.

Исходное нелинейное уравнение движения стенки артерии имеет вид [8]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \Delta p \frac{R^3}{D_{22}} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{R^4}{D_{22}} p_{h,R} - \frac{\rho h R^4}{D_{22}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

где $p_{h,R}$ определяется из уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0, \quad p_{h,R} = -\rho_h \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=R} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при} \quad r=R \quad (4)$$

$$\Delta p = p_i - p_e \quad (5)$$

Решения уравнений (2)–(4) будем искать в виде

$$w = f_1(t) \cos n\theta + f_2(t) \cos 2n\theta, \quad \varphi = \varphi_1(t) \cos n\theta + \varphi_2(t) \cos 2n\theta \quad (6)$$

Из (3) и (4) согласно (6) для дополнительного давления крови на стенках сосуда $p_{h,R}$ получим

$$p_{h,R} = -\rho_h \frac{R}{h} \frac{d^2 f_1}{dt^2} \cos n\theta \quad (7)$$

При этом было принято $\varphi_2=0$, так как здесь, согласно [9] инерционным членом от f_2 пренебрегается.

Подставляя (6) и (7) в (2) и произведя обычную процедуру методом Бубнова — Галеркина, получим

$$\frac{\rho h}{D_{22}} \frac{R^4}{n^4} \left(1 + \frac{R}{h} \frac{\rho h}{\rho} \frac{1}{n} \right) \frac{d^2 f_1}{dt^2} + \left[1 - \frac{1}{n^2} \left(1 - \Delta p \frac{R^3}{D_{22}} \right) \right] f_1 + \frac{f_1 f_2}{R} = 0$$

$$\left[16 - \frac{4}{n^2} \cdot \left(1 - \Delta p \frac{R^3}{D_{22}} \right) \right] f_2 - \frac{1}{R} f_1^2 = 0 \quad (8)$$

Как обычно, во втором уравнении (8) отброшен инерционный член.

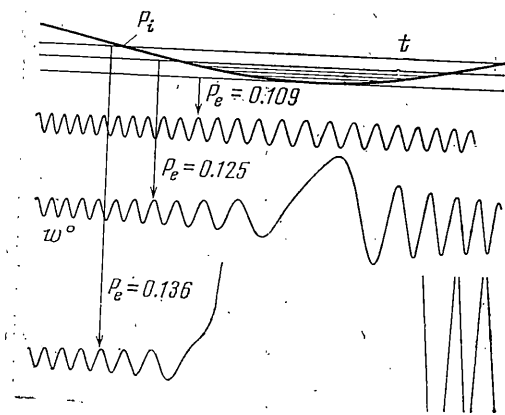
Система (8) при некоторых определенных значениях исходных величин интегрировалась численно методом Рунге — Кутты.

Пусть для оболочки артерии имеем: $R=1.5$ см, $h=0.3$ см, $E_2=7.0$ кг/см², $\nu_1=0.25$, $\nu_2=0.5$.

Пусть далее для материала артерии и для крови имеем соответственно: $\rho=1.1 \cdot 10^{-6}$ кг·сек²/см⁴, $\rho_k=1.06 \cdot 10^{-6}$ кг·сек²/см⁴. Примем также нормальные значения для систолического давления $p_+=0.163$ кг/см², для диастолического давления $p_-=0.109$ кг/см² и для круговой частоты $\omega=2\pi$ сек⁻¹ (частота пульса 1.0 гу).

Результаты подсчета безразмерного прогиба $w^\circ=w(0, t)/w(0, 1/4)$ при трех значениях p_e , а именно 0.109, 0.125 и 0.136 кг/см², приводятся на фиг. 2. Графики построены при $n=2$. При других значениях n ($n=3, 4, 5 \dots$) абсолютные величины амплитуды получаются во много раз меньше, чем при $n=2$, и не представляют расчетного интереса.

Рассматривая приведенные результаты, замечаем, что при внешнем давлении $p_e=p_-=0.109$ кг/см² наблюдается лишь некоторое увеличение значения w° при $t=3/4$ сек, т. е. при минимальном трансмуральном давлении, что объясняется процессом динамического падения внутреннего давления от $p_+-p_-=0.054$ кг/см² до нуля ($p_e-p_-=0$) в течение $1/4$ сек.



Фиг. 2

При $p_e=0.125$ кг/см², т. е. когда итоговое внешнее давление при диастоле равно $p_e-p_-=0.016$ кг/см², что равно статическому критическому давлению для рассматриваемой оболочки артерии, в интервале времени, заштрихованном на фиг. 2, наблюдается увеличение амплитуды в несколько раз.

