МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1977

УДК 539.37

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ РАЗРЕЗА

В. В. ПАРЦЕВСКИЙ

(Москва)

Решается плоская задача о распределении напряжений в слоистой среде вблизи разреза, перпендикулярного слоям. Приводится сопоставление с результатами для эквивалентной однородной среды. Слоистая среда представляется дискретной моделью регулярной структуры из чередующихся жестких и мягких слоев [1, 2].

Обычно при рассмотрении подобных задач предполагается, что напряжения в слоях постоянны по толщине, причем в жестких слоях учитываются только напряжения в плоскости слоев, в мягких – только поперечные касательные напряжения [3–5]. В [6, 7] было показано, что в местах, где велики градиенты напряжений, могут оказаться весьма существенными изгибные напряжения в жестких и поперечные нормальные — в мягких слоях. В [8] была сделана попытка учесть нормальные перемещения жестких слоев, но используемые авторами уравнения не согласованы с введенными кинематическими гипотезами.

1. Рассмотрим модель [2] слоистой среды (фиг. 1), состоящую из жестких слоев толщиной h с конечными жесткостями при растяжении A и изгибе D, чередующихся с мягкими толщиной s, для которых принимаются обычные предпосылки теории трехслойных пластин с мягким заполнителем. Плоская деформация среды описывается дифференциально-разностными уравнениями [2, 7]:

$$u_\alpha'' + \frac{\rho_1^2}{4}\left[u_{\alpha+1}-2u_\alpha+u_{\alpha-1}+\frac{1}{2}\left(w_{\alpha+1}'-w_{\alpha-1}'\right)\right]=0 \qquad (-\infty<\alpha<\infty)$$

$$w_\alpha^{\mathrm{IV}} - \frac{\rho_3^2}{4}(w_{\alpha+1}-2w_\alpha+w_{\alpha-1}) - \frac{\rho_2^2}{4}\left[u_{\alpha+1}'-u_{\alpha-1}'+\frac{1}{2}(w_{\alpha+1}''+2w_\alpha''+w_{\alpha-1}'')\right]=0 \qquad (1.1)$$

Здесь u_α, w_α — тангенциальное и нормальное перемещения точек срединной плоскости жесткого слоя с номером α, отнесенные к суммарной толщине жесткого и мягкого слоев $c=h+s$, штрихом отмечено дифференцирование по координате $\xi=x/c$; безразмерные параметры ρ_i^2 зависят от жесткостей слоев и определяются формулами (1.2) работы [7].

Если среда в плоскости $\xi=0$ имеет разрез длиной $2l$ и жесткие слои на берегах разреза загружены постоянным нормальным сжимающим напряжением p, то граничные условия при $\xi=0$ будут (из соображений симметрии достаточно рассмотреть только область $\xi\geqslant 0$)

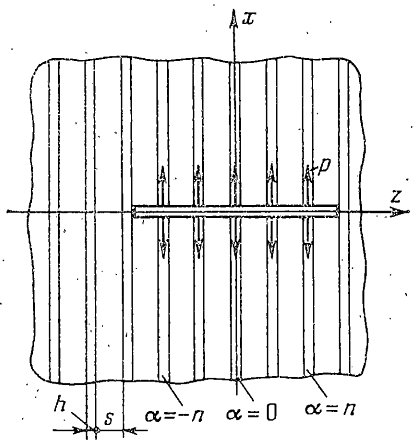
$$w_\alpha''' - \frac{\rho_2^2}{2}\left[u_{\alpha+1}-u_{\alpha-1}+\frac{1}{2}(w_{\alpha+1}'-2w_\alpha'+w_{\alpha-1}')\right]=0 \qquad (-\infty<\alpha<\infty)$$

$$Au_\alpha'=-ph,\quad Dw_\alpha''=0\quad (|\alpha|\leqslant n);\quad u_\alpha=0,\quad w_\alpha'=0\quad (|\alpha|>n) \qquad (1.2)$$

