

КОЛЕБАНИЯ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК,
ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. Н. АНТОНОВ

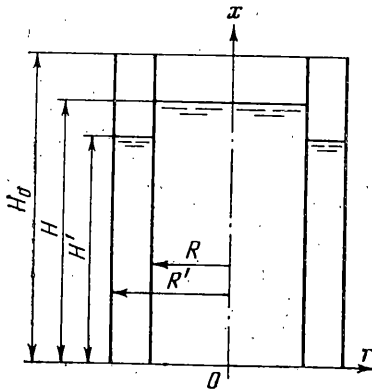
(Москва)

В [1, 2] исследуются осесимметричные и неосесимметричные колебания заполненных несжимаемой жидкостью соосных цилиндрических оболочек.

Ниже приводится численный метод решения задачи об определении частот и форм собственных линейных колебаний соосных цилиндрических оболочек, частично-заполненных тяжелой сжимаемой жидкостью.

1. В цилиндрической системе координат r, x, θ рассматриваются две соосные круговые цилиндрические оболочки (фиг. 1) с плоскими жесткими днищами, заполненные до уровней H и H' идеальной сжимаемой жидкостью с плотностью $\rho \approx \text{const}$.

Для собственных (с частотой ω) совместных колебаний оболочек и жидкости малые перемещения оболочек $u(u, v, w)$, $u'(u', v', w')$ и потенциалы перемещений жидкости ϕ и ψ можно представить в виде



Фиг. 1

$$[u, u', w, w', \phi, \psi] = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} [U_n, U_n', W_n, W_n', \Phi_n, \Psi_n] \cos n\theta$$

$$[v, v'] = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} [V_n, V_n'] \sin n\theta \quad (1.1)$$

Здесь величины, относящиеся к внешней оболочке, отмечены штрихом.

Функции Φ_n и Ψ_n удовлетворяют уравнениям (c — скорость звука в жидкости)

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n = 0 \quad (1.2)$$

$$(0 < r < R, \quad 0 < x < H)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Psi_n = 0 \quad (1.3)$$

$$(R < r < R', \quad 0 < x < H')$$

и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right|_{r=R} = W_n, \quad \left. \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad g \left. \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right|_{x=H} - \omega^2 \Phi_n|_{x=H} = 0 \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \right|_{r=R} = W_n, \quad \left. \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \right|_{r=R'} = W_n', \quad \left. \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (1.5)$$

$$g \left. \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \right|_{x=H'} - \omega^2 \Psi_n|_{x=H'} = 0$$

2. Для решения краевых задач (1.2), (1.4) и (1.3), (1.5) применим метод суммарных представлений Г. Н. Положего.

Уравнение (1.2) при $n \geq 1$ аппроксимируем в прямоугольнике ($r_0 < r < r_{l+1}$, $x_0 < x < x_{m+1}$) конечно-разностным уравнением [3] (индекс n для сокращения записи в дальнейшем будем опускать)

$$\frac{1}{h^2} [\Phi_j(r_{i+1}) - 2\Phi_j(r_i) + \Phi_j(r_{i-1})] + \frac{1}{r_i} \frac{1}{2h} [\Phi_j(r_{i+1}) - \Phi_j(r_{i-1})] +$$

$$+ \frac{1}{h_1^2} [\Phi_{j+1}(r_i) - 2\Phi_j(r_i) + \Phi_{j-1}(r_i)] + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r_i^2} \right) \Phi_j(r_i) = 0 \quad (2.1)$$

$$\Phi_j(r_i) = \Phi_n(r_i, x_j) \quad (i=1, 2, \dots, l; j=1, 2, \dots, m), \quad h=R/(l+0.5), \quad h_1=H/(m+1)$$

$$r_i = (i-0.5)h \quad (i=0, 1, \dots, l+1), \quad x_j = jh_1 \quad (j=0, 1, \dots, m+1)$$

где h и h_1 ($h, h_1 > 0$) — шаги разностной сетки по r и x соответственно.

