

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА КОНЦЕПЦИИ ФИЦДЖЕРАЛЬДА О НЕЗАТУХАЮЩЕЙ ПАМЯТИ НАПОЛНЕННЫХ ПОЛИМЕРОВ

Ю. П. ЗЕЗИН, Н. И. МАЛИНИН

(Москва)

В работах [1, 2] показано, что описание вязкоупругих свойств наполненных (главным образом неусиливающими наполнителями) эластомеров линейными и нелинейными теориями наследственности для некоторых случаев неприемлемо. Так, например, для линейного вязкоупругого тела

$$\sigma(a\varepsilon) = a\sigma(\varepsilon), \quad \sigma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \sigma(\varepsilon_1) + \sigma(\varepsilon_2) \quad (1)$$

где  $\sigma$  — напряжения,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  — деформации,  $a = \text{const}$ . Между тем, как показано Фицджеральдом, в некоторых случаях для наполненных эластомеров первое соотношение (1) удовлетворяется, а второе нет. Кроме того, теории вязкоупругости (наследственности) неспособны описать имеющий важное значение в механике наполненных полимеров эффект Маллива [3-5].

Эффект проявляется в том, что у наполненных вулканизированных резин диаграмма разгрузки идет ниже кривой нагружения, а при повторном нагружении диаграмма примерно совпадает с кривой разгрузки вплоть до той точки на кривой  $\sigma$ - $\varepsilon$ , откуда была начата разгрузка. Поведение каучука в некоторой степени напоминает поведение пластических материалов, отличие заключается в том, что при полной нагрузке диаграмма деформирования практически проходит через начало координат.

В работе [1] развита феноменологическая теория, в которой используется концепция незатухающей памяти. При этом предполагается, что такие процессы, как ползучесть, релаксация, эффект Маллива и т. д., определяются последовательным разрывом связей различной растяжимости, причем как для групп связей, так и для системы в целом удовлетворяется критерий длительной прочности типа критерия Бейли (см., например, [6]), но записанный не в напряжениях, а в деформациях. Показано, что если подынтегральная функция в упомянутом критерии степенная, то интеграл в этом критерии удобно записать, используя норму Лебега.

В ряде работ (см., например, [7]) показано, что критерий типа Бейли при некоторых последовательностях приложения нагрузок или деформаций не удовлетворяется. Существенно большие перспективы открывает критерий, предложенный в [8], или его нелинейный вариант, предложенный в [6].

Замена критерия типа Бейли на нелинейный критерий типа Ильюшина, записанный в деформациях, для степенных зависимостей долговечности от деформаций и времени приводит в одномерном случае к определяющему соотношению вида [9]

$$\sigma(\varepsilon) = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 \frac{A}{F[\varepsilon]} + E_3\varepsilon^3 \left( \frac{A}{F[\varepsilon]} \right)^2 + \dots \quad (2)$$

$$F[\varepsilon] = F[\varepsilon(\tau_0^t)] = \left[ \int_0^t (t-\tau)^{m(1+k)} d\varepsilon^{1+k}(\tau) \right]^{1/(1+k)} \quad (3)$$

где  $t$  — время,  $A$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $m$ ,  $k$  — параметры. При разрушении

$$A/F[\varepsilon] \quad (4)$$

В [9] показано, что для механического поведения, описываемого соотношением (2), выполняются те же неравенства, что и в работе [1], так что, например, в частных случаях для описываемого тела первое соотношение (1) удовлетворяется, а второе нет. Качественно соотношение (2) описывает эффект Маллива.

Данная работа посвящена проверке теории, сформулированной в работе [9], в условиях одноосного растяжения. Исследовалась красная резина производства Московского завода «Вулкан» марки 93/18. Образцы в виде двойной лопатки испытывались на модернизированной установке *WPM-250*. Фрикционный вариатор установки был заменен на редуктор, что позволило значительно расширить диапазон скоростей перемещения нижнего захвата.

