

3. Журавлев А. З., Ураждина Л. С., Уражди В. И. Применение операционного метода к решению начальной характеристической задачи плоской теории пластичности. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
6. Закуренов Е. А., Ренне И. П. Волочение полосы через клиновые матрицы с малыми редуциями (определение удельных усилий). В сб.: Технология машиностроения, вып. 15. Тула, Изд-во Тульск. политехн. ин-та, 1971.

УДК 539.374

### О СОГЛАСОВАННОСТИ И КОРРЕКТНОСТИ КОНТАКТНЫХ СКОРОСТЕЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА В ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЛО

О. Д. ГРИГОРЬЕВ

(Новосибирск)

Рассматривается влияние положительности диссипативной функции на краевое условие для скоростей на поверхности контакта среды и гладкого штампа, вдавливаемого в идеальное жесткопластическое тело (плоская деформация).

Показано, что условие положительности рассеивания приводит к дополнительным ограничениям для контактных скоростей. Установлен критерий положительности диссипативной функции по профилю горизонтальной составляющей скорости частицы среды на поверхности контакта. Это позволило установить несогласованность полей скоростей и напряжений в задачах: о клине с вогнутыми боковыми сторонами; о давлении вогнутого и плоского штампов на криволинейную заготовку; о давлении плоского штампа на полуплоскость, когда предел текучести убывает в горизонтальном направлении. Указан класс некорректных задач. Даны оценки снизу контактных скоростей.

1. Краевое условие для скоростей на контуре штампа, вдавливаемого с вертикальной скоростью  $v_0$ , имеет вид  $v_n = v_0 \cos \varphi$ , где  $v_n$  — нормальная к контуру составляющая скорости частицы среды;  $\varphi$  — угол между осью  $Ox$  и касательной к контуру штампа.

С другой стороны, при пластической деформации поля скоростей и напряжений должны быть согласованы между собой условием положительности диссипативной функции [1-7]:

$$D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} > 0 \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и скорости деформации. Заметим, что условие (1.1) проверяется в настоящее время после построения полей напряжений и скоростей.

Примем для определенности, что криволинейный контур гладкого штампа является для среды траекторией главного нормального напряжения  $\sigma_{11}$ , большего, чем контактное напряжение  $\sigma_{22}$  (противоположный случай отношения главных напряжений исследуется аналогичным образом).

Введем криволинейные ортогональные координаты  $q_1$  и  $q_2$ , являющиеся соответственно траекториями главных нормальных напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ . Направления координат  $q_1$ ,  $q_2$  примем так, чтобы они образовывали правую систему, при этом на контуре штампа координата  $q_2$  направлена внутрь штампа (фиг. 1).

Условие (1.1) при плоской деформации в координатах  $q_1$ ,  $q_2$  примет вид

$$D = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} > 0 \quad (1.2)$$

Так как для несжимаемого материала  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$ , то

$$D = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \varepsilon_{11} > 0 \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon_{ii}$  — главные скорости деформации. При этом

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = \frac{\partial v_1}{\partial s_1} - \frac{v_2}{R_1}$$

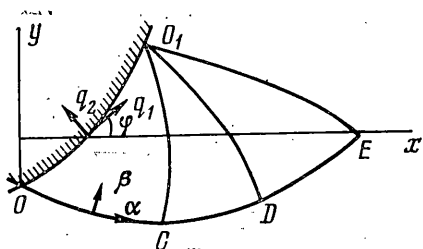
Здесь  $v_1, v_2$  — компоненты скорости вдоль координат  $q_1, q_2$ ;  $H_1, H_2$  — параметры Ламе для указанных координат;  $s_1$  и  $R_1$  — длина дуги и радиус кривизны линии  $q_1$ . На контуре штампа имеем  $R_1=R, s_1=s$ , где  $s$  и  $R$  — длина дуги контура и радиус; причем  $R>0$ , если центр кривизны контура штампа лежит в направлении возрастания  $q_2$ .

Пусть контур штампа является для среды траекторией большего главного напряжения  $\sigma_{11}$ . Тогда на контактной поверхности штампа для точек среды должно быть

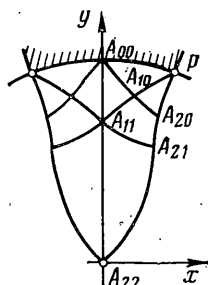
$$\partial v_1 / \partial s - v_2 / R > 0 \tag{1.4}$$

На контуре штампа в силу принятого направления координаты  $q_2$  будем иметь  $v_2 = -v_0 \cos \varphi$ . Поэтому из (1.4) получим

$$\partial v_1 / \partial s > -(v_0 / R) \cos \varphi \tag{1.5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для плоского гладкого штампа, вдавливаемого с вертикальной скоростью  $v_0$ ,  $\varphi=0, R=\infty, v_2=v=-v_0$  и согласно (1.5) на контуре должно выполняться условие

$$\partial u / \partial s = \partial u / \partial x > 0 \tag{1.6}$$

где  $u, v$  — составляющие скорости вдоль  $Ox, Oy$ .