Краевым дифференциальным условиям (1.4) соответствуют краевые дискретные условия

$$\Phi_j(r_{l+1}) - \Phi_j(r_l) = hW(x_j) \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (2.2)$$

$$\Phi_0(r_i) = \Phi_1(r_i), \quad \Phi_{m+1}(r_i) - \operatorname{tg} \beta \Phi_m(r_i) = 0, \quad \operatorname{tg} \beta = (1 - \omega^2 h_1/g)^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

Введем конечно-разностный оператор [3]:

$$L\Phi_j(r_i) = \frac{2i}{2i-1} \Phi_j(r_{i+1}) - \left(2+2a^2 + \frac{n^2}{(i-0.5)^2} - \frac{\omega^2}{c^2} h^2 \right) \Phi_j(r_i) +$$

$$+ \frac{2(i-1)}{2i-1} \Phi_j(r_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, l; j=1, 2, \dots, m) \quad (2.3)$$

и запишем систему (2.1) в векторной форме

$$L\Phi(r_i) + a^2 T_3 \Phi(r_i) = 0, \quad a = h/h_1 \quad (i=1, 2, \dots, l) \quad (2.4)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \operatorname{tg} \beta \end{pmatrix}, \quad \Phi(r_i) = \begin{pmatrix} \Phi_1(r_i) \\ \Phi_2(r_i) \\ \dots \\ \Phi_m(r_i) \end{pmatrix}$$

Симметрическую матрицу T_3 ортогональным преобразованием приведем к диагональной форме

$$Q^* T_3 Q = \Lambda, \quad Q^* = Q^{-1} \quad (2.5)$$

где $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы T_3 , $Q = (q_{ij})$ — матрица собственных ортонормированных векторов матрицы T_3 , Q^* — матрица, транспонированная с Q .

Если $|\operatorname{tg} \beta| \leq 1$, то λ_j и q_{ij} определяются по формулам [4]:

$$\lambda_j = 2 \cos \alpha_j, \quad q_{ij} = [\sin i\alpha_j - \sin(i-1)\alpha_j] c_j$$

$$c_j = \left[\sum_{i=1}^m (\sin i\alpha_j - \sin(i-1)\alpha_j)^2 \right]^{-1/2} \quad (i, j=1, 2, \dots, m)$$

где α_j — лежащие в интервале $0 < \alpha < \pi$ корни уравнения

$$\sin(m+1)\alpha - (1 + \operatorname{tg} \beta) \sin m\alpha + \operatorname{tg} \beta \sin(m-1)\alpha = 0$$

В случае $|\operatorname{tg} \beta| > 1$ собственные числа λ_j и элементы матрицы Q находятся по общему методу, указанному в [4].

Умножая обе части уравнения (2.4) на Q^* и используя равенства (2.3), (2.5), получим однородное уравнение

$$2i\Phi_j^\circ(r_{i+1}) - \eta_{ij}\Phi_j^\circ(r_i) + 2(i-1)\Phi_j^\circ(r_{i-1}) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi^\circ(r_i) = Q^* \Phi(r_i) \quad (i=1, 2, \dots, l; j=1, 2, \dots, m) \quad (2.7)$$

$$\eta_{ij} = (2i-1) \left[2 + 2a^2 + \frac{n^2}{(i-0.5)^2} - a^2\lambda_j - \frac{\omega^2}{c^2} h^2 \right]$$

Общее решение уравнения (2.6), отвечающее условию $\Phi_j(r_0) \neq \infty$, имеет вид

$$\Phi_j^\circ(r_i) = A_j P_j(r_i) \quad (i=1, 2, \dots, l+1; j=1, 2, \dots, m)$$

где A_j ($j=1, 2, \dots, m$) — произвольные постоянные, $P_j(r_i)$ — специальные функции дискретного аргумента [4]:

$$P_j(r_1) = 1, \quad P_j(r_i) = \frac{\eta_{i-1j} P_j(r_{i-1}) - 2(i-2) P_j(r_{i-2})}{2(i-1)} \quad (i=2, 3, \dots, l+1)$$

Учитывая (2.7) и определяя произвольные постоянные A_j из условий (2.2), получим формулу суммарных представлений — решение краевой задачи (1.2), (1.4) в прямоугольнике ($r_0 < r \leq R$, $0 < x < H$) при $n \geq 1$:

$$\Phi_n(r_i, x_j) = h \sum_{k=1}^m W_n(x_k) \sum_{s=1}^m \frac{q_{js} q_{ks} P_s(r_i)}{P_s(r_{l+1}) - P_s(r_l)}, \quad (i=1, 2, \dots, l+1; j=1, 2, \dots, m) \quad (2.8)$$

