9. *Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.* Теория пластичности неоднородных тел. М., «Мир», 1964.
10. *Друянов Б. А.* Численное решение задачи о вдавливании гладкого штампа в пластически неоднородную среду. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 3.
11. *Григорьев О. Д.* О применении метода характеристик в задаче о штампе и о точности определения пластической неоднородности. В сб.: Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., вып. 79, 1972.
12. *Григорьев О. Д.* О влиянии малой неоднородности на форму линий скольжения, диссипацию и метод оценки нагрузки на штамп. В сб.: Пластичность и механические константы металлов. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., вып. 91, 1973.
13. *Григорьев О. Д., Беленко А. Е., Киселев Ю. А.* Экспериментальное исследование вдавливания штампов в пластически неоднородную среду. В сб.: Некоторые вопросы пластичности. Тр. Новосиб. ин-та водн. трансп., вып. 106, 1975.
14. *Kowalczyk W.* The indentation problem of a semi-infinite transversally non-homogeneous body acted on by a rigid punch. Bull. Acad. polon. sci. Ser. Technol., 1965, vol. 13, No. 4.
15. *Григорьев О. Д., Беленко А. Е.* О приложении приближенных интегралов вдоль линий скольжения для неоднородной среды к задаче о штампе. В сб.: Пластичность и механические константы металлов. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., вып. 91, 1973.

УДК 622.011.4

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНОГО МАССИВА ПРИ НЕЛОКАЛЬНО-УПРУГОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ

В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ, Т. К. РАМАЗАНОВ

(Москва, Баку)

В [1] исследовано изменение напряженно-деформированного состояния горных пород при изменении давления в насыщенном жидкостью тонком пласте. Однако при этом поровое давление задавалось независимо от действия горного давления.

С другой стороны в теории нелокально-упругого режима фильтрации однородной жидкости в глубинном плоском пласте [2–4] распределение давления связывается с горным давлением следующей зависимостью:

$$\sigma^f(x_i, t) + \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_i, \xi_i) p(x_i, t)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \Gamma(x_i)$$

Здесь p — поровое давление, σ^f — эффективное давление в скелете пористой среды, Γ — горное давление. При этом функция влияния Φ задавалась либо в виде гауссовой функции [2, 3], либо, исходя из моделирования покрывающих пласт пород, в виде упругой плиты [4–6], находящейся под нагрузкой (горным давлением).

Ниже показано, что объединение анализа напряженно-деформируемого состояния массива и эффекта взаимодействия порового и горного давления позволяет найти вид функции влияния Φ, необходимый для замыкания теории нелокально-упругого режима фильтрации. Рассмотрена задача о восстановлении давления в пласте.

1. Предположим, что пороупругий насыщенный пласт намного тоньше упругого массива окружающих пород. Распределение порового давления в пласте будем считать нестационарным и осесимметричным. Зададимся началом координат на дневной поверхности и направим отрицательную ось z вниз. Обозначим толщину пласта через δ и предположим, что пласт лежит на полупространстве, а от дневной поверхности его отделяет слой мощности h.

В слое $-h \leqslant z \leqslant 0$ и полупространстве $z \leqslant -(h+\delta) \approx -h$ уравнения упругого равновесия в перемещениях [7] имеют вид (λ, μ – постоянные Ламе)

$$(\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \qquad (1.1)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} в массиве тоже удовлетворяют уравнениям теории упругости [7]. Граничные условия, как и в [1], примем в форме

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=0 \text{ при } z=0 \tag{1.2}$$
$$[\sigma_{11}]=[\sigma_{12}]=0, \quad C[\mathbf{u}]=\mathbf{k}[(\sigma_{11}-q\Delta p(r,t))] \text{ при } z=-h$$

Заметим, что σ_{ij} в пороупругом пласте являются полными напряжениями и должны быть отождествлены с горным напряжением. Здесь $[a]=a(-h+0)-a(-h-0)$, $\mathbf{k}$ — орт оси z, C — жесткость поперечных деформаций пласта, $\Delta p(r, t)$ — возмущение давления в насыщенном пласте, определяемое в отличие от [1] в ходе решения. Для его нахождения воспользуемся линейным уравнением нестационарного фильтрационного течения, приведенным в [2]:

$$(a_\rho+a)\frac{\partial p}{\partial t}-b\frac{\partial \sigma^f}{\partial t}=\frac{k_0}{m_0\mu_0}\nabla^2 p+\frac{G}{m_0\rho_0}, \qquad \sigma^f=\sigma_{11}-qp(r,t) \tag{1.3}$$

где a — сжимаемость материала матрицы пласта, a_ρ — сжимаемость поровой жидкости, b — сжимаемость самой матрицы, k — проницаемость пласта, m_0 — пористость, μ_0 — вязкость жидкости, ρ — плотность жидкости, G — интенсивности стоков (источников), т. е. удельные дебиты скважины.