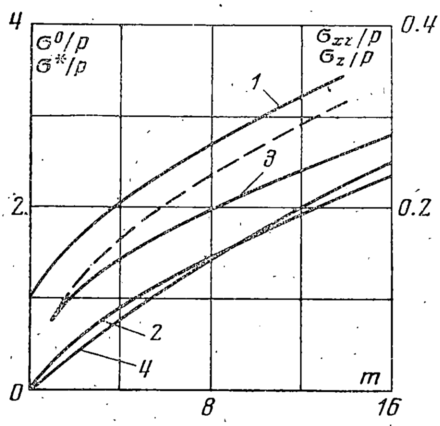
где $\alpha=\pm n$ — номера крайних разрезанных слоев. Левая часть первой группы этих условий представляет некоторую обобщенную поперечную силу в жестком слое с учетом касательных напряжений в соседних мягких слоях [2]. Вторая строка определяет продольную силу и момент на границе разрезанных жестких слоев, последние условия очевидны. Напряжения должны удовлетворять также условиям ограниченности на бесконечности.

Введем на поверхности разреза ($|\alpha|\leqslant n$) неизвестные значения тангенциальных смещений ζ_α и поворотов нормалей μ_α жестких слоев. Тогда вместо последней строки условий (1.2) получим

$$u_\alpha(0)=\zeta_\alpha,\quad w_\alpha'(0)=\mu_\alpha\quad (-\infty<\alpha<\infty,\ \zeta_\alpha=\mu_\alpha=0 \text{ при } |\alpha|>n) \tag{1.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Неизвестные поля перемещений $u_\alpha(\xi)$, $w_\alpha(\xi)$ при $\xi\geqslant 0$ являются непрерывными по ξ и дискретными по z функциями

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} u_\alpha(\xi)\,\delta\left(\frac{z}{c}-\alpha\right),\qquad \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} w_\alpha(\xi)\,\delta\left(\frac{z}{c}-\alpha\right)$$

Применим к уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3) преобразование Фурье — Стилтьеса по переменной z. Формулы прямого и обратного преобразования имеют вид

$$u(\xi,\psi)=\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} u_\alpha e^{i\alpha\psi},\qquad u_\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\xi,\psi)\,e^{-i\alpha\psi}\,d\psi \tag{1.4}$$

Для трансформант получим краевую задачу относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} u''-u\rho_1^2\sin^2{}^1/_2\psi-{}^1/_4w'i\rho_1^2\sin\psi=0\\ w^{IV}-w''\rho_2^2\cos^2{}^1/_2\psi+w\rho_3^2\sin^2{}^1/_2\psi+u'i\rho_2^2\sin\psi=0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} u=\sum_{\alpha=-n}^{n}\zeta_\alpha\cos\alpha\psi,\qquad w=i\sum_{\alpha=-n}^{n}\mu_\alpha\sin\alpha\psi\\ w'''-w'\rho_2^2\cos^2{}^1/_2\psi+ui\rho_2^2\sin\psi=0\qquad (\xi=0) \end{gathered} \tag{1.6}$$

Решение этой задачи должно удовлетворять также условиям ограниченности при $\xi \to \infty$.

Для существования трансформант Фурье — Стилтьеса необходимо, чтобы функции u_α, w_α удовлетворяли условиям ограниченности при $\alpha \to \infty$. Можно показать, что выполнение этих условий является следствием самоуравновешенности системы сил на берегах разреза.

Решая задачу (1.5), (1.6) и используя формулы обращения (1.4), получим

$$u_\alpha = \sum_{\beta=-n}^{n} (\zeta_\beta B_{\alpha\beta} + \mu_\beta C_{\alpha\beta}), \qquad w_\alpha = \sum_{\beta=-n}^{n} (\zeta_\beta D_{\alpha\beta} + \mu_\beta F_{\alpha\beta}) \tag{1.7}$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha-\beta)\psi}{a} \sum_{j=1}^{3} t_j A_{1j} e^{t_j \xi} d\psi$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\rho_1^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\psi \sin(\alpha-\beta)\psi}{a} \sum_{j=1}^{3} t_j A_{2j} e^{t_j \xi} d\psi$$

$$D_{\alpha\beta} = -\frac{4}{\pi\rho_1^2} \int_0^\pi \frac{\sin(\alpha-\beta)\psi}{a \sin\psi} \sum_{j=1}^{3} f_j A_{1j} e^{t_j \xi} d\psi$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha-\beta)\psi}{a} \sum_{j=1}^{3} f_j A_{2j} e^{t_j \xi} d\psi$$