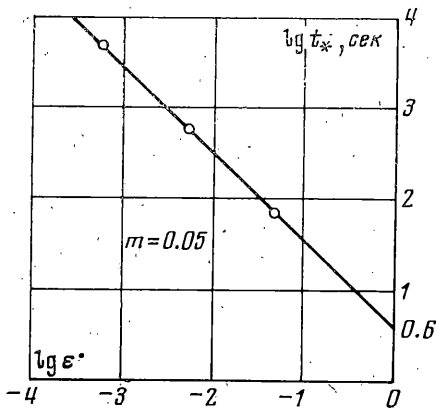
Измерение осевого усилия, действующего на образец, производилось с помощью системы, состоящей из тензометрического динамометра и автоматического самопишущего моста. Деформация образца вычислялась как отношение перемещения нижнего захвата к первоначальному расстоянию между захватами. Таким образом, можно

считать, что за меру деформации была принята мера Коши. Возможность использования меры Коши и для измерения конечных деформаций обсуждена в работах [10, 11]. Заметим, что в обширном обзоре по разрушению эластомеров [12] при всех деформациях, достигавших в некоторых случаях 1000%, применяется исключительно мера Коши. Напряжение в образце рассчитывалось на деформированное сечение, которое определялось из условия несжимаемости материала.

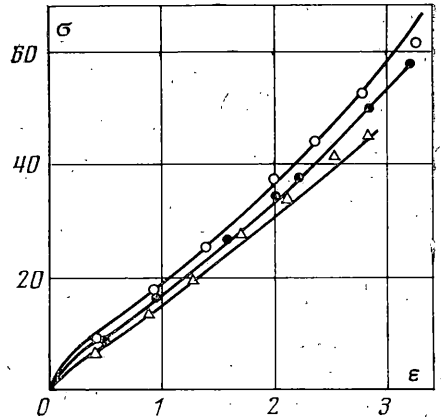
Для определения характеристик материала использованы результаты опытов на растяжение при постоянных скоростях деформаций, опыты с прерывистым нагружением и опыты с режимом нагрузка — разгрузка. Для испытаний при  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  из (3) — (5) имеем

$$F[\epsilon] = [(1+k)B]^{1/(1+k)} \epsilon^* t^{1+m}, \quad \lg t_* = \lg \left\{ \frac{A}{[(1+k)B]^{1/(1+k)}} \right\} - \frac{1}{1+m} \lg \epsilon^* \quad (5)$$

Здесь  $t_*$  — время до разрушения образца,  $B = B(k+1, m(1+k)+1)$  — бета-функция (см., например, [13]). На фиг. 1 приведен график зависимости  $\lg t_* - \lg \epsilon^*$  при  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  ( $4.7 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ ,  $5.22 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ ,  $5.80 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ ). Наклон прямой линии, проведенной



Фиг. 1



Фиг. 2

через экспериментальные точки, определяет параметр  $m=0.05$ . Ордината при  $\lg \epsilon^* = 0$  определяет значение  $A/[(1+k)B]^{1/(1+k)} = 3.98$ .

Для аппроксимации зависимостей  $\sigma - \epsilon$ , полученных в опыте при активном режиме нагружения, т. е. при  $d\epsilon/dt > 0$  [14], использованы первые два члена формулы (2). При  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  это соотношение имеет вид

$$\sigma(t) = E_2 A [(1+k)B]^{-1/(1+k)} \epsilon^* t^{1-m} + E_3 A^2 [(1+k)B]^{-2/(1+k)} \epsilon^* t^{1-2m} = h_1 \epsilon^* t^{1-m} + h_2 \epsilon^* t^{1-2m} \quad (6)$$

Параметры  $h_1$  и  $h_2$ , определенные методом наименьших квадратов для кривых  $\sigma - \epsilon$  при трех, постоянных в опыте, скоростях деформаций, приведены ниже

|   | $\dot{\epsilon} \text{ сек}^{-1}$ | $h_1$ | $h_2$ |
|---|-----------------------------------|-------|-------|
| 1 | $4.7 \cdot 10^{-2}$               | 30.9  | -11.5 |
| 2 | $5.22 \cdot 10^{-3}$              | 36.0  | -16.0 |
| 3 | $5.8 \cdot 10^{-4}$               | 38.0  | -19.0 |

Для расчетов зависимостей  $\sigma - \epsilon$  были приняты значения  $h_1$  и  $h_2$ , близкие к средним:  $h_1 = 35.5$ ,  $h_2 = -15.5$ . На фиг. 2 представлены экспериментальные (сплошной линией) и расчетные (темными точками) зависимости  $\sigma - \epsilon$  при трех, указанных выше, скоростях деформаций (номера кривых соответствуют номерам строк таблицы,  $\sigma - \epsilon$  в  $\kappa\Gamma/\text{см}^2$ ).