Распределение напряжения σ_{11} на контакте с насыщенным пластом согласно [1] определяется выражением

$$\sigma_{11}=-q\int_0^\infty \frac{h\xi^2[e^{2h\xi}-(1+2h\xi+2h^2\xi^2)]p(\xi,t)J_0(\xi,r)}{e^{2h\xi}(a-h\xi)+h\xi(1+2h\xi+2h^2\xi^2)}d\xi \tag{1.4}$$

$$p(\xi,t)=\int_0^\infty r\Delta p(r,t)J_0(\xi r)\,dr, \qquad a=\frac{ch}{q\mu}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$$

Для анализа распределения давления в пласте преобразуем выражение (1.4) к следующему виду:

$$\sigma_{11}=\int_0^\infty \psi(\xi)p(\xi,t)\xi J_0(\xi r)\,d\xi, \qquad \psi=\frac{-qh\xi[1-e^{-2h\xi}(1+2h\xi+2h^2\xi^2)]}{a-h\xi+h\xi e^{-2h\xi}(1+2h\xi+2h^2\xi^2)} \tag{1.5}$$

Подставляя выражение (1.5) в уравнение (1.3), получим

$$[1+\alpha(q-1)]\frac{\partial p}{\partial t}-\alpha\int_0^\infty \psi(\xi)\xi J_0(\xi r)\frac{\partial p(\xi,t)}{\partial t}d\xi=$$
$$=\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{G}{m_0\rho_0}, \qquad \varkappa=\frac{k_0}{\mu_0\beta m_0}, \qquad \alpha=\frac{b}{\beta}, \qquad \beta=a_\rho+a+b \tag{1.6}$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности, β — максимальная сжимаемость пласта.

2. Рассмотрим задачу о восстановлении давления в пласте после мгновенного закрытия скважины, работавшей с дебитом $Q=\text{const}$. Пусть $p_0(r)$ — начальное стационарное распределение давления. Начальные и граничные условия имеют вид

$$p=p_0(r) \text{ при } t=0, \quad r\to\infty; \quad \partial p/\partial r=0 \text{ при } r=0, \quad t>0 \tag{2.1}$$

При этом начальное распределение давления $p_0(r)$ удовлетворяет условию

$$(2\pi kh/\mu)(r\partial p_0/\partial r)=Q \text{ при } r=0, \quad t<0 \tag{2.2}$$

Положим

$$p=p_0(r)+Q\mu u(r,t)\,/\,2\pi kh \tag{2.3}$$

Подставим соотношение (2.3) в уравнение (1.6). Полагая в нем $G=0$ и принимая во внимание граничные условия (2.1), (2.2), приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$[1+\alpha(q-1)]\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\int_0^\infty \Psi(\xi)\xi J_0(\xi r)\frac{\partial u}{\partial t}d\xi=\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{2.4}$$

которое необходимо решать при следующих условиях:

$$u=0 \quad \text{при} \quad t=0, \quad r=\infty; \quad r\partial u/\partial r=-1 \quad \text{при} \quad r=0, \quad t>0 \tag{2.5}$$

Применяя преобразование Ханкеля [8] к уравнению (2.4), получим

$$[1+\alpha(q-1)]\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\Psi(\xi)\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}+\varkappa\xi^2 u=\varkappa, \qquad u(\xi,t)=\int_0^\infty u(r,t)J_0(\xi,r)dr \tag{2.6}$$

Так как $a<0$, то из предыдущего уравнения следует

$$\partial u/\partial t+\varphi(\xi)u=\varphi(\xi)/\xi^2 \tag{2.7}$$

$$\varphi(\xi)=\frac{\varkappa\xi^2}{1-\alpha(1-q|a|\{|a|+h\xi[1-e^{-2h\xi}(1+2h\xi+2h^2\xi^2)]\}^{-1})}$$

Таким образом, интегро-дифференциальное уравнение (2.4) отличается от результирующего уравнения в [3] видом ядра. Однако для построения решения далее можно воспользоваться методом, развитым в [3].

Решением линейного уравнения (2.7) будет функция

$$u(\xi,t)=(1-\exp[-\varphi(\xi)t])\xi^{-2} \tag{2.8}$$

Применяя к (2.8) формулу обращения, получим

$$u(r,t)=\int_0^\infty (1-\exp[-\varphi(\xi)t])\xi^{-1}J_0(\xi r)d\xi \tag{2.9}$$

Исследуем изменение давления при фиксированном значении r

$$u(r,t)=\int_0^\infty (1-\exp[-\Psi(x,\tau,h_1,\alpha)])x^{-1}J_0(x)dx$$

$$\tau=\varkappa t r^{-2}, \qquad x=r\xi, \qquad h_1=hr^{-1}, \qquad \Psi=\frac{\tau x^2}{1-\varepsilon} \tag{2.10}$$

$$\varepsilon=\alpha(1-q|a|\{|a|+h_1x[1-e^{-2h_1x}(1+2h_1x+2h_1^2x^2)]\}^{-1}), \qquad \varepsilon<1$$