Здесь $t_j(\psi)$ — характеристические показатели системы (1.5) с отрицательными действительными частями, a и A_{jk} — определитель и алгебраические дополнения матрицы a_{jk}:

$$a_{1k} = t_k, \quad a_{2k} = t_k f_k, \quad a_{3k} = t_k^{-1} f_k \rho_3^2 \sin^2 {}^1/_2\psi, \quad f_k = t_k^2 - \rho_1^2 \sin^2 {}^1/_2\psi$$

Значения параметров ζ_α, μ_α в (1.7) определяются из неиспользованных условий (1.2) на границе разреза ($\xi=0$)

$$\sum_{\beta=-n}^{n} (\zeta_\beta B_{\alpha\beta}' + \mu_\beta C_{\alpha\beta}') = -\frac{ph}{A}, \qquad \sum_{\beta=-n}^{n} (\zeta_\beta D_{\alpha\beta}'' + \mu_\beta F_{\alpha\beta}'') = 0 \quad (\alpha=-n, -n+1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Коэффициенты здесь получаются дифференцированием формул (1.7) и приравниванием ξ нулю. Система (1.8) является дискретным аналогом интегральных уравнений в задаче о трещине или штампе в несимметричной теории упругости. После подстановки решения системы (1.8) в формулы (1.7) вычисляются напряжения в слоях по формулам работы [7].

2. На фиг. 2 приведены результаты вычисления максимальных напряжений в жестких и мягких слоях среды при растяжении ее постоянным на бесконечности напряжением в жестких слоях p в зависимости от длины разреза. Решение этой задачи получается наложением на решение п. 1 однородного растяжения.

Кривые *1*, *2* соответствуют мембранному $\sigma_{n+1}^\circ(0)$ и максимальному изгибному $\sigma_{n+1}^*(0)$ напряжениям в жестком слое, ближайшем к разрезу. Кривая *3* показывает зависимость от длины разреза максимального касательного напряжения $\sigma_{xz,\,n+1}(0)$ в конце разреза, кривая *4* — максимального поперечного нормального напряжения $\sigma_{z,\,n+2}(0)$ в мягком слое перед разрезом.

По оси абсцисс отложено полное число разрезанных жестких слоев $m=2n+1$. Результаты получены при $h/s=1$, $E/G=100$, $\nu=0.25$, $\nu'=0.4$. Здесь E и ν — упругие константы жесткого слоя, G и ν' — мягкого.

Из результатов вычислений видно, что напряжения в дискретной модели среды ограничены всюду при любом количестве разрезанных слоев m, хотя и увеличиваются с ростом m.

Применение более общей дискретной модели слоистой среды по сравнению с [3–5, 8] вносит существенные изменения в картину распределения напряжений вблизи края разреза. Так, величина поперечных нормальных напряжений в мягких слоях σ_z, которые не учитываются в упомянутых моделях, сопоставима с величиной касательных напряжений σ_{xz}, а при некоторых значениях параметров среды и превосходит последние. Наибольшие значения σ_{xz} в используемой модели значительно ниже, чем в упрощенной (σ_{xz} для модели [3–5] отмечены на фиг. 2 пунктирной кривой).

Полученные результаты позволяют сделать выводы и о возможных механизмах разрушения слоистого материала с внутренней трещиной, нормальной к слоям. Так, отношение касательных напряжений σ_{xz} в мягких слоях к максимальным полным $\sigma_{n+1}^{\circ}+\sigma_{n+1}^{*}$ в жестких слоях практически не меняется при изменении длины разреза и зависит лишь от параметров среды, что согласуется с известными результатами для континуальной модели среды.

