

Обратим внимание на следующий существенный момент: если элемент τ_2 неподвижен, то деформация $\varepsilon_3 = \text{const}$, если неподвижен элемент τ_1 , то $\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \text{const}$, если неподвижен элемент τ_3 , то $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 = \text{const}$.

Поэтому целесообразно ввести следующие новые переменные:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= -e^2, & \varepsilon_3 + \varepsilon_4 &= e_1, & \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= e_3 \\ \text{Тогда} & & \varepsilon_2 &= e_2 + e_3, & \varepsilon_4 &= e_1 + e_2 \end{aligned} \quad (7)$$

а соотношения (4)–(6) примут вид

$$\begin{aligned} G_4 e_1 + G_4 e_2 + o e_3 &= \sigma \pm \tau_1 \\ G_4 e_1 + (G_2 + G_3 + G_4) e_2 + G_2 e_3 &= \sigma \pm \tau_2 \\ o e_1 + G_2 e_2 + G_2 e_3 &= \sigma \pm \tau_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Такая интерпретация модели удобна тем, что анализ поведения модели становится очень простым. Если какой-либо элемент τ_k находится в состоянии течения, то в соответствующем уравнении (8) $\tau_k = \text{const}$. Если же элемент τ_k неподвижен, то соответствующая деформация $e_k = \text{const}$, а уравнение определяет значение усилия τ . Кроме того, такая запись четко показывает влияние величины пластических деформаций одних элементов на другие. Матрица коэффициентов оказывается симметричной. Естественным обобщением соотношений (8) на случай произвольного числа элементов будет соотношение вида

$$\sum_{k=1}^n B_{ke} e_k = \sigma \pm \tau_e$$

Именно такого рода соотношения были положены в основу теории пластичности [2]. Таким образом, модель Персо является иллюстрацией (для одномерного случая) некоторых вариантов теории пластичности, предложенной в [2]. (Вопрос об ограничениях, которые должны быть наложены на коэффициенты B_{ke} , в заметке не обсуждается.)

Поступила 20 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Persoz B. Modèles plasto-élastiques. Acta Rheolog., 1958, Bd 1, Nr 2–3.*
2. *Кадашев Ю. И., Новожилов В. В. Об учете микронапряжений в теории пластичности. Инж. ж. МГТ, 1968, № 3.*

УДК 539.214; 539.374

ОБ ЭНЕРГОСИЛОВЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ В ПОЛЕ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ, ОБРАЗОВАННОМ КРУГОВЫМИ ДУГАМИ

А. З. ЖУРАВЛЕВ, В. И. УРАЖДИН
(Ростов-на-Дону);

Получены зависимости, связывающие энергывыделение с параметрами поля линий скольжения и годографа скоростей.

При помощи преобразования Лапласа – Карсона выводится условие равновесия, выраженное через функцию Ломмеля. В [1] это условие получено с привлечением специально введенной функции ω .

В качестве примера рассматривается процесс плоского редуцирования в жесткой матрице.

1. Рассмотрим плоскую пластическую деформацию замкнутой области Q , состоящей из n подобластей Q_i . Обозначим через $[V_i]$ величину разрыва касательной составляющей скорости на линии разрыва скорости l_i ($i=1, 2, \dots, n$) в Q_i , причем l_i ограничивает область Q_i . В этом случае основное энергетическое уравнение для не-

упрочняющейся среды имеет вид [2]:

$$N' = \frac{N}{k} = \sum_{i=1}^n D_i + G_i = \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} H_i dQ + \int_{l_i} [V_i] dl \quad (1.1)$$

Здесь k — пластическая постоянная, N — мощность поверхностных сил, D_i — безразмерная мощность энерговыделения в открытой области Q_i ; G_i — безразмерная мощность рассеяния на линиях разрыва скорости l_i , H_i — интенсивность скорости деформации сдвига в открытой области Q_i .

Рассмотрим поле линий скольжения, образованное начальными круговыми дугами радиусов $R=R_0$, $S=S_0$, α' - и β' -линий. Если вдоль линий скольжения, ограничивающих пластическую зону $\alpha'=\alpha_1'$, $\beta'=\beta_1'$, распространяются разрывы касательной составляющей скорости ΔV и ΔU (фиг. 1), то соответствующий годограф скоростей образован начальными дугами радиусов $\delta=\delta_0=\Delta V$, $\rho=\rho_0=\Delta U$ линий α'' и β'' .

Будем считать, что в рассматриваемом поле линий скольжения удовлетворяется условие неотрицательности диссипации энергии.

Назовем, как обычно, положительным направление отсчета углов против движения часовой стрелки и сделаем замену $\beta=\beta_1'-|\beta_1''|$, $\alpha=|\alpha_1''|=|\alpha_1'-\alpha''|$. Основные соотношения в поле линий скольжения и годографе скоростей примут вид [3]:

$$R = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = R_0 I_0(\xi) + S_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} I_1(\xi), \quad \xi = 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$S = \frac{\partial R}{\partial \beta} = S_0 I_0(\xi) + R_0 \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta}} I_1(\xi)$$

$$\rho = -\frac{\partial \delta}{\partial \beta} = U - \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \rho_0 I_0(\xi') + \delta_0 \sqrt{\frac{(\beta_1-\beta)}{(\alpha_1-\alpha)}} I_1(\xi'), \quad \xi' = 2\sqrt{[(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\beta)]}$$

$$\delta = -\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = V - \frac{\partial U}{\partial \beta} = \delta_0 I_0(\xi') + \rho_0 \sqrt{\frac{(\alpha_1-\alpha)}{(\beta_1-\beta)}} I_1(\xi') \quad (1.2)$$

