**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1977**

УДК 531.55:521.1

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ ОБЪЕКТА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА — ГАМИЛЬТОНА ПО ЕГО УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

(*Саратов*)

Рассматривается один случай интегрируемости кинематических уравнений, из которого известные случаи (когда вектор угловой скорости объекта постоянен по направлению и когда он совершает коническое движение) следуют как частные. Устанавливается матричное выражение погрешностей вычисления параметров Родрига – Гамильтона, справедливое для любых численных методов интегрирования кинематических уравнений с фиксированным шагом. Это выражение используется для получения ошибок некоммутативности вычисления параметров Родрига – Гамильтона при произвольном движении объекта. В качестве примера рассматриваются ошибки некоммутативности вычисления параметров Родрига – Гамильтона для случая конического движения объекта.

1. Определение ориентации объекта относительно инерциальной системы координат при помощи бесплатформенных инерциальных навигационных систем сводится к интегрированию на борту объекта кинематических уравнений Пуассона или кинематических уравнений в параметрах Родрига — Гамильтона [1]. Использование последних при определении ориентации объекта в ряде случаев приводит к повышению точности и сокращению объема вычислений в сравнении с использованием уравнений Пуассона [2, 3].

Матричная форма кинематических уравнений в параметрах Родрига — Гамильтона имеет вид

$$2\theta^{\bullet}=N_{\omega}\theta \tag{1.1}$$

Здесь θ — матрица-столбец, составленная из параметров Родрига — Гамильтона, определяющих положение связанного с объектом базиса $Y(Y_1Y_2Y_3)$ относительно опорного инерциального базиса $X(X_1X_2X_3)$; $\theta^T=\|\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\|$; $\theta^{\bullet T}=\|\lambda_0^{\bullet}, \lambda_1^{\bullet}, \lambda_2^{\bullet}, \lambda_3^{\bullet}\|$; матрица N_ω составлена из проекций вектора абсолютной угловой скорости объекта на связанный базис

$$N_\omega=\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

Введем в рассмотрение следующие векторы конечных поворотов: поворот $\boldsymbol{\theta}$, определяющий собой текущее положение (в момент времени t) связанного базиса Y относительно инерциального X, поворот $\boldsymbol{\theta}_0$, определяющий собой начальное положение Y° (в момент времени t_0) связанного базиса относительно инерциального, и поворот $\boldsymbol{\theta}^*$, определяющий собой текущее положение связанного базиса относительно его начального. Каждый из поворотов задан своими проекциями в базисе, преобразуемом этим поворотом. Поворот $\boldsymbol{\theta}$ является результирующим последовательности поворотов $\boldsymbol{\theta}_0$, $\boldsymbol{\theta}^*$. Параметры Родрига — Гамильтона результирующего поворота определяются через параметры Родрига — Гамильтона слагаемых поворотов по известным соотношениям [3, 4], матричная запись которых имеет следующий вид:

$$\theta=N^*\theta_0,\ \theta_0^T=\theta^T(t_0)=\|\lambda_{00},\ \lambda_{10},\ \lambda_{20},\ \lambda_{30}\| \tag{1.3}$$

$$N^*=\begin{Vmatrix}\lambda_0^* & -\lambda_1^* & -\lambda_2^* & -\lambda_3^*\\ \lambda_1^* & \lambda_0^* & \lambda_3^* & -\lambda_2^*\\ \lambda_2^* & -\lambda_3^* & \lambda_0^* & \lambda_1^*\\ \lambda_3^* & \lambda_2^* & -\lambda_1^* & \lambda_0^*\end{Vmatrix}.$$

Формулу (1.3) условимся называть формулой сложения поворотов второго типа (под формулой сложения поворотов первого типа будем понимать формулу, позволяющую находить компоненты кватерниона результирующего поворота в любом базисе через заданные в этом же базисе компоненты кватернионов составляющих поворотов [3, 5]).