3. Уравнение (1.3) аппроксимируется в прямоугольнике ($r_0 < r < r_{l'+1}$, $x_0 < x < x_{m'+1}$) конечно-разностным уравнением ($n=0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h'^2} [\Psi_j(r_{i+1}) - 2\Psi_j(r_i) + \Psi_j(r_{i-1})] + \frac{1}{r_i} \frac{1}{2h'} [\Psi_j(r_{i+1}) - \Psi_j(r_{i-1})] + \\ & + \frac{1}{h_1^2} [\Psi_{j+1}(r_i) - 2\Psi_j(r_i) + \Psi_{j-1}(r_i)] + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r_i^2} \right) \Psi_j(r_i) = 0 \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, l'; j=1, 2, \dots, m') \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Psi_j(r_i) &= \Psi_n(r_i, x_j), \quad h' = (R' - R) / (l' + 1), \quad r_i = R + ih' \quad (i=0, 1, \dots, l'+1) \\ x_j &= jh_1, \quad H' = x_{m'+1} \quad (j=0, 1, \dots, m'+1) \end{aligned}$$

Условия (1.5) запишем в дискретном виде

$$\Psi_j(r_1) - \Psi_j(r_0) = h' W(x_j), \quad \Psi_j(r_{l'+1}) - \Psi_j(r_{l'}) = h' W'(x_j) \quad (j=1, 2, \dots, m') \quad (3.2)$$

$$\Psi_c(r_i) = \Psi_1(r_i), \quad \Psi_{m'+1}(r_i) - \operatorname{tg} \beta \Psi_{m'}(r_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l')$$

Введем конечно-разностный оператор

$$L'\Psi_j(r_i) = \frac{2(i+\sigma)+1}{2(i+\sigma)} \Psi_j(r_{i+1}) - \left(2+2a'^2 + \frac{n^2}{(i+\sigma)^2} - \frac{\omega^2}{c^2} h'^2 \right) \Psi_j(r_i) + \frac{2(i+\sigma)-1}{2(i+\sigma)} \Psi_j(r_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, l'; j=1, 2, \dots, m')$$

и представим систему (3.1) в векторной форме

$$L'\Psi(r_i) + a'^2 T_s' \Psi(r_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l') \quad (3.3)$$

$$a' = h'/h_1, \sigma = R/h', \Psi(r_i) = (\Psi_1(r_i), \Psi_2(r_i), \dots, \Psi_{m'}(r_i))$$

где T_s' — матрица порядка m' , имеющая тот же вид, что и T_s .

Умножая обе части уравнения (3.3) на Q'^* , где $Q' = (q_{ij}')$ — матрица собственных ортонормированных векторов матрицы T_s' , получим однородное уравнение

$$[2(i+\sigma)+1] \Psi_j^\circ(r_{i+1}) - \eta_{ij}' \Psi_j^\circ(r_i) + [2(i+\sigma)-1] \Psi_j^\circ(r_{i-1}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l'; j=1, 2, \dots, m') \quad (3.4)$$

$$\Psi^\circ(r_i) = Q'^* \Psi(r_i), \quad \eta_{ij}' = 2(i+\sigma) \left[2+2a'^2 + \frac{n^2}{(i+\sigma)^2} - a'^2 \lambda_j' - \frac{\omega^2}{c^2} h'^2 \right] \quad (3.5)$$

где λ_j' ($j=1, 2, \dots, m'$) — собственные числа матрицы T_s' .

Общее решение уравнения (3.4) имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \Psi_j^\circ(r_i) &= A_j' P_j'(r_i) + B_j' T_j'(r_i) \quad (i=0, 1, \dots, l'+1; j=1, 2, \dots, m'), P_j'(r_0) = 0 \\ T_j'(r_0) &= 1, P_j'(r_1) = 1, T_j'(r_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$P_j'(r_i) = \frac{\eta_{i-1j}' P_j'(r_{i-1}) - [2(i+\sigma)-3] P_j'(r_{i-2})}{2(i+\sigma)-1} \quad (i=2, 3, \dots, l'+1)$$

$$T_j'(r_i) = \frac{\eta_{i-1j}' T_j'(r_{i-1}) - [2(i+\sigma)-3] T_j'(r_{i-2})}{2(i+\sigma)-1} \quad (i=2, 3, \dots, l'+1)$$

где A_j', B_j' — произвольные постоянные.