Выразим через  $u$  неравенство (1.5) для криволинейного штампа. Так как

$$u = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad v = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi$$

то на контуре гладкого штампа будем иметь

$$v_1 = u / \cos \varphi - v_0 \sin \varphi \quad (0 \leq |\varphi| < \pi/2) \tag{1.7}$$

Причем вертикальная составляющая скорости  $v = u \operatorname{tg} \varphi - v_0$ . Из (1.5), (1.7) получим ограничение, накладываемое на контактные скорости условием положительности рассеивания (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial s} \cos \varphi + \frac{u \sin \varphi}{R} > 0, \quad \frac{1}{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \tag{1.8}$$

*Пример 1.* Рассмотрим задачу о вдавливании симметричного выпуклого (вогнутого) штампа в полуплоскость [3]. Будем рассматривать только правую половину штампа и полуплоскости, когда  $x \geq 0$ . Компоненты скорости на контуре штампа равны [3]

$$u = \sqrt{2} v_0 \cos \varphi \cos (\varphi - \pi/4), \quad v = \sqrt{2} v_0 \cos \varphi \sin (\varphi - \pi/4) \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получим неравенство

$$R^{-1} \sin (\varphi - \pi/4) < 0, \quad R > 0, \quad \varphi > 0 \quad (0 \leq \varphi < \pi/4) \tag{1.10}$$

которое выполняется для выпуклого штампа (этот результат совпадает с [6]).

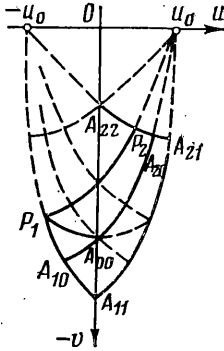
Для вогнутого штампа ( $R < 0, \varphi \geq 0$ ) неравенство (1.10) выполняется при  $\varphi > \pi/4$ . Таким образом задача о вогнутом штампе некорректна, когда  $0 \leq \varphi < \pi/4$ .

*Пример 2.* Рассмотрим задачу о давлении симметричного гладкого вогнутого штампа на заготовку с круговым контуром, лежащую на гладком основании. Поля линий скольжения, их отображение на плоскость годографа показаны на фиг. 2, 3, взятых из [3].

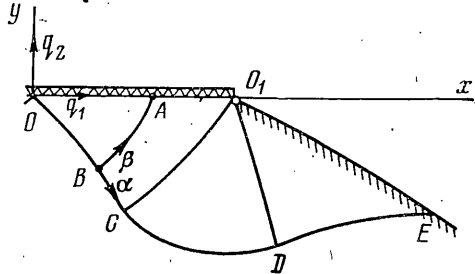
Кривой контура штампа  $A_{00}P$  соответствует на плоскости годографа кривая  $A_{00}P_1$ . Из рассмотрения последней следует, что при движении вдоль контура от точки  $A_{00}$  к точке  $P$  горизонтальная составляющая скорости  $u$  уменьшается и является отрицательной. В этом случае отмеченные поля напряжений и скоростей не согласуются ввиду невыполнения условия (1.1).

2. Установим класс некорректных задач о вдавлении плоского гладкого штампа, когда имеет место двухстороннее (необязательно симметричное) выпирание по схеме Хилла или одностороннее. Рассмотрим при указанной схеме линий скольжения лежащую под штампом замкнутую область  $E$ , треугольник  $OCO_1$  на фиг. 4.

При решении краевых задач область  $E$  является областью смешанной задачи. Направление координат  $\alpha, \beta$ -линий скольжения показано на фиг. 4. Поместим начало координат  $q_1, q_2$  в точке  $O$  (фиг. 4).



Фиг. 3



Фиг. 4

Пусть  $\theta$  — угол, который составляет касательная к  $\alpha$ -линии скольжения с осью  $Ox$ ;  $v_\alpha, v_\beta$  — составляющие скорости вдоль линий скольжения;  $U(O)$  — некоторая окрестность точки  $O$ .

*Теорема.* Если для всех точек

$$M \in U \cap E, \quad \partial\theta/\partial\beta > 0 \tag{2.1}$$

то решение уравнений для скоростей при плоской деформации [1, 7]:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0 \tag{2.2}$$

не согласуется с напряжениями ввиду невыполнения условия положительности рассеивания (1.1).