Соотношение (1.3) является общим решением уравнения (1.1), построенным на основе физических соображений. Фигурирующая в нем матрица N^* является матрицантом уравнения

$$2N^{\bullet}=N_\omega N \tag{1.4}$$

Действительно, известно [6], если матрица коэффициентов N_ω непрерывна при $t\geqslant0$, то решение матричного дифференциального уравнения (1.1) существует для всех $t\geqslant0$, является единственным и может быть записано в виде

$$\theta=R^*\theta_0 \tag{1.5}$$

Здесь матрица R^* — матрицант уравнения

$$2R^{\bullet}=N_\omega R \tag{1.6}$$

Поскольку матрицы-столбцы θ и θ_0, сопоставляемые физическим векторам конечных поворотов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta}_0$, определяют собой соответственно текущее и начальное положение базиса Y относительно базиса X, то матрица R^* должна определять собой текущее положение базиса Y относительно его начального, а формула (1.5) необходимо должна быть формулой сложения двух поворотов второго типа, которая имеет вид (1.3). Поэтому имеет место равенство $R^*=N^*$, и уравнение (1.6) имеет вид уравнения (1.4).

Соотношение (1.3) определяет собой структуру общего решения уравнения (1.1). Однако само это решение неизвестно, поскольку неизвестны компоненты λ_i^* ($i=0,\ 1,\ 2,\ 3$) матрицы N^*, являющейся решением уравнения (1.4) при нулевых начальных условиях и произвольном виде матрицы коэффициентов N_ω.

Рассмотрим один случай интегрируемости уравнения (1.1).

Вектор абсолютной угловой скорости объекта $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\mathbf{i}_1+\omega_2\mathbf{i}_2+\omega_3\mathbf{i}_3$, где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты связанного базиса, $\omega_i=\omega_i(t)$ ($i=1,\ 2,\ 3$) — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанного базиса, запишем в виде

$$\boldsymbol{\omega}=b\mathbf{i}_1+a\cos(c+\nu)\mathbf{i}_2+a\sin(c+\nu)\mathbf{i}_3 \tag{1.7}$$

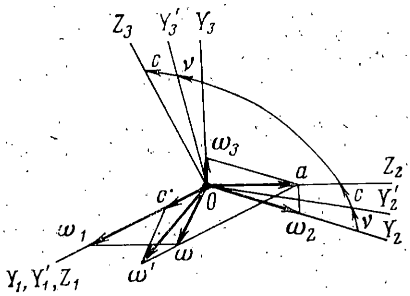
Здесь ν — постоянный во времени сдвиг фазы; b, a, c — функции времени, такие, что

$$b=\omega_1,\ a^2=\omega_2^2+\omega_3^2,\ \operatorname{tg}(c+\nu)=\omega_3/\omega_2 \tag{1.8}$$

Введем в рассмотрение два базиса (см. фигуру): базис Y', повернутый относительно базиса Y вокруг оси OY_1 на постоянный угол ν, и базис Z, вращающийся относительно базиса Y' вокруг оси OY_1', совпадающей с осью OY_1, с угловой скоростью $c^{\bullet}$. Положение базиса Z относительно базиса Y определим вектором конечного поворота θ_3. Параметры Родрига — Гамильтона этого поворота в базисах Y и Z равны между собой и

$$\lambda_{03}=\cos {}^1/_2(c+\nu),\ \lambda_{13}=\sin {}^1/_2(c+\nu),\ \lambda_{23}=\lambda_{33}=0 \qquad (1.9)$$

Начальное положение Z° базиса Z получается из начального положения Y° базиса Y поворотом θ_1 на угол $\nu+c_0$ вокруг оси OY_1°. Параметры Родрига — Гамильтона этого поворота в базисах Y° и Z° будут следующими:



$$\lambda_{01}=\cos {}^1/_2(\nu+c_0),\ \lambda_{11}=\sin {}^1/_2(\nu+c_0)$$
$$\lambda_{21}=\lambda_{31}=0,\ c_0=c(t_0) \qquad (1.10)$$

Вектор абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}'$ базиса Z равен геометрической сумме вектора переносной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, с которой вращается базис Y (а также базис Y'), и вектора относительной угловой скорости $\mathbf{c}^\cdot$ вращения базиса Z относительно базиса Y: $\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{c}^\cdot$. Определим текущее положение базиса Z относительно его начального Z° вектором конечного поворота θ_2. Предположим, что вектор абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}'$ вращения базиса Z является в этом базисе неизменным по направлению, изменяясь по модулю, что будет иметь место, если выполняются условия

$$(b+c^\cdot)/\omega'=\mathrm{const},\qquad a/\omega'=\mathrm{const},\qquad \omega'=[(b+c^\cdot)^2+a^2]^{1/2} \qquad (1.11)$$