Учитывая (3.5) и определяя A_j', B_j' из условий (3.2), получим решение краевой задачи (1.3), (1.5) в прямоугольнике ($R \leq r \leq R', 0 < x < H'$):

$$\Psi_n(r_i, x_j) = h' \sum_{h=1}^{m'} W_n'(x_h) \sum_{s=1}^{m'} \frac{q_{js}' q_{hs}' (P_s'(r_i) + T_s'(r_i))}{P_s'(r_{l'+1}) + T_s'(r_{l'+1}) - P_s'(r_{l'}) - T_s'(r_{l'})} + h' \sum_{h=1}^{m'} W_n(x_h) \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{m'} \frac{q_{js}' q_{hs}' [P_s'(r_i) (T_s'(r_{l'+1}) - T_s'(r_{l'})) - T_s'(r_i) (P_s'(r_{l'+1}) - P_s'(r_{l'}))]}{P_s'(r_{l'+1}) + T_s'(r_{l'+1}) - P_s'(r_{l'}) - T_s'(r_{l'})}$$

$$(n=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, \dots, l'+1; j=1, 2, \dots, m')$$

$$(3.7)$$

Повторяя рассуждения при выводе формулы (3.7) для $n=0$, найдем решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям (1.4) и $\partial \Phi_0 / \partial r|_{r=0} = 0$:

$$\Phi_0(r_i, x_j) = h^0 \sum_{h=1}^m W_0(x_h) \sum_{s=1}^m \frac{q_{js} q_{hs} (P_s^0(r_i) + T_s^0(r_i))}{P_s^0(r_{l+1}) + T_s^0(r_{l+1}) - P_s^0(r_l) - T_s^0(r_l)}$$

$$h^0 = R/(l+1), \quad r_i = ih^0 \quad (i=0, 1, \dots, l+1; j=1, 2, \dots, m) \quad (3.8)$$

где функции $P_j^0(r_i)$ и $T_j^0(r_i)$ определяются по формулам (3.6); при этом

$$\eta_{ij}' = \eta_{ij}^0 = 2i \left[2 + \left(\frac{h^0}{h_1} \right)^2 (2 - \lambda_j) - \frac{\omega^2}{c^2} h^{02} \right], \quad \sigma = 0$$

4. Отрезок образующих оболочек $[0, H_0]$ множеством точек $\{x_0=0, x_1, x_2, \dots, x_{m'+1}=H', x_{m'+2}, \dots, x_{m+1}=H, x_{m+2}, \dots, x_{m_0}, x_{m_0+1}=H_0\}$ разобьем на m_0+1 равных частей длиной h_1 . К этому множеству добавим также фиктивные точки $x_{-1} = -h_1$ и $x_{m_0+2} = H_0 + h_1$. В узловых точках $\{(r=R, x_j), j=0, 1, \dots, m_0+1\}$ и $\{(r=R', x_j), j=0, 1, \dots, m_0+1\}$ введем векторы дискретных перемещений $U_n(x_j) = U_n(x) |_{x=x_j}$, $U_n'(x_j) = U_n'(x) |_{x=x_j}$.

В точках x_{-1} и x_{m_0+2} введем перемещения $W_n(x_{-1})$, $W_n'(x_{-1})$ и $W_n(x_{m_0+2})$, $W_n'(x_{m_0+2})$.

Подставим (1.1) в интегралы потенциальной и кинетической энергии оболочек и жидкости [5] и заменим полученные простые интегралы конечными приближенными суммами по формуле Симпсона. Значения подинтегральных функций возьмем в точках $\{x_j, j=0, 1, \dots, m_0+1\}$.

Для аппроксимации первых производных функций $U_n(x_j)$, $V_n(x_j)$, $U_n'(x_j)$, $V_n'(x_j)$ в точках $\{x_j, j=1, 2, \dots, m_0\}$ и $W_n(x_j)$, $W_n'(x_j)$ в $\{x_j, j=0, 1, \dots, m_0+1\}$ применим формулы центральных разностей. В точках x_0 и x_{m_0+1} используются соответственно правые и левые разностные производные $U_n(x_j)$, $V_n(x_j)$, $U_n'(x_j)$ и $V_n'(x_j)$ по x .