Отсюда следует, что вид разрушения (распространение прямолинейной трещины в направлении разреза или расслоение по мягким слоям перпендикулярно разрезу) определяется свойствами среды и мало зависит от длины разреза. Этот вывод качественно подтверждается экспериментальными данными по разрушению однонаправленных композитов [3]. Кроме того, использованная здесь модель позволяет описать еще один вид разрушения, наблюдаемый в экспериментах — отслоение впереди конца разреза, причиной которого являются нормальные напряжения в мягком слое $\sigma_{z,n+2}$.

3. Представляет интерес исследование асимптотики распределения напряжений у края разреза при сохранении длины его $2l$ неизменной и увеличении числа разрезанных слоев за счет уменьшения их толщины c. В пределе последовательность решений таких задач дает решение задачи о разрезе в континуальной ортотропной моментной в направлении x (полумоментной) среде. Подобное исследование необходимо для ответа на вопрос о том, при каких отношениях длины разреза к толщине слоя можно пользоваться континуальной моделью. Кроме того, оно позволяет наметить путь определения микроструктурных напряжений (напряжений в слоях) по результатам решения континуальной задачи.

В линейной механике хрупкого разрушения параметрами, определяющими распределение напряжений вблизи конца трещины, являются коэффициенты интенсивности напряжений

$$k_1=\lim_{z\to l+0}\sigma_x(0,z)\sqrt{2(z-l)}$$

В дискретной модели при увеличении числа разрезанных слоев $m=2n+1$ и условии сохранения неизменной длины разреза расстояние от конца его до срединной плоскости слоя $\alpha=n+j$ ($j=\mathrm{const}$) уменьшается. Поэтому для вычисления коэффициента интенсивности мембранных напряжений в эквивалентной континуальной задаче можно рассмотреть последовательность решений дискретных задач с различным m и выразить k_1 через предел числовой последовательности

$$k_1=\lim_{m\to\infty}\overset{\circ}{\sigma}_{n+j}(0)\sqrt{2(z_{n+j}-l)} \tag{3.1}$$

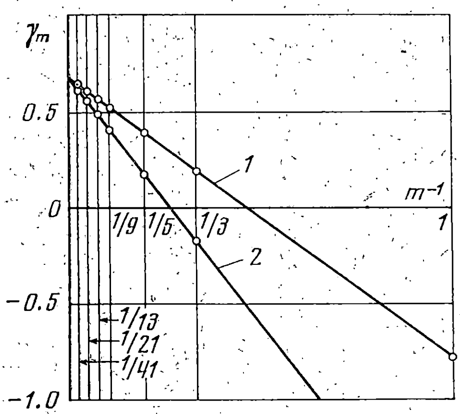
Здесь $z_{n+j}=c(n+j)$ — координата срединной плоскости слоя $\alpha=n+j$. Однако для дискретной модели положение края разреза не определено в интервале (z_n, z_{n+1}); поэтому не определена величина l. Чтобы определить l, воспользуемся тем, что величина k_1 не должна зависеть от j.

Обозначим через c_0 расстояние от срединной плоскости крайнего разрезанного жесткого слоя ($\alpha=n$) до точки, которую необходимо считать краем разреза ($l=nc+c_0$). Полагая в (3.1) последовательно $j=i$, q и приравнивая результаты, получим

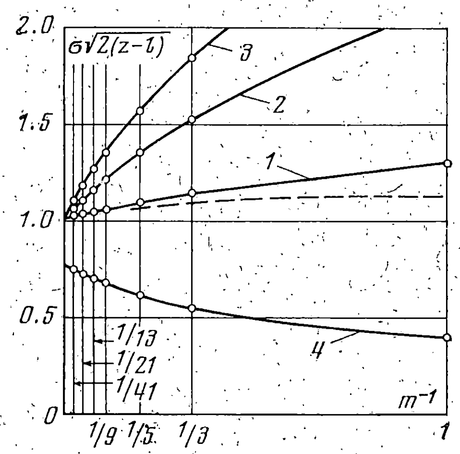
$$\lim_{m\to\infty}(\overset{\circ}{\sigma}_{n+i})^2\left(i-\frac{c_0}{c}\right)=\lim_{m\to\infty}(\overset{\circ}{\sigma}_{n+q})^2\left(q-\frac{c_0}{c}\right)$$

$$\frac{c_0}{c}=\lim_{m\to\infty}\gamma_m(i,q),\quad \gamma_m=\frac{q-i(\overset{\circ}{\sigma}_{n+i}/\overset{\circ}{\sigma}_{n+q})^2}{1-(\overset{\circ}{\sigma}_{n+i}/\overset{\circ}{\sigma}_{n+q})^2}$$