При сделанном предположении направление вектора конечного поворота θ_2 будет совпадать с направлением вектора $\boldsymbol{\omega}'$; его направляющие косинусы с осями OZ_1, OZ_2, OZ_3 будут соответственно равны $(b+c^\cdot)/\omega'$, a/ω', 0, а угол поворота

$$\chi_2=\int_{t_0}^{t}\omega'dt$$

Поэтому параметры Родрига — Гамильтона поворота θ_2 в соответствии с их определением [5] будут иметь в базисе Z (а также Z°) вид

$$\lambda_{02}=\cos\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt,\qquad \lambda_{12}=\frac{b+c^\cdot}{\omega'}\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt$$
$$\lambda_{22}=\frac{a}{\omega'}\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt,\quad \lambda_{32}=0 \qquad (1.12)$$

Связи всех рассмотренных базисов представим следующей условной схемой (∞ — знак эквивалентности):

$$X\xrightarrow{\theta_0}Y^\circ\xrightarrow{\theta^*}Y\xrightarrow{\theta_3}Z \infty X\xrightarrow{\theta_0}Y^\circ\xrightarrow{\theta_1}Z^\circ\xrightarrow{\theta_2}Z$$

Из указанных на схеме поворотов неизвестным является один θ^*, параметры Родрига — Гамильтона которого необходимо определить. Поворот θ^*, как видно из схемы, является результирующим последовательности поворотов θ_1, θ_2, $-\theta_3$. Каждый из поворотов θ_1, θ_2, $-\theta_3$ задан своими параметрами Родрига — Гамильтона. Поэтому для нахождения параметров поворота θ^* естественно воспользоваться матричной формулой сложения поворотов второго типа (1.3), позволяющей находить параметры Родрига — Гамильтона результирующего поворота непосредственно через параметры Родрига — Гамильтона составляющих поворотов.

Заметим, что параметры Родрига – Гамильтона результирующего поворота θ^* можно определить и по формуле сложения поворотов первого типа. Параметры Родрига – Гамильтона поворота θ^* являются компонентами собственного кватерниона этого поворота [3], т. е. являются компонентами кватерниона поворота θ в базисе Y, преобразуемом этим поворотом. Каждый из составляющих поворотов θ_1, $\theta_2-\theta_3$ задан компонентами собственного кватерниона, т. е. задан в базисе, преобразуемом этим поворотом: θ_1 – в базисе Z° (а также Y°), θ_2 – в базисе Z (а также Z°), – θ_3 – в базисе Y (а также Z). Поэтому, чтобы воспользоваться формулой сложения поворотов первого типа, нужно компоненты кватернионов поворотов θ_1, θ_2 перепроектировать на один базис Y. Однако такая операция достаточно сложна и выполнять ее нет никакого смысла, поскольку формула сложения поворотов второго типа приводит сразу же к желаемому результату.

Применяя формулу сложения поворотов второго типа, находим $\theta^*=N_3^{-1}N_2\theta_1$. Так как $N^*l=\theta^*$, $N_1l=\theta$, где $l^T=\|1, 0, 0, 0\|$, то

$$N^*=N_3^{-1}N_2N_1 \tag{1.13}$$

Здесь матрицы N_3, N_1, N_2 имеют структуру матрицы N^* и составлены из параметров Родрига — Гамильтона, определяемых соотношениями (1.9), (1.10), (1.12); N_3^{-1} — матрица, обратная матрице N_3 ($N_3^{-1}=N_3^T$).

Подставляя выражение матрицы N^* в соотношение (1.3), получаем

$$\theta=N^*\theta_0=N_3^{-1}N_2N_1\theta_0 \tag{1.14}$$

Найдем выражения элементов матрицы N^*, учитывая выражения (1.9), (1.10), (1.12):

$$\begin{gathered}
\lambda_0^*=\cos\frac{1}{2}(c-c_0)\cos\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt+\frac{b+c^\bullet}{\omega'}\sin\frac{1}{2}(c-c_0)\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'dt\\
\lambda_1^*=\frac{b+c^\bullet}{\omega'}\cos\frac{1}{2}(c-c_0)\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt-\sin\frac{1}{2}(c-c_0)\cos\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt\\
\lambda_2^*=\frac{a}{\omega'}\cos\left[\frac{1}{2}(c+c_0)+\nu\right]\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt\\
\lambda_3^*=\frac{a}{\omega'}\sin\left[\frac{1}{2}(c+c_0)+\nu\right]\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega'\,dt
\end{gathered} \tag{1.15}$$