Параметр  $k$  определяется из опытов с прерывистой программой нагружения. В этих испытаниях образец растягивался с постоянной скоростью деформации  $\dot{\epsilon} = 4.7 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$  в течение времени  $t_1$ , затем деформация образца не изменялась до момента времени  $t_2 = 2.5t_1$ ; с момента времени  $t_2$  образец вновь подвергался растяжению с той же скоростью деформации до разрушения. К моменту времени  $t_2$  имеем

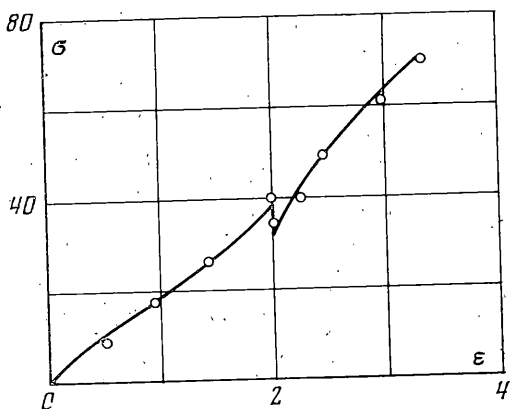
$$F[\epsilon] = [(1+k)B]^{1/(1+k)} J_{x_1}^{1/(1+k)} t_2^{1+m} \epsilon$$

где  $x_1 = t_1/t_2$ ,  $J_{x_1} = B_{x_1}/B$ ,  $B_{x_1}$  — неполная бета-функция [13]. Значения величины  $J_{x_1}$  определены из таблиц [15]. Выбиралось такое значение параметра  $k$ , при котором совпадали экспериментальная и расчетная величины изменения напряжения за пе-

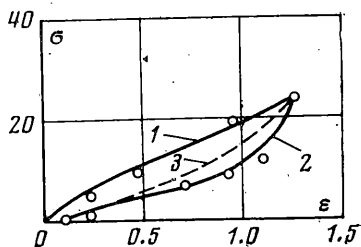
риод релаксации с момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_2$ . Для исследуемого материала принято значение  $k+1=20$ . После того, как определено значение параметра  $k$ , можно подсчитать значения параметров  $A$ ,  $E_2$  и  $E_3$ . Из соотношения  $A[(1+k)E]^{-1/(1+k)}=3.98$  получим  $A=3.42$ . Из соотношений для  $h_1$  и  $h_2$  в формуле (6) имеем  $E_2=8.91 \text{ кг/см}^2$ ,  $E_3=-0.98 \text{ кг/см}^2$ .

На фиг. 3 приведены экспериментальная (сплошная линия) и расчетная (точки) зависимости  $\sigma-\epsilon$  при указанном выше режиме испытания. Как для прерывистого режима нагружения, так и для других программ одноосного нагружения при условии, что в процессе эксперимента не происходит уменьшения деформации, получено хорошее согласование экспериментальных и теоретических кривых, рассчитанных по формуле (2) с двумя членами.

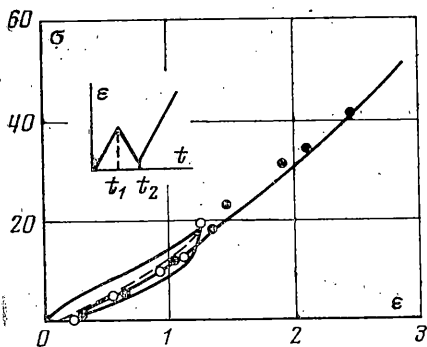
Имеются, однако, основания полагать, что при реверсировании деформации теория Фитцджеральда и ее модификация, обсуждаемая в этой работе, для некоторых материалов не дает удовлетворительного описания режима разгрузки и повторного нагружения, т. е. эффекта Маллинза. Так, в работе [2] для описания кривой разгрузки



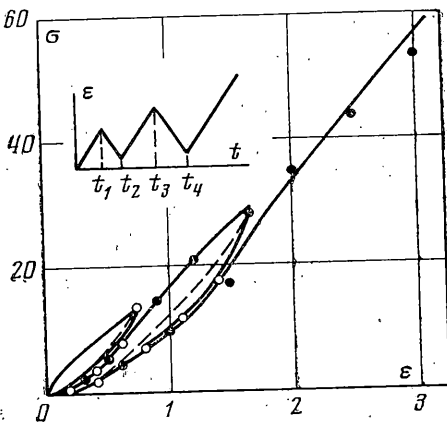
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