При помощи формул суммарных представлений (2.8), (3.7), (3.8) исключим потенциалы $\Phi_n(r_{l+1}=R, x_j)$ ($j=1, 2, \dots, m$) и $\Psi_n(r_0=R, x_j)$, $\Psi_n(r_{l+1}=R', x_j)$ ($j=1, 2, \dots, m'$) из конечных сумм, заменяющих интегралы кинетической энергии жидкости.

Из граничных условий на краях оболочек выразим функции $U_n(x_j)$, $V_n(x_j)$, $U_n'(x_j)$, $V_n'(x_j)$ в точках x_0 , x_{m_0+1} и $W_n(x_j)$, $W_n'(x_j)$ в x_{-1} , x_0 , x_{m_0+1} , x_{m_0+2} через $U_n(x_j)$, $U_n'(x_j)$ ($j=1, 2, \dots, m_0$). Таким образом, потенциальную и кинетическую энергию оболочек и жидкости представим в виде квадратичных форм от перемещений и скоростей перемещений оболочек в узловых точках $\{x_j, j=1, 2, \dots, m_0\}$.

В качестве обобщенных координат, определяющих положение системы из $2m_0$ материальных точек, лежащих на образующих срединных поверхностей оболочек, выберем независимые перемещения $U_n(x_j)$ и $U_n'(x_j)$.

Для описания движения точек системы составим уравнения Лагранжа второго рода, которые преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}} \left\{ \Pi_0^{(1)} + \Pi_0^{(2)} + \Pi_0^{(3)} + \Pi_0'^{(1)} + \Pi_0'^{(2)} + \Pi_0'^{(3)} - \right.$$

$$- \frac{\omega^2}{2} \left[\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{m_0} d_{ij} c_{ij}^2 + \rho \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m e_{jk} c_{5j} c_{5k} + \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=1}^{m'} f_{jk} c_{5j} c_{5k} + \right. \right.$$

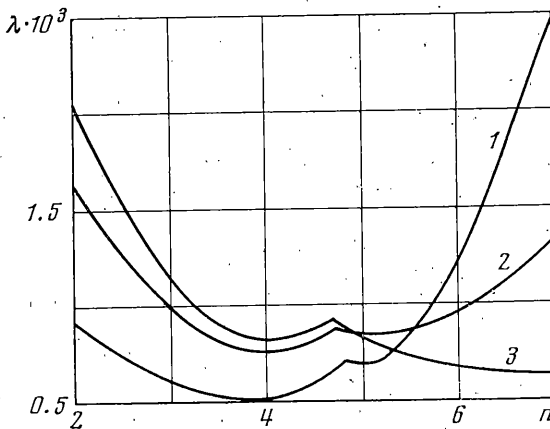
$$\left. \left. + \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=1}^{m'} g_{jk} c_{6j} c_{6k} + \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=1}^{m'} h_{jk} c_{6j} c_{6k} \right) \right] \} = 0 \quad (4.1)$$

$$c_{1j} = U_n(x_j), \quad c_{2j} = U_n'(x_j), \quad c_{3j} = V_n(x_j), \quad c_{4j} = V_n'(x_j), \quad c_{5j} =$$

$$= W_n(x_j), \quad c_{6j} = W_n'(x_j) \quad (i=1, 2, \dots, 6; j=1, 2, \dots, m_0)$$

где $\Pi_0^{(1)}$, $\Pi_0^{(2)}$ и $\Pi_0^{(3)}$ — записанная в виде квадратичных форм от перемещений оболочки в точках x ; потенциальная энергия деформации оболочки, потенциальная энергия сил в срединной поверхности оболочки, возникающих в невозмущенном движении, и потенциальная энергия массовых сил жидкости в возмущенном движении при неподвижной свободной поверхности [5]; d_{ij} , e_{jk} , f_{jk} , g_{jk} , h_{jk} — коэффициенты, значения которых определяются формулами Симпсона, соотношениями (2,8), (3,7) и (3,8) и граничными условиями на краях оболочек.

Первая двойная сумма в (4.1) соответствует кинетической энергии оболочек; вторая — кинетической энергии жидкости во внутренней оболочке; третья, четвертая и пятая — кинетической энергии жидкости между внутренней и внешней оболочками.