Соотношения (1.14), (1.15) представляют собой общее решение (1.1), если вектор угловой скорости объема удовлетворяет условиям (1.11). Указанным условиям удовлетворяет вектор угловой скорости объекта вида

$$\omega=f(t)\left[b_1\mathbf{i}_1+a_1\cos\left(c_1\int_{t_0}^{t}f(t)\,dt+\nu\right)\mathbf{i}_2+a_1\sin\left(c_1\int_{t_0}^{t}f(t)\,dt+\nu\right)\mathbf{i}_3\right] \tag{1.16}$$

$$b_1f(t)=b,\quad a_1f(t)=a,\quad c_1\int_{t_0}^{t}f(t)\,dt=c \tag{1.17}$$

где a_1, b_1, c_1 — некоторые постоянные, $f(t)$ — произвольная функция времени, ограниченная и интегрируемая на отрезке $[t_1, t_2]$, на котором она определена. Общее решение уравнения (1.1) для этого вида угловой скорости будет выражаться соотношением (1.14) и соотношениями, к которым приводятся (1.15) при учете (1.17):

$$\lambda_0^*=\cos m_1 \cos m_2+\frac{b_1+c_1}{\omega^+}\sin m_1 \sin m_2$$

$$\lambda_1^*=\frac{b_1+c_1}{\omega^+}\cos m_1 \sin m_2-\sin m_1 \cos m_2 \qquad (1.18)$$

$$\lambda_2^*=\frac{a_1}{\omega^+}\cos(m_1+\nu)\sin m_2, \quad \lambda_3^*=\frac{a_1}{\omega^+}\sin(m_1+\nu)\sin m_2$$

$$m_1=\frac{1}{2}c_1\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \quad m_2=\frac{1}{2}\omega^+\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \quad \omega^+=[(b_1+c_1)^2+a_1^2]^{1/2}$$

Известные случаи интегрируемости кинематических уравнений [3, 7] (вектор угловой скорости объекта постоянен по направлению; вектор совершает коническое движение) являются частными рассмотренного выше.

В случае постоянного по направлению вектора угловой скорости его вид

$$\omega=f(t)\,[b_1\mathbf{i}_1+a_1\cos\nu\mathbf{i}_2+a_1\sin\nu\mathbf{i}_3] \qquad (1.19)$$

получается из выражения (1.16), если положить $c_1=0$. Тогда общее решение уравнения (1.1) имеет вид (1.3), где параметры Родрига — Гамильтона (1.18), являющиеся элементами матрицы N^*, с учетом равенства $c_1=0$ и соотношений (1.8) определены равенствами

$$\lambda_0^*=\cos\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega\,dt, \quad \lambda_i^*=\frac{\omega_i}{\omega}\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega\,dt \quad (i=1,2,3) \qquad (1.20)$$

$$\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2, \quad \omega_1=b_1f(t), \quad \omega_2=a_1f(t)\cos\nu, \quad \omega_3=a_1f(t)\sin\nu$$

Случай конического движения объекта будет иметь место, если в выражении вектора угловой скорости объекта (1.16) положить $f(t)=1$, $\nu=0$. Тогда

$$\omega=b_1\mathbf{i}_1+a_1\cos c_1(t-t_0)\mathbf{i}_2+a_1\sin c_1(t-t_0)\mathbf{i}_3 \qquad (1.21)$$

а в общем решении (1.3) уравнения (1.1), соответствующем этому случаю движения, компоненты матрицы N^* определяются соотношениями

$$\lambda_0^*=\cos\frac{1}{2}c_1(t-t_0)\cos\frac{1}{2}\omega^+(t-t_0)+\frac{b_1+c_1}{\omega^+}\sin\frac{1}{2}c_1(t-t_0)\sin\frac{1}{2}\omega^+(t-t_0)$$

$$\lambda_1^*=\frac{b_1+c_1}{\omega^+}\cos\frac{1}{2}c_1(t-t_0)\sin\frac{1}{2}\omega^+(t-t_0)-\sin\frac{1}{2}c_1(t-t_0)\cos\frac{1}{2}\omega^+(t-t_0) \qquad (1.22)$$

$$\lambda_2^*=\frac{a_1}{\omega^+}\cos\frac{1}{2}c_1(t-t_0)\sin\frac{1}{2}\omega^+(t-t_0)$$

$$\lambda_3^*=\frac{a_1}{\omega^+}\sin\frac{1}{2}c_1(t-t_0)\sin\frac{1}{2}\omega^+(t-t_0)$$

2. Для определения ориентации объекта в параметрах Родрига — Гамильтона необходимо осуществлять на борту объекта интегрирование уравнения (1.1). Однако аналитическое решение этого уравнения в общем случае неизвестно, поэтому для построения решения уравнения (1.1) используются различные приближенные методы интегрирования.