Используя уравнения для интенсивности скоростей деформаций сдвига в криволинейных координатах [4], получим

$$H_1 = R^{-1} \rho|_{\beta=0}, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = S^{-1} \delta|_{\alpha=0}, \quad H_4 = \rho R^{-1} + \delta S^{-1} \quad (1.3)$$

Учитывая формулы (1.1)–(1.3), вычислим безразмерную мощность рассеяния энергии в областях Q_1 , Q_3 (в полярной системе координат) и в Q_4 (в криволинейной системе координат)

$$D_1 = R_0 \left\{ \delta_0 [I_0(\xi_1) - 1] + \rho_0 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} I_1(\xi_1) \right\}, \quad \xi_1 = 2\sqrt{\alpha_1 \beta_1} \quad (1.4)$$

$$D_3 = S_0 \left\{ \rho_0 [I_0(\xi_1) - 1] + \delta_0 \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} I_0(\xi_1) \right\}, \quad D_4 = \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} (\rho S + \delta R) d\alpha d\beta$$

Для вычисления D_4 воспользуемся теоремой о свертке для двумерного преобразования Лапласа – Карсона. В результате получим [5]:

$$D_4 = (R_0 \delta_0 + S_0 \rho_0) [\xi_1 I_1(\xi_1) - I_0(\xi_1) + 1] + 2(\alpha_1 R_0 \rho_0 + \beta_1 S_0 \delta_0) I_2(\xi_1)$$

Наконец, безразмерная мощность рассеяния на линиях разрыва скорости будет равна

$$G = \rho_0 \int_0^{\alpha_1} R|_{\beta=\beta_1} d\alpha + \delta_0 \int_0^{\beta_1} S|_{\alpha=\alpha_1} d\beta + \rho_0 S_0 + \delta_0 R_0 = \\ = (R_0 \delta_0 + S_0 \rho_0) I_0(\xi_1) + \left[R_0 \rho_0 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} + S_0 \delta_0 \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \right] I_1(\xi_1)$$

3. Журавлев А. З., Ураждина Л. С., Уражди В. И. Применение операционного метода к решению начальной характеристической задачи плоской теории пластичности. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
6. Закуренов Е. А., Ренне И. П. Волочение полосы через клиновые матрицы с малыми редуциями (определение удельных усилий). В сб.: Технология машиностроения, вып. 15. Тула, Изд-во Тульск. политехн. ин-та, 1971.

УДК 539.374

О СОГЛАСОВАННОСТИ И КОРРЕКТНОСТИ КОНТАКТНЫХ СКОРОСТЕЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА В ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЛО

О. Д. ГРИГОРЬЕВ

(Новосибирск)

Рассматривается влияние положительности диссипативной функции на краевое условие для скоростей на поверхности контакта среды и гладкого штампа, вдавливаемого в идеальное жесткопластическое тело (плоская деформация).

Показано, что условие положительности рассеивания приводит к дополнительным ограничениям для контактных скоростей. Установлен критерий положительности диссипативной функции по профилю горизонтальной составляющей скорости частицы среды на поверхности контакта. Это позволило установить несогласованность полей скоростей и напряжений в задачах: о клине с вогнутыми боковыми сторонами; о давлении вогнутого и плоского штампов на криволинейную заготовку; о давлении плоского штампа на полуплоскость, когда предел текучести убывает в горизонтальном направлении. Указан класс некорректных задач. Даны оценки снизу контактных скоростей.

1. Краевое условие для скоростей на контуре штампа, вдавливаемого с вертикальной скоростью v_0 , имеет вид $v_n = v_0 \cos \varphi$, где v_n — нормальная к контуру составляющая скорости частицы среды; φ — угол между осью Ox и касательной к контуру штампа.

С другой стороны, при пластической деформации поля скоростей и напряжений должны быть согласованы между собой условием положительности диссипативной функции [1-7]:

$$D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} > 0 \quad (1.1)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и скорости деформации. Заметим, что условие (1.1) проверяется в настоящее время после построения полей напряжений и скоростей.

Примем для определенности, что криволинейный контур гладкого штампа является для среды траекторией главного нормального напряжения σ_{11} , большего, чем контактное напряжение σ_{22} (противоположный случай отношения главных напряжений исследуется аналогичным образом).

Введем криволинейные ортогональные координаты q_1 и q_2 , являющиеся соответственно траекториями главных нормальных напряжений σ_{11} , σ_{22} . Направления координат q_1 , q_2 примем так, чтобы они образовывали правую систему, при этом на контуре штампа координата q_2 направлена внутрь штампа (фиг. 1).

Условие (1.1) при плоской деформации в координатах q_1 , q_2 примет вид

$$D = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} > 0 \quad (1.2)$$

Так как для несжимаемого материала $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$, то

$$D = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \varepsilon_{11} > 0 \quad (1.3)$$

где ε_{ii} — главные скорости деформации. При этом

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = \frac{\partial v_1}{\partial s_1} - \frac{v_2}{R_1}$$