Фиг. 2

После дифференцирования в (4.1) получим систему $6m_0$ линейных однородных алгебраических уравнений относительно координат $U_n(x_j)$, $U_n'(x_j)$, $V_n(x_j)$, $\dot{V}_n(x_j)$, $W_n(x_j)$, $W_n'(x_j)$, где A и $B(\omega^2)$ — матрицы порядка $6m_0$:

$$(A - \omega^2 B(\omega^2))X = 0 \quad (4.2)$$

$$X = [U_n(x_1), U_n'(x_1), \dots, W_n'(x_1); U_n(x_2), U_n'(x_2), \dots, W_n'(x_2); \dots; U_n(x_{m_0}), U_n'(x_{m_0}), \dots, W_n'(x_{m_0})]$$

Ненулевые векторы X и числа ω^2 , удовлетворяющие матричному уравнению (4.2) и являющиеся приближениями для форм и частот совместных колебаний соосных цилиндрических оболочек с жидкостью, найдем на основе метода [6], в котором итерации обратной матрицей сочетаются со спектральным сдвигом ω_0^2 и ортогонализацией.

Поскольку элементы матрицы B зависят от ω^2 , то ω^2 и X определяем методом последовательных приближений.

Найденные частоты ω_n^2 и формы X_n относятся к преимущественно упругим колебаниям [7]. Для форм преимущественно упругих колебаний разность между максимальным и минимальным нормальными перемещениями срединной поверхности оболочки превосходит разность между максимальным и минимальным перемещениями свободной поверхности жидкости.

Для форм преимущественно волновых колебаний жидкости имеет место обратное соотношение между указанными разностями.

Частоты и формы волновых колебаний жидкости можно найти следующим образом. Если нормальные перемещения оболочек $W_n(x)$ и $W_n'(x)$ выразить через потенциалы перемещений жидкости $\Phi_n(R, x)$, $\Psi_n(R, x)$ и $\Psi_n(R', x)$, например при помощи

последнего уравнения (2.1) в [5], и затем исключить перемещения оболочек из (1.2)–(1.5), то полученная система уравнений будет содержать лишь потенциалы $\Phi_n(r, x)$, $\Psi_n(r, x)$ и по-прежнему может быть решена методом суммарных представлений.

5. Расчеты проводились на ЭЦВМ по программе, составленной на Фортране.

Рассматривались осесимметричные колебания соосных цилиндрических оболочек с несжимаемой жидкостью, взятые из [1]. Результаты расчетов по предлагаемому методу и по методу из [1] практически совпали.

Неосесимметричные колебания исследовались для жестко заземленных соосных цилиндрических оболочек с параметрами $H_0/R=4$, $R/\delta=100$, $\delta=\delta'$, $\rho_0/\rho=7.8$, $\rho_0=\rho_0'$, $E=E'$, $\mu=\mu'=0.3$, $\rho_0 g R(1-\mu^2)/E=0.89 \cdot 10^{-7}$.

Приведем относящиеся к различным числам n минимальные безразмерные частоты $\lambda = \rho_0 R^2(1-\mu^2)\omega^2/E$ совместных преимущественно упругих колебаний, полностью заполненных сжимаемой жидкостью ($c=1500$ м/сек) оболочек для трех значений $R'/R=1.2, 1.5, 2.0$ (кривые 1, 2, 3 на фиг. 2).

Использовалась конечно-разностная сетка с параметрами $l=l'=m_0=40$. Скорость сходимости решения оценивалась сопоставлением частот колебаний, полученных для конечно-разностных сеток (40, 40, 40) и (60, 60, 60). Частоты различались не более чем на 0.3%.

Поступила 7 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев Ю. Г. К исследованию осесимметричных колебаний соосных цилиндрических оболочек с жидким заполнением. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
2. Пшеничнов Г. И. Свободные колебания наполненных жидкостью соосных ортотропных цилиндрических оболочек. В кн.: Теория оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
3. Положий Г. Н., Макаров В. Л. Обобщение формул суммарных представлений осесимметричного потенциала и специальные функции дискретного аргумента первого и второго рода, ч. 2. Вычислительная и прикладная математика, вып. 9, Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1969.
4. Положий Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Киев, Изд-во Киевск. ун-та, 1962.
5. Григолюк Э. И., Шклярчук Ф. Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
6. Brogan F., Forsberg K., Smith S. Dynamic behavior of a cylinder with a cutout. AIAA Journal, 1969, vol. 7, № 5. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 5.)
7. Кулешов В. Б., Швейко Ю. Ю. Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.