Положим, что приближенное значение θ' матрицы-столбца θ вычисляется с фиксированным по времени шагом

$$\theta'_{i+1}=N^{*\prime}_{i+1}\theta_i', \quad \theta'_{i+1}=\theta'(t_{i+1}), \quad \theta_i'=\theta'(t_i), \quad t_{i+1}=t_i+h \tag{2.1}$$

где h — шаг интегрирования, $N_{i+1}{}^{*\prime}$ — матрица, элементами которой являются известные функции от компонент ω_1, ω_2, ω_3 угловой скорости объекта и вид которой определяется выбранным численным методом интегрирования уравнения (1.1).

Аналогично тому, как это сделано для направляющих косинусов [8], получим выражение ошибки вычисления θ в функции от ω_1, ω_2, ω_3, h, t, справедливое для всех численных методов интегрирования с фиксированным шагом.

Точное решение для θ_{i+1} на $i+1$ шаге определяется матрицантом

$$\theta_{i+1}=\left[E+\frac{1}{2}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}N_\omega\,dt+\frac{1}{4}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}N_\omega\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}N_\omega\,dt\right)dt+\ldots\right]\theta_i \tag{2.2}$$

Обозначая выражение, стоящее в квадратных скобках, через N^*_{i+1}, запишем точное значение θ в момент времени t_n в виде

$$\theta_n=\prod_{i=n}^{1}N_i{}^*\theta_0 \tag{2.3}$$

Приближенное значение для θ_n в момент времени t_n на основании (2.1) определяется соотношением

$$\theta_n'=\prod_{i=n}^{1}N_i{}^{*\prime}\theta_0 \tag{2.4}$$

Обозначим погрешность вычисления матрицы N^* на i-м шаге через $\Delta N_i{}^*$

$$\Delta N_i{}^*=N_i{}^{*\prime}-N_i{}^* \tag{2.5}$$

Разлагая $\Delta N_i{}^*$ в ряд Тейлора с точностью до $O(h^{k+1})$, получим

$$\Delta N_i{}^*\approx\frac{h^k}{k!}\frac{d^k\Delta N_i{}^*}{dt^k}\bigg|_{t_{i-1}} \tag{2.6}$$

где целое положительное число k — такое, что для любого $s<k$ производная $d^s\Delta N_i{}^*/dt^s$ в точке t_{i-1} равна нулю.

Из соотношений (2.3) — (2.6) получаем накапливающиеся погрешности вычисления параметров Родрига — Гамильтона к моменту времени t_n:

$$\Delta\theta_n=\theta_n'-\theta_n=\sum_{i=1}^{n}N_n{}^*N^*_{n-1}\ldots N^*_{i+1}\Delta N_i{}^*N^*_{i-1}\ldots N_2{}^*N_1{}^*\theta_0+O(h^k) \tag{2.7}$$

$$\Delta\theta_n{}^T=\|\Delta\lambda_0,\ \Delta\lambda_1,\ \Delta\lambda_2,\ \Delta\lambda_3\|$$

Используя тождество $Nl=\theta$ ($l^T=\|1,\ 0,\ 0,\ 0\|$), запишем соотношение (2.3) следующим образом:

$$N_n=\prod_{i=n}^{1} N_i{}^*N_0 \tag{2.8}$$

Тогда с учетом следующего из выражения (2.8) равенства $N_n{}^*N_{n-1}{}^*\ldots$ $\ldots N_{i+1}{}^*=N_nN_i^{-1}$, а также равенства $\overset{*}{N}_{i-1}\overset{*}{N}_{i-2}\ldots N_2{}^*N_1{}^*\theta_0=\theta_{i-1}$ соотношение (2.7) примет вид

$$\Delta\theta_n=N_n\sum_{i=1}^{n} N_i^{-1}\Delta N_i{}^*\theta_{i-1}+O(h^k) \tag{2.9}$$

Подставив в соотношение (2.9) выражение (2.6) и заменив в полученном соотношении с точностью до членов второго порядка малости относительно h сумму интегралом, получим окончательно

$$\Delta\theta=\frac{h^{k-1}}{k!}N\int_{t_0}^{t}N^{-1}\frac{d^k\Delta N^*}{dt^k}\theta\, dt+O(h^k) \tag{2.10}$$

Итак, полученная зависимость (2.10) определяет собой при выбранном методе численного интегрирования накапливающиеся погрешности $\Delta\lambda_i$ ($i=0,\ 1,\ 2,\ 3$) вычисления параметров Родрига — Гамильтона.