вводится добавочный член, влияние которого проявляется, если в истории нагружения имеет место изменение знака  $\epsilon$ . Этот член по своему виду сходен с соответствующими выражениями теории вязкоупругости. Сказанное иллюстрирует фиг. 4. Здесь 1 — кривая нагружения, 2 — кривая разгрузки, полученные в опыте при  $\dot{\epsilon} = 4.7 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ , 3 — расчетная кривая, построенная по формуле (3) с двумя членами в правой части. Видно, что кривая 3 согласуется с экспериментальной кривой лишь качественно. Для количественного согласования предлагается определяющее уравнение, пригодное для нагружки и разгрузки, в виде

$$\sigma(\epsilon) = E_2 \epsilon^2 \frac{A}{F[\epsilon]} + E_3 \epsilon^3 \left( \frac{A}{F[\epsilon]} \right)^2 + E_4 \epsilon^3 \left( \frac{A}{F[\epsilon]} \right)^3 H \left( 1 - 0 - \frac{\epsilon}{\epsilon_{\max}} \right) \quad (7)$$

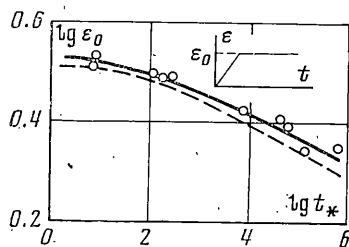
где  $E_4$  — параметр,  $\varepsilon_{\max}$  — максимальная достигнутая в эксперименте деформация,  $H(1 - \varepsilon / \varepsilon_{\max})$  — функция Хевисайда (см., например, [16]),  $H(x) = 0$ ,  $x < 0$ ;  $H(x) = 1$ ,  $x > 0$ . В аргументе функции  $H(1 - \varepsilon / \varepsilon_{\max}) = 0$  означает бесконечно малую величину, введенную для того, чтобы при  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$   $H = 0$ .

Приведем значения  $E_4$  для трех значений деформации, полученных в опыте с режимом нагрузка — разгрузка при  $\dot{\varepsilon} = 4.7 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$

|               |        |        |        |
|---------------|--------|--------|--------|
| $\varepsilon$ | 1.08   | 0.893  | 0.705  |
| $E_4$         | -0.273 | -0.410 | -0.422 |

Для дальнейших вычислений принято среднее значение  $E_4 = -0.37$ . На фиг. 4 нанесены точками результаты расчета зависимости  $\sigma - \varepsilon$  для нагрузки и разгрузки по формуле (7).

На фиг. 5 сплошной линией показана экспериментальная кривая  $\sigma - \varepsilon$  для программы нагружения, указанной на вставке при скорости деформации  $\dot{\varepsilon} = 5.8 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ ,



Фиг. 7

прерывистой линией — зависимости для разгрузки, рассчитанные по формуле (2) с двумя членами в правой части; светлые точки — результат расчета разгрузки по формуле (7), темные — результат расчета повторного нагружения по формуле (7).

На фиг. 6 сплошной линией показана экспериментальная зависимость  $\sigma - \varepsilon$  для циклического режима нагружения (см. вставку) при скорости деформации  $\dot{\varepsilon} = 5.22 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ . Теоретические кривые первой и второй разгрузки, рассчитанные по формуле (2) с двумя членами в правой части, нанесены на график прерывистой линией; светлые точки — результаты расчета первой и второй разгрузки по формуле (7), темные — результаты второго и третьего нагружения по формуле (7). Из описанного графика видно, что при не слишком высоких деформациях (около 100%) двухчленная формула (2) дает хорошее описание экспериментальных кривых.

На фиг. 7 в координатах  $\lg t_* - \lg \varepsilon_0$  сплошной линией приведена экспериментальная зависимость времени до разрушения образца (в секундах) в опыте на релаксацию напряжений. Темные точки — результаты испытаний отдельных образцов, прерывистая линия — результат расчета по формуле (4).