Дальнейшее увеличение p_e , т. е. когда $p_e=0.136$ кг/см², приводит к качественно новому явлению. Оболочка вблизи диастолы под действием итогового внешнего давления теряет устойчивость хлопком: здесь наблюдается резкое увеличение амплитуды.

Очевидно, при этом значении p_e картина потери устойчивости оболочки артерии будет наблюдаться периодически при каждом цикле работы сердца.

Как показывают выполненные расчеты, частота собственных колебаний системы манжета — артерия — кровь изменяется в пределах 25—30 гу для рассматриваемого примера, что находится в интервале слышимых звуков. Эти звуки становятся периодически слышимыми каждый раз, когда отрицательное трансмуральное давление увеличивается и амплитуда колебания рассматриваемой системы существенно увеличивается.

Следует отметить также, что увеличение частоты пульса уменьшает амплитуду колебаний и увеличивает измеряемое давление.

Здесь можно ограничиться исследованием звуков Короткова лишь при диастолическом давлении. Звуки в окрестности систолического давления могут быть рассмотрены согласно предложенному здесь механизму, однако в этом случае следует отказаться от предположения, что плечевая артерия сохраняет форму кругового цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anliker M., Raman K. R. Korotkoff sounds at diastole-aphenomenon of dynamic instability of fluid-filled shells. Internat. J. Solids and Structures, 1966, vol. 2, No. 3. (Рус. перев.: Гидромеханика кровообращения. М., «Мир», 1971.)
2. Мультиановский М. П. Метод Короткова. История его открытия, клинического и экспериментального толкования и современная оценка. Cor et Vasa, 1970, № 1.
3. Регирер С. А. Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения. Гидродинамика кровообращения. М., «Мир», 1971.
4. Fung Yuan-Cheng B., Biomechanics, its Scope, history and some problems of continuum mechanics in physiology. Appl. Mech. Revs., 1968, vol. 21, No. 1. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1968, № 6.)
5. Прессман Л. П. Кровяное давление и сосудистый тонус в физиологии и патологии кровообращения. М., Медгиз, 1952.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1974.
7. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
8. Мушгари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Татарский книгоиздат, 1957.
9. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

(Ленинград)

В. В. ЕЛИСЕЕВ

Рассматривается задача теории упругости о равновесии криволинейного стержня, нагруженного по боковой поверхности и торцам. Стержень считается весьма тонким, а изменение нагрузки вдоль оси стержня — достаточно медленным. Вводится соответствующий малый параметр ϵ , и решение ищется в виде асимптотического разложения по степеням ϵ . Результат удовлетворяет уравнениям теории упругости в объеме и граничным условиям на боковой поверхности; условия на торцах удовлетворены в интегральном смысле. Для главных членов асимптотических разложений выделена полная система уравнений, которая подтверждает классическую теорию Кирхгофа — Клебша для нерастяжимых стержней.

Асимптотический метод в задаче о равновесии цилиндра использовался в [1, 2]. В [3] рассмотрена задача, о плоском изгибе криволинейного стержня, ось которого лежит в плоскости изгиба. Задача Сен-Венана для естественно закрученного стержня изучалась в [4].

Здесь рассматривается тонкий стержень произвольной геометрии. В отличие от указанных выше работ используются уравнения теории упругости в напряжениях. Перемещения определяются интегрированием соотношений закона Гука после того, как найдены напряжения. На этом этапе получены кинематические формулы и соотношения упругости теории стержней.

Последующие члены асимптотических разложений не рассмотрены, хотя и указана рекуррентная процедура для их определения. Учет последующих членов необходим при построении уточненной теории стержней (но не достаточен). По-видимому, корректное построение уточненной теории невозможно без привлечения вариационного подхода и представления о кривых сложной структуры. Некоторые черты такого синтетического подхода реализованы в [5].

1. Рассмотрим стержень, образованный движением плоской фигуры (сечения стержня) вдоль пространственной кривой — оси стержня; центр тяжести сечения находится на оси, и плоскость сечения остается нормальной к оси. Введем дуговую координату s на оси и декартовы координаты x_1, x_2 в сечении с началом в центре тяжести, а также орт касательной t и орты e_α осей x_α . Пусть тройка векторов e_1, e_2, t — правая и оси x_α — главные оси инерции сечения. При движении вдоль оси стержня

$$t' = \omega \times t, \quad e_\alpha' = \omega \times e_\alpha \quad [(\dots)' = d/ds]$$

Представим вектор ω в виде $\omega = \omega_1 t + \omega_\alpha e_\alpha$.