3. Одним из наиболее распространенных подходов при построении численных методов интегрирования кинематических уравнений является использование их аналитических решений для частных случаев движения объекта.

Рассмотрим применение в указанных целях аналитического решения уравнения (1.1) для случая постоянного по направлению, но переменного по модулю вектора угловой скорости объекта. Тогда общее решение уравнения (1.1) определяется выражениями (1.3), (1.20) и может быть представлено в виде (E — единичная матрица)

$$\theta=\left[E\cos\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega\, dt+\omega^{-1}N_\omega\sin\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega\, dt\right]\theta_0 \tag{3.1}$$

В качестве чувствительных элементов бесплатформенных инерциальных навигационных систем часто используются интегрирующие датчики угловой скорости, выдающие интегральную первичную информацию вида

$$\gamma_i=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\omega_i\, dt \qquad (i=1,2,3)$$

В предположении постоянства вектора угловой скорости по направлению справедливы соотношения

$$N_\omega|\omega=\Gamma|\gamma,\quad \gamma=\int_{t_0}^{t}\omega\, dt,\quad \gamma^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_2^3,\quad \gamma_i=\int_{t_0}^{t}\omega_i\, dt \quad (i=1,2,3) \tag{3.2}$$

$$\Gamma=\begin{Vmatrix} 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3\\ \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & -\gamma_2\\ \gamma_2 & -\gamma_3 & 0 & \gamma_1\\ \gamma_3 & \gamma_2 & -\gamma_1 & 0\end{Vmatrix}$$

С учетом равенства (3.2) выражение (3.1) принимает вид

$$\theta=[E\cos {}^1/_2\gamma+\gamma^{-1}\Gamma\sin {}^1/_2\gamma]\theta_0 \tag{3.3}$$

Считая изменение направления вектора угловой скорости на шаге интегрирования достаточно малым, алгоритм вычисления параметров Родрига — Гамильтона по сигналам интегрирующих датчиков угловой скорости на основании соотношения (3.3) можно записать в виде

$$\theta_n=\left[E\cos\frac{1}{2}\gamma+\gamma^{-1}\Gamma\sin\frac{1}{2}\gamma\right]\theta_{n-1},\quad \gamma=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2,\quad \gamma_i=\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\omega_i\,dt\quad (i=1,2,3) \tag{3.4}$$

Разлагая $\cos {}^1/_2\gamma$ и $\sin {}^1/_2\gamma$ в ряды и удерживая члены соответствующего порядка малости, получаем алгоритмы вычисления параметров Родрига — Гамильтона первого порядка $\theta_n=[E+{}^1/_2\Gamma]\theta_{n-1}$, второго $\theta_n=[E+{}^1/_2\Gamma-{}^1/_8\gamma^2E]\theta_{n-1}$ и высших порядков.

При вычислении параметров Родрига — Гамильтона по алгоритму (3.3) возникают методические ошибки, обусловленные тем, что направление вектора ω меняется на шаге интегрирования, а не остается постоянным как это предполагалось при получении (3.3). Оценим эти ошибки, называемые ошибками некоммутативности [1, 8], по формуле (2.10).

Учитывая, что в данном случае $N_i^{*\prime}=E\cos {}^1/_2\gamma+\gamma^{-1}\Gamma\sin {}^1/_2\gamma$, из соотношений (2.2), (2.5), (2.6) находим ошибки некоммутативности вычисления параметров Родрига — Гамильтона по алгоритму (3.4) на шаге интегрирования в виде

$$\Delta N^*={}^1/_{48}h^3(N_\omega N_\omega^{\cdot\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega^{\cdot})+O(h^4) \tag{3.5}$$