*Доказательство.* Для решения уравнений (2.2) имеем условия [1-3]: вдоль границы с жесткой областью (линия  $OCDE$  на фиг. 4)  $v_\beta=0, v_\alpha=\sqrt{2}v_0$  при  $\beta=0$ ; на контуре плоского гладкого штампа  $v_\alpha-v_\beta=\sqrt{2}v_0$ .

Указанное решение будет непрерывным в замкнутой области  $E$  смешанной задачи, т. е. в треугольнике  $OCO_1$  (фиг. 4). При этом согласно граничным условиям в точке  $O$  будем иметь

$$v_\alpha = \sqrt{2}v_0 > 0, \quad v_\beta = 0 \tag{2.3}$$

Поэтому существует окрестность  $U_1(O)$  точки  $O$ , для всех точек  $M$  которой [8]:

$$\forall M \in U_1 \cap E, \quad v_\alpha > 0 \tag{2.4}$$

Пусть  $U_2 = U_1 \cap E$ . Тогда согласно (2.1), (2.4)

$$\forall M \in U_2 \cap E, \quad v_\alpha > 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} > 0 \tag{2.5}$$

Возьмем на множестве  $U_2 \cap E$  линию  $BA$  ( $\alpha = \text{const}$ ). При этом точка  $B$  лежит на границе с жесткой областью, т. е. на  $\alpha$ -линии ( $\beta=0$ ), точка  $A$  — на контуре штампа (фиг. 4). Интегрируя второе уравнение в (2.2) вдоль  $BA$  и учитывая (2.3), для точки  $A$  получим

$$v_{\beta}(A) = - \int_{\beta=0}^{\beta(A)} v_{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} d\beta$$

Так как имеет место (2.5), то, применяя теорему о среднем, получим

$$v_{\beta}(A) = -v_{\alpha}(\xi) [\theta(A) - \theta(B)] < 0, \quad \xi \in BA \quad (2.6)$$

Из (2.3), (2.6) следует

$$v_{\beta}(O) = 0 > v_{\beta}(A) \quad (2.7)$$

где  $v_{\beta}(O)$  — значение  $v_{\beta}$  в точке  $O$ .

С другой стороны, на контуре плоского гладкого штампа

$$u = (v_{\alpha} + v_{\beta}) \cos \pi/4 \quad (2.8)$$

или с учетом граничного условия  $u = \sqrt{2}v_{\beta} + v_0$ . Поэтому согласно (1.6), на контуре должно быть

$$\partial u / \partial x = \sqrt{2} \partial v_{\beta} / \partial x > 0$$

что противоречит (2.7). Таким образом диссипативная функция будет отрицательной. Укажем задачи о плоском гладком штампе, в решении которых поля скоростей не согласуются с напряжениями, так как имеет место условие (2.1).

Задача о вдавливании штампа, когда предел текучести убывает с глубиной [9, 10]. Заметим, что некорректность этой задачи впервые была отмечена в [6]; анализ этого вопроса проводился в [11], а также в [12, 13].

Задача о штампе, когда предел текучести убывает в горизонтальном направлении [14, 15].

Задача о вдавливании штампа в срез выпуклой заготовки [3].

3. Выразим неравенство (1.5) через составляющие скорости вдоль линий скольжения  $v_{\alpha}$ ,  $v_{\beta}$ . Так как штамп гладкий, то на контуре штампа  $v_{\alpha} - v_{\beta} = \sqrt{2} \cos \varphi$ . При этом будем иметь

$$v_1 = (v_{\alpha} + v_{\beta}) \cos \pi/4, \quad v_2 = -v_0 \cos \varphi = (v_{\beta} - v_{\alpha}) \cos \pi/4$$

или

$$v_1 = \sqrt{2}v_{\alpha} - v_0 \cos \varphi, \quad v_1 = \sqrt{2}v_{\beta} + v_0 \cos \varphi$$

Тогда из неравенства (1.5) получим ограничения для контактных скоростей

$$\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial s} > -\frac{v_0}{\sqrt{2}R} (\cos \varphi + \sin \varphi), \quad \frac{\partial v_{\beta}}{\partial s} > \frac{v_0}{\sqrt{2}R} (\sin \varphi - \cos \varphi) \quad (3.1)$$

Так как  $1/R = \partial \varphi / \partial s$ , то неравенства (3.1) можно проинтегрировать по  $s$  — дуге контура. В результате получим

$$v_{\alpha} > v_{\alpha}^{\circ} - \frac{v_0}{\sqrt{2}} (\sin \varphi - \cos \varphi - \sin \varphi^{\circ} + \cos \varphi^{\circ}), \quad v_{\beta} > v_{\beta}^{\circ} - \frac{v_0}{\sqrt{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi - \sin \varphi^{\circ} - \cos \varphi^{\circ})$$

где  $v_{\alpha}^{\circ}$ ,  $v_{\beta}^{\circ}$ ,  $\varphi^{\circ}$  — соответствующие значения на контуре при  $s=0$ , т. е. в начале координат  $q_1, q_2$ .