Отметим, что согласно [9]:

$$\psi=\tau x^2\sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n, \qquad e^{-\psi}=e^{-\tau x^2}-e^{-\tau x^2}\sum_{n=1}^\infty \varepsilon^n\sum_m\frac{(-1)^m(\tau x^2)^m}{i!\,j!\ldots k!} \tag{2.11}$$

где суммирование по m распространяется на все решения в целых положительных числах уравнений: $i+2j+\ldots+lk=n$, $i+j+\ldots+k=m$. Кроме того, имеет место разложение

$$\varepsilon^n=\alpha^n(1-y)^n=\alpha^n\sum_{\nu=0}^n\frac{(-1)^n n!}{\nu!(n-\nu)!}y^\nu \tag{2.12}$$

$$y=q|a|\{|a|+h_1x[1-e^{-2h_1x}(1+2h_1x+2h_1^2x^2)]\}^{-1}$$

Подставляя формулу (2.11) с учетом (2.12) в интеграл (2.10), будем иметь

$$u(r,t)=-\frac{1}{2}E_i\left(-\frac{1}{4\tau}\right)-$$

$$-\int_0^\infty\left[e^{-\tau x^2}\sum_{n=1}^\infty\alpha^n\sum_{\nu=0}^n\frac{(-1)^\nu n!}{\nu!(n-\nu)!}y^\nu\sum_m\frac{(-1)^m(\tau x^2)^m}{i!\,j!\ldots k!}\right]J_0(x)x^{-1}dx \tag{2.13}$$

Из выражения (2.13) следуют решения для предельных частных случаев $h\to0$ и $h\to\infty$ (их можно интерпретировать как асимптотические решения)

$$u_0 \to -\frac{1}{2} E_i \left[-\frac{1-\alpha(1-q)}{4\tau} \right] \qquad u_\infty \to -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{1-\alpha}{4\tau} \right)$$

По известному распределению давления (2.3), (2.13) нетрудно найти напряжения и перемещения в массиве [1] (давление на стенке скважины определяется при $r=r_0$).

3. Из сравнения уравнения (1.6) с результатами [3] можно утверждать, что развиваемая здесь теория эквивалентна теории нелокально-упругого режима фильтрации, если функция влияния задана в виде

$$\Phi = \int\limits_0^\infty \Phi^*(\xi, r) J_0(\xi\rho)\,\xi\, d\xi, \qquad \Phi^* = qa[a-h\xi+h\xi l^{-2h\xi}(1-2h\xi+2h^2\xi^2)]^{-1} J_0(\xi r)$$

Кроме того, необходимо учитывать, что в [2–4] всюду считалось $\sigma^f=\sigma_{11}-p(r,t)$, т. е. полагалось $a=1$. Это условие оправдывалось интерпретацией [6] опытов по сжатию образцов насыщенной горной породы. Как нетрудно заметить, при $a=1$ предельные решения u_0 совпадают с предельными решениями [3], соответствующими $d\to 0$ и $d\to\infty$, где d – характерный масштаб зоны влияния в нелокально-упругой теории фильтрации.

Авторы признательны Е. Ф. Афанасьеву за полезное обсуждение.

Поступила 28 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В. М., Малахова Т. А.* Об изменении напряженно-деформированного состояния горных пород при изменении давления в насыщенном жидкостью пласте. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6.
2. *Николаевский В. Н.* К изучению нелокальных эффектов при упругом режиме фильтрации в глубинных пластах. ПМФТ, 1968, № 4.
3. *Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н.* Нелокально-упругий режим фильтрации и восстановление давления в глубинных пластах. ПМТФ, 1969, № 5.
4. *Афанасьев Е. Ф.* К обоснованию теории нелокально-упругого режима фильтрации при помощи уравнений теории упругости. ПМТФ, 1971, № 4.
5. *Engelund F., Serensen T.* The effect of upper stratum rigidity on pumping from elastic artesian aquifers. Techn. Univ. Denmark., Coastal Engng laboratory. Hydraulic Lab. Basic. Res., Progr. Pept, 1969, No. 19, p. 17–20.
6. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
7. *Снеддон И., Берри Д.* Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
8. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

УДК 531/534 : 57

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ЗВУКОВ КОРОТКОВА ПРИ ДИАСТОЛЕ

С. А. АМБАРЦУМЯН, Л. А. МОВСИСЯН

(Ереван)

В медицине при диагнозе многих заболеваний и для выяснения работы сердечно-сосудистой системы широко пользуются сведениями об артериальном давлении крови. Среди бескровных методов определения кровяного давления в плечевой артерии наибольшее распространение получил звуковой метод Короткова. Анализ литературы по этому вопросу показывает, что механизм возникновения звуков Короткова далеко еще не распознан и не сформулирована окончательная механическая модель, достаточно корректно описывающая это явление [1–4].

В рассматриваемой работе делается попытка объяснить этот процесс периодической потерей устойчивости плечевой артерии, сопровождающейся нелинейными колебаниями слышимой частоты.

Плечевая артерия представляется как изолированная, упругая, однородная, ортотропная бесконечно длинная цилиндрическая оболочка с постоянной толщиной h и с радиусом кривизны R. Считается, что артерия натянута продольной си-