Тогда накапливающиеся ошибки некоммутативности вычисления параметров Родрига — Гамильтона по этому алгоритму будут определяться матричным соотношением

$$\Delta\theta=\frac{1}{48}h^2N\int\limits_{t_0}^{t}N^{-1}[N_\omega N_\omega^{\cdot\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega^{\cdot}]\theta\,dt+O(h^3) \tag{3.6}$$

Для алгоритмов первого и второго порядков имеем соответственно

$$\Delta\theta=\frac{1}{8}h\theta\int\limits_{t_0}^{t}\omega^2\,dt+O(h^2) \tag{3.7}$$

$$\Delta\theta=\frac{1}{48}h^2N\int\limits_{t_0}^{t}N^{-1}[N_\omega N_\omega^{\cdot\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega^{\cdot}-N_\omega^3]\theta\,dt+O(h^3)$$

Заметим, что полученные матричные выражения (2.10), (3.6), (3.7) ошибок вычисления параметров Родрига — Гамильтона дополняют собой кватернионные выражения ошибок, приведенные в [3, 9].

4. Одним из неблагоприятных движений объекта для бесплатформенных инерциальных навигационных систем, использующих алгоритмы, полагающие на шаге интегрирования вектор угловой скорости неизменным по направлению, считается коническое движение. Поэтому для такого слу-

чая движения объекта полезно иметь оценки ошибок некоммутативности вычисления кинематических параметров. В работе [10] для оценки ошибок некоммутативности вычисления направляющих косинусов предлагается использовать эмпирическую кривую.

Получим аналитическое выражение ошибок некоммутативности вычисления параметров Родрига — Гамильтона по алгоритму (3.4) в случае конического движения объекта, используя ранее найденные общее выражение ошибки некоммутативности (3.6) и соответствующее этому случаю движения объекта точное решение (1.3), (1.22) матричного кинематического уравнения (1.1). Подставляя соотношение (1.3) в соотношение (3.6) с точностью до члена $O(h^3)$, имеем

$$\Delta\theta=\left[\frac{1}{48}h^2N^*\int_{t_0}^{t}N^{*-1}(N_\omega N_\omega^{\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega)N^*\,dt\right]\theta_0=\frac{1}{48}h^2N_+\theta_0 \qquad (4.1)$$

Вычислим вначале

$$\theta_+=N_+l=N^*\int_{t_0}^{t}N^{*-1}[N_\omega N_\omega^{\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega]\theta^*\,dt \qquad (4.2)$$

а затем определим $\Delta\theta$ в соответствии с соотношением (4.1).

Матричное выражение, стоящее в квадратных скобках в (4.2), с учетом вида вектора угловой скорости объекта (1.21), запишется так:

$$N_\omega N_\omega^{\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega=$$

$$=2a_1c_1\begin{Vmatrix}0 & a_1 & -b_1\cos c_1(t-t_0) & -b_1\sin c_1(t-t_0)\\ -a_1 & 0 & b_1\sin c_1(t-t_0) & -b_1\cos c_1(t-t_0)\\ b_1\cos c_1(t-t_0) & -b_1\sin c_1(t-t_0) & 0 & -a_1\\ b_1\sin c_1(t-t_0) & b_1\cos c_1(t-t_0) & a_1 & 0\end{Vmatrix} \qquad (4.3)$$

На основании (1.22) и (4.3) подынтегральное выражение в (4.2)

$$N^{*-1}[N_\omega N_\omega^{\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega]\theta^*=2a_1c_1\begin{Vmatrix}0\\ -a_1+2a_1n\sin^2[{}^1\!/_2\omega^+(t-t_0)]\\ b_1-2(b_1+c_1)n\sin^2[{}^1\!/_2\omega^+(t-t_0)]\\ \omega^+n\sin\omega^+(t-t_0)\end{Vmatrix}$$

$$n=[a_1^2+b_1(b_1+c_1)]/\omega^{+2},\quad \omega^+=[a_1^2+(b_1+c_1)^2]^{1/2}$$

Тогда для интеграла имеем

$$\int_{t_0}^{t}N^{*-1}[N_\omega N_\omega^{\cdot}-N_\omega^{\cdot}N_\omega]\theta^*dt=2a_1c_1\|0,p_1,p_2,p_3\|^T$$

$$p_1=a_1(n-1)(t-t_0)-\frac{a_1n}{\omega^+}\sin\omega^+(t-t_0),\quad p_3=n[1-\cos\omega^+(t-t_0)]$$