Поступила 23 VI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fitzgerald J. E., Farris R. J. Deficiencies of viscoelastic theories as applied to solid propellants. Bull. 1 st joint army — navy — NASA — air force meeting of the working group on mech. beh. Baltimore, 1970, publ. No. 160.
2. Fitzgerald J. E., Vakili J. Non-linear characterization of sand-asphalt concrete by means of permanent-memory norms. Exptl mech. 1973, vol. 13, No. 12, p. 504–510.
3. Mullins L. Effect of stretching on the properties of rubber. J. Rubber Res., 1947, vol. 16, No. 12, p. 275–289.
4. Mullins L. Thixotropic behavior of carbon black in rubber. J. Phys. Colloid Chem., 1950, vol. 54, No. 2, p. 239–251.
5. Mullins L. Softening of rubber by deformation. Rubber Chem. and Technol., 1969, vol. 42, No. 1, p. 339–362.
6. Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к рядам ракетных двигателей на твердом топливе). М., «Наука», 1972.
7. Панферов К. В., Коробельников Ю. Г. О влиянии «отдыха» на долговечность некоторых полимерных материалов при повторных нагрузках. Высокомолекул. соединения, 1965, т. 7, № 10.
8. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности. Инж. ж. МТТ, 1967, № 3.

9. Трифонов В. П., Малинин Н. И.: О связи между напряжениями и деформациями для полимерных материалов, проявляющих свойства незатухающей памяти. В кн.: Прочность и разрушение твердых тел. Тр. Ин-та механики МГУ, 1975, № 37.
10. Рейнер М. Реология. М., «Наука», 1965.
11. Малинин Н. И. Ползучесть и релаксация полимеров в переходном состоянии. ПМТФ, 1961, № 1.
12. Разрушение (под ред. Г. Либовица), т. 7, ч. 2. М., «Мир», 1976.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1974.
14. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степаньчев Е. И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. Механика полимеров, 1971, № 1.
15. Pearson K. Tables of the incomplete beta-function. London, Biometric laboratory, 1934.
16. Морс Ф. М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958, стр. 122.

УДК 539.376

## ОБ ОДНОЙ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРСО

Ю. И. КАДАШЕВИЧ, В. Н. КРАЧУН

(Ленинград)

В работе [1] изучались одномерные упругопластические модели с сухим трением, в частности, модели, составленные из параллельно и последовательно работающих элементов с сухим трением, а также так называемые смешанные группировки. Детальный анализ смешанных группировок позволил сделать общие выводы о характере развития деформации при знакопеременном нагружении.

Б. Персо, кроме того, привлек внимание к так называемым произвольным группировкам, которые, как видно из приведенных им примеров, имеют весьма специфические законы развития деформации. Несмотря на то, что сам Персо рассматривает свои предложения не более чем набросок, его подход заслуживает пристального внимания и обобщения. Персо показал, что если поведение одного элемента зависит не только от внешней нагрузки, но и от поведения других элементов, и элементы не могут быть объединены в параллельные или последовательные цепочки, то надо в каждом конкретном случае проводить детальный анализ модели. В работе приведен числовой расчет 7-элементной модели, показанной на фигуре. Модель состоит из четырех упругих элементов, подчиняющихся закону Гука, т. е. напряжения  $\sigma_k$  связаны с деформациями  $\epsilon_k$  соотношением  $\sigma_k = G_k \epsilon_k$ ;  $G_k$  — модуль упругости элемента и трех идеально пластических элементов, пределы текучести которых обозначим через  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ . Суммарное напряжение, действующее на модель, обозначим через  $\sigma$ .

Приведем анализ этого примера несколько с других позиций, чем это сделано в [1]. Не будем конкретизировать числовые значения всех входящих параметров, а выпишем условия равновесия на границах A, B, C, D

$$\pm \tau_1 = \sigma - G_4 \epsilon_4 \quad (1)$$

$$\pm \tau_3 = \sigma - G_2 \epsilon_2 \quad (2)$$

$$G_4 \epsilon_4 = G_3 \epsilon_3 \pm \tau_2 \pm \tau_3 \quad (3)$$

(условие на границе B есть следствие остальных уравнений и его выписывать не будем). Исключая из (3)  $\tau_3$ , вместо (1)–(3) можно получить

$$\pm \tau_1 = \sigma - G_4 \epsilon_4 \quad (4)$$

$$\pm \tau_2 = -\sigma + G_2 \epsilon_2 - G_3 \epsilon_3 + G_4 \epsilon_4 \quad (5)$$

$$\pm \tau_3 = \sigma - G_2 \epsilon_2 \quad (6)$$