Поступила 19 II 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
4. Григорьев О. Д. Об условии положительности мощности рассеивания при плоском течении жесткопластического тела. ПМТФ, 1962, № 1.
5. Rychlewski J. Comment on «The plane-flow extrusion or drawing», by L. I. Kronojd and P. V. Mellor. Internat. J. Mech. Sci., 1968, vol. 10, No. 8.
6. Друзьянов Б. А. Оценки предельного давления в некоторых задачах о вдавливании пуансонов. Машиноведение, 1972, № 1.
7. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., «Машиностроение», 1975.
8. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ, т. 1. М., «Высшая школа», 1973.

9. Ольшев В., Рыжлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М., «Мир», 1964.
10. Друянов Б. А. Численное решение задачи о вдавливании гладкого штампа в пластически неоднородную среду. Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение, 1961, № 3.
11. Григорьев О. Д. О применении метода характеристик в задаче о штампе и о точности определения пластической неоднородности. В сб.: Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., вып. 79, 1972.
12. Григорьев О. Д. О влиянии малой неоднородности на форму линий скольжения, диссипацию и метод оценки нагрузки на штамп. В сб.: Пластичность и механические константы металлов. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., вып. 91, 1973.
13. Григорьев О. Д., Беленко А. Е., Киселев Ю. А. Экспериментальное исследование вдавливания штампов в пластически неоднородную среду. В сб.: Некоторые вопросы пластичности. Тр. Новосиб. ин-та водн. трансп., вып. 106, 1975.
14. Kowalszyk W. The indentation problem of a semi-infinite transversally non-homogeneous body acted on by a rigid punch. Bull. Acad. polon. sci. Ser. Technol., 1965, vol. 13, No. 4.
15. Григорьев О. Д., Беленко А. Е. О приложении приближенных интегралов вдоль линий скольжения для неоднородной среды к задаче о штампе. В сб.: Пластичность и механические константы металлов. Тр. Новосиб. ин-та инж. водн. трансп., вып. 91, 1973.

УДК 622.011.4

### НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНОГО МАССИВА ПРИ НЕЛОКАЛЬНО-УПРУГОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ

В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ, Т. К. РАМАЗАНОВ

(Москва, Баку)

В [1] исследовано изменение напряженно-деформированного состояния горных пород при изменении давления в насыщенном жидкостью тонком пласте. Однако при этом поровое давление задавалось независимо от действия горного давления.

С другой стороны в теории нелокально-упругого режима фильтрации однородной жидкости в глубинном плоском пласте [2-4] распределение давления связывается с горным давлением следующей зависимостью:

$$\sigma^f(x_i, t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_i, \xi_i) p(x_i, t) d\xi_1 d\xi_2 = \Gamma(x_i)$$

Здесь  $p$  — поровое давление,  $\sigma^f$  — эффективное давление в скелете пористой среды,  $\Gamma$  — горное давление. При этом функция влияния  $\Phi$  задавалась либо в виде гауссовой функции [2, 3], либо, исходя из моделирования покрывающих пласт пород, в виде упругой плиты [4-6], находящейся под нагрузкой (горным давлением).

Ниже показано, что объединение анализа напряженно-деформируемого состояния массива и эффекта взаимодействия порового и горного давления позволяет найти вид функции влияния  $\Phi$ , необходимый для замыкания теории нелокально-упругого режима фильтрации. Рассмотрена задача о восстановлении давления в пласте.

1. Предположим, что пороупругий насыщенный пласт намного тоньше упругого массива окружающих пород. Распределение порового давления в пласте будем считать нестационарным и осесимметричным. Зададимся началом координат на дневной поверхности и направим отрицательную ось  $z$  вниз. Обозначим толщину пласта через  $\delta$  и предположим, что пласт лежит на полупространстве, а от дневной поверхности его отделяет слой мощности  $h$ .

В слое  $-h \leq z \leq 0$  и полупространстве  $z \leq -(h+\delta) \approx -h$  уравнения упругого равновесия в перемещениях [7] имеют вид  $(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \nabla^2 u = 0$

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \nabla^2 u = 0 \quad (1.1)$$