$$p_2=[b_1-(b_1+c_1)n](t-t_0)+\frac{b_1+c_1}{\omega^+}n\sin\omega^+(t-t_0)$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (4.2), находим

$$\theta_+^T=2a_1c_1\|\lambda_0^+,\ \lambda_1^+,\ \lambda_2^+,\ \lambda_3^+\|=2a_1c_1\theta^{+T} \qquad (4.4)$$

$$\lambda_0^+=-p_1\lambda_1^*-p_2\lambda_2^*-p_3\lambda_3^*,\quad \lambda_1^+=p_1\lambda_0^*+p_2\lambda_3^*-p_3\lambda_2^*$$

$$\lambda_2^+=-p_1\lambda_3^*+p_2\lambda_0^*+p_3\lambda_1^*,\quad \lambda_3^+=p_1\lambda_2^*-p_2\lambda_1^*+p_3\lambda_0^* \qquad (4.5)$$

Здесь p_i ($i=1, 2, 3$) определяются приведенными выше равенствами, а λ_i^* ($i=0, 1, 2, 3$) — соотношениями (1.22).

Составляя матрицу N_+ из компонент соответствующей матрицы-столбца θ_+, получаем окончательно

$$\Delta\theta^T = \|\Delta\lambda_0, \ \Delta\lambda_1, \ \Delta\lambda_2, \ \Delta\lambda_3\| = {}^1/_{24} a_1 c_1 h^2 N^+ \theta_0 \qquad (4.6)$$

Здесь матрица N^+ составлена из элементов λ_i^+ ($i=0, 1, 2, 3$), определяемых равенствами (4.5), а $\theta_0=\theta(t_0)$ характеризует собой начальные условия вычисляемых параметров Родрига — Гамильтона.

Итак, погрешности вычисления параметров Родрига — Гамильтона, определяющих ориентацию объекта в инерциальном базисе, по алгоритму (3.4) при коническом движении объекта выражены как функции то времени, начальных условий, параметров движения объекта и имеют вид (4.6). При нулевых начальных условиях ($t_0=0$, $\theta_0^T=\|1, 0, 0, 0\|$) накапливающаяся во времени составляющая $\Delta\theta_t$ матрицы-столбца $\Delta\theta$ имеет вид

$$\Delta\theta_t = \frac{1}{24} a_1 c_1 h^2 \left\| \begin{matrix} -p_1^*\lambda_1^* - p_2^*\lambda_2^* \\ p_1^*\lambda_0^* + p_2^*\lambda_3^* \\ -p_1^*\lambda_3^* + p_2^*\lambda_0^* \\ p_1^*\lambda_2^* - p_2^*\lambda_1^* \end{matrix} \right\| t$$

Здесь $p_1^*=a_1(n-1)$, $p_2^*=b_1-(b_1+c_1)n$, а λ_i^* ($i=0, 1, 2, 3$) определяются выражениями (1.22) при $t_0=0$. Для оценки ошибок некоммутативности может оказаться полезной эвклидова норма $\Delta\theta$, имеющая вид

$$\|\Delta\theta\| = {}^1/_{24} a_1 c_1 h^2 [a_1^2 c_1^2 t^2/\omega^{+2} + 2n^2(1-\cos\omega^+ t)]^{1/2}$$

Накапливающаяся составляющая этой нормы $\|\Delta\theta\|_t = a_1^2 c_1^2 h^2 t/24\omega^+$.

Поступила 27 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Инерциальные системы без гиростабилизированной платформы. Обзор. В сб.: Вопросы ракетной техники, 1967, № 1.
2. *Edwards A., Jr.* The state of strapdown inertial guidance and navigation. Navigation, 1971—1972, vol. 18, No. 4, p. 386—401. (Рус. перев.: Вопросы ракетной техники, 1973, № 5.)
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
4. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., «Наука», 1976.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.
7. *Плотников П. К.* Измерительные гироскопические системы. Изд-во Саратовск. ун-та, 1976.
8. *Боданский Е. Д., Фурман В. Д.* О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона. Космические исследования, 1970, т. 8, вып. 6.
9. *Ткаченко А. И.* Погрешности вычисления параметров Родрига — Гамильтона. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
10. *Otten D. D.* A look into strap-down guidance design (I—II). Control Engng, 1966, vol. 13, No. 10, p. 61—67; No. 11, p. 71—77. (Рус. перев.: Вопросы ракетной техники, 1967, № 12.)