На фиг. 3 построены последовательности γ_m в зависимости от $1/m$ для $i=1$, $q=2$, 3. Точки последовательностей условно соединены линиями *1* ($q=2$) и *2* ($q=3$). Из графиков получаем $c_0/c\approx 0.68$. Таким образом, при вычислении коэффициентов интенсивности примем $l=(n+0.68)c$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Последовательности, стоящие в (3.1) под знаком предела, отнесенные к $pl^{1/2}$, построены на фиг. 4 для различных $j=1$, 2, 3 и соединены сплошными кривыми *1*, *2*, *3*. Пределы, как видно из результатов, с большой точностью равны единице. Это согласуется со значениями безразмерных коэффициентов интенсивности $k_1/(pl^{1/2})$ в соответствующей задаче как для классической модели среды [9], так и для моментной континуальной среды [10].

Вычисления показывают, что варьирование параметров слоистой среды практически не влияет на распределение мембранных напряжений на оси z при $m\geqslant 3$, а следовательно, и на величины c_0 и k_1.

Пунктирная кривая на фиг. 4 приведена для сравнения зависимости $\sigma_x\sqrt{2}(z-l)^{1/2}\times\times p^{-1}l^{-1/2}$ от z при $x=0$ в соответствующей задаче для однородной среды [9]. При этом по оси абсцисс отложены значения z, соответствующие координате срединной плоскости жесткого слоя $\alpha=n+1$. Из сопоставления сплошной кривой для $j=1$ и пунктирной следует, что уже при $m\geqslant 5$ решение континуальной задачи можно использовать для определения максимумов мембранных напряжений в дискретной модели, назначив предварительно координату конца разреза c_0/c.

Кривая *4* на фиг. 4 соединяет точки последовательности, пределом которой является коэффициент интенсивности максимальных моментных напряжений $k_1{}^*p^{-1}l^{-1/2}$ в эквивалентной однородной моментной среде. Для данных, принятых в расчете, он оказался равным приблизительно 0.75. На величину $k_1{}^*$ в отличие от k_1 геометрические и упругие свойства среды оказывают существенное влияние.

Таким образом, для слоистых сред с конечной изгибной жесткостью армирующих элементов применение упрощенных дискретных моделей для определения напряжений у конца разреза ведет к преуменьшению максимальных значений напряжений в жестких слоях и преувеличению напряжений сдвига в мягких.

При небольшом количестве разрезанных слоев ($m<5$) необходимо пользоваться дискретной моделью среды для определения напряжений в ее элементах. При большем m для этой цели можно использовать континуальную модель, правильно выбрав расстояние от конца разреза до первого неразрезанного жесткого слоя.

Поступила 5 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* К теории слоистых плит. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 3.
2. *Болотин В. В.* Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 11. М., «Машиностроение», 1965.
3. *Кортен Х. Т.* Разрушение армированных пластиков. М., «Химия», 1967.
4. *Hedgepeth J. M., Van Dyke P.* Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials. J. Composite Materials, 1967, vol. 1, No. 3.
5. *Михайлов А. М.* О разрушении однонаправленного стеклопластика. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
6. *Болотин В. В., Парцевский В. В.* Напряжения в слоистой среде при действии сосредоточенной силы. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
7. *Парцевский В. В.* О растяжении слоистого пространства с вырезами, нормальными к слоям. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
8. *Eringen A. C., Kim B. S.* Stress concentration in filamentary composites with broken fibers. Letter in Appl. and Engng Sci., 1974, vol. 2, No. 1.
9. *Sneddon I. N., Lowengrub M.* Crack problem in the classical theory of elastisity. N. Y., Wiley, 1969.
10. *Sternberg E., Muki R.* The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack. Internat. J. Solids and Structure, 1967, vol. 